Història de la matemàtica: Grècia IIb

(els *Elements* d'Euclides: llibres VII, VIII, IX, X, XI, XII i XIII)

Resultats, textos i contextos

Josep Pla i Carrera

Institut d'Estudis Catalans
Secció de Ciències i Tecnologia

Història de la matemàtica: Grècia IIb (els *Elements* d'Euclides: llibres VII, VIII, IX, X, XI, XII i XIII)

Resultats, textos i contextos

Josep Pla i Carrera

Institut d'Estudis Catalans
Secció de Ciències i Tecnologia

Biblioteca de Catalunya. Dades CIP

Pla i Carrera, Josep, autor
Història de la matemàtica. Grècia IIb (els Elements d'Euclides, llibres VII, VIII, IX, X, XI, XII i XIII) : resultats, textos i contextos. — Primera edició
Bibliografia. Índexs
ISBN 9788499655154
I. Institut d'Estudis Catalans. Secció de Ciències i Tecnologia II. Títol
1. Euclides, Elements d' 2. Matemàtica grega — Història
514.112
51(38)(091)

Classificació AMS: Primària: 01xx, 01 - 01, 01A75, 00B50, 51-03.
Secundària: 01Axx, 01A20, 01A05, 51M04, 51M05, 97G40.

Projecte «*Història de la Matemàtica grega*», dut a terme sota la direcció de Pilar Bayer, membre de la Secció de Ciències i Tecnologia de l'Institut d'Estudis Catalans.

Carrer del Carme, 47. 08001 Barcelona

Primera edició: febrer de 2020

Assessoria lingüística: Margarida Bassols
Text revisat lingüísticament per la Unitat de Correcció del Servei Editorial de l'IEC

Disseny de la coberta: Azcunce | Ventura

Imprès a Open Print, SL

ISBN: 978-84-9965-515-4
Dipòsit Legal: B 3999-2020

A totes i cadascuna de les víctimes,
dels atemptats jihadistes
de Barcelona i Cambrils,
i a les seves famílies.

A totes i cadascuna de les persones
que, quan estaven votant pacíficament
en el referèndum d'autodeterminació
del poble de Catalunya,
van ser brutalment agredides
pels «gossos» d'un estat repressor,
tal com ho descriu George Orwell,
amb mà mestra, a Animal farm.

A tots i cadascun dels ciutadans catalans,
polítics o de la societat civil,
perseguits per la judicatura espanyola
pel seu compromís polític.

I a totes i cadascuna de les víctimes
dels fanatismes religiosos,
la xenofòbia, el racisme,
i el despotisme polític.

I també a totes les que ho són per raó de gènere
i per les seves opcions sexuals.

There is no scorn more profound,
or on the whole more justifiable,
than that of the men who make
for the men who explain.

Godfrey Harold Hardy*

*Hardy (1940), traducció catalana de l'editorial Obrador Edèndum, p. 77: «No hi ha desdeny més profund o, en darrer terme, més justificat que el que senten els creadors pels qui en comenten les creacions.»

Sumari

῞Οτι μὲν οὖ ἡ σοφία περί τινας ἀργὰς καὶ αἰτίας ἐστὶν ἐπιστήμη, δῆλον. [...]

῾Υπολαμβάνομεν δὴ πρῶτον μὲν ἐπίστασθαι πάντα τὸν σοφὸν ὡς ἐνδέχετια, μὴ καθ´ ἕκαστον ἔχοντα ἐπιστήμην αὐτων. εἶτα τὸν τὰ χαλεπὰ γνῶναι δυνάμενον καὶ μὴ ῥᾴδια ἀνθρώπῳ γιγνώσκειν τοῦτον σοφόν. [...] ἔστι τὸν ἀκριβέστερον καὶ τὸν διδασκαλικώτερον τῶν αἰτιῶν σοφώτερον εἶναι περὶ πᾶσαν ἐπιστήμην. Καὶ τῶν ἐπιστημῶν δὲ τὴν αὐτῆς ἕνεκεν καὶ τοῦ εἰδέναι χάριν αἱρετὴν οὖσαν μᾶλλον εἶναι σοφίαν ἢ τὴν τῶν ἀποβαινόντων ἕνεκεν, καὶ τὴν ἀρχικωτέραν τῆς ὑπηρετούσης μᾶλλον σοφίαν. Οὐ γὰρ δεῖν ἐπιτάττεσθαι τὸν σοφὸν ἀλλ᾽ ἐπιτάττειν, καὶ οὐ τοῦτον ἑτέρῳ πείθεσθαι, ἀλλὰ τούτῳ τὸν ἧττον σοφόν. [...]

Δῆλον οὖν ὡς δί οὐδεμίαν αὐτὴν ζητοῦμεν χρείαν ἑτέραν, ἀλλ᾽ ὥσπερ ἄνθρωπος, φαμέν, ἐλεύθερος ὁ αὑτοῦ ἕνεκα καὶ αὐτὴν ὡς μόνην οὖσαν ἐλευθέρας τῶν ἐπιστημῶν. Μόνη γὰρ αὕτη αὑτῆς ἕνεκέν ἐστιν.

ARISTÒTIL[†]

[†] ARISTÒTIL (2000), llibre I, 982a, 1-2, 7-19; i 982b, 24-28, edició castellana, p. 74, 75 i 77: «És obvi, doncs, que la saviesa[, o la filosofia,] és l'estudi de certes causes i certs principis. [...]

»Des d'aquest punt de vista, opinem que el mèrit del savi[, el filòsof,] és el coneixement de les coses difícils, mitjançant les capacitats humanes, sense entretenir-se en el que és particular. I que hi accedeix amb esforç. [...] En relació amb la ciència, el més savi és qui estudia les causes i és capaç de transmetre-les i ensenyar-les. Creiem que és més filosòfica la ciència que només s'ocupa del coneixement que la que ho fa dels seus resultats materials. La ciència més filosòfica es troba en un estadi superior a la que obeeix les directrius de les altres ciències perquè el savi, tal com l'entenem habitualment, no adopta lleis d'altri sinó que n'estableix de pròpies i s'allunya del sotmetiment a altres homes. Els que ho fan són menys savis. [...]

»Queda, doncs, ben clar que no busquem el coneixement perquè ens n'interessi la utilitat sinó que ho fem com a homes lliures que només treballen per a si mateixos. La ciència és l'únic coneixement que és veritablement lliure perquè és l'únic que no té cap altre objecte que no sigui ell mateix.»

Introducció

> Detection is, or ought to be, an exact science, and should be treated in the same cold unemotional manner. You have attempted to tinge it with romanticism, which produces much the same effect as if you worked a love-story or an elopement into the fifth proposition of Euclid.
>
> Sir Arthur Conan Doyle[‡]

> Mathematics is not only one of the most valuable inventions —or discoveries— of the human mind, but can have un aesthetic appeal equal to that of anything in art. Perhaps even more so, according to the poetess who proclaimed, «Euclid alone hath looked at beauty bare».
>
> Arthur C. Clarke[§]

A Pla (2018) vam descriure el contingut dels llibres i, ii, iii, iv, v i vi dels *Elements* d'Euclides que, com dèiem, recullen els

[‡] «La investigació és —o hauria de ser— una ciència exacta i s'ha de tractar sense passió ni emoció. Tu[, Watson,] has intentat donar-hi un matís romàntic i has aconseguit el mateix que aconseguiries si inserissis una història d'amor al cinquè postulat d'Euclides.» Conan Doyle (1890), capítol 1, edició anglesa, p. 6. També és molt interessant la introducció de «The adventure of the dancing men», en castellà, a Conan Doyle (1905), p. 97-99.

[§] «La matemàtica no és només el més valuós dels invents —o descobriments— del pensament humà, sinó que pot tenir un grau estètic semblant al de l'art. I potser encara més, si acceptem les paraules de la poetessa: "L'únic interès d'Euclides era la bellesa pura".» Clarke (1999), «The joy of maths», p. 460.

«elements» de la geometria plana escolar, elemental. I ho vam fer amb una traducció adaptada i comentada.

En aquest volum presentem els set llibres que falten, amb dues parts ben diferenciades, com vam fer aleshores.

La primera part consta dels tres llibres d'aritmètica (VII, VIII i IX) —de l'Escola pitagòrica— i del llibre dels incommensurables i els irracionals (X) —de l'Acadèmia de Plató—, que necessita alguns resultats dels llibres aritmètics i del llibre V.[¶] El X és un llibre difícil de llegir, tant per l'extensió com pel contingut, molt allunyat de les eines matemàtiques actuals. De fet, recull les aportacions de Teodor, Teetet i Demòcrit.[‖]

La segona part encara és més heterodoxa però, sense cap mena de dubte, inclou continguts que es van desenvolupar a l'Acadèmia de Plató. El llibre XI conté els «elements» més simples i necessaris de la geometria de l'espai o estereometria, i introdueix i estudia els sòlids escolars: el prisma, la piràmide, el cilindre, el con i l'esfera. A més, s'hi defineixen els cinc sòlids platònics: el tetraedre, el cub, l'octaedre, l'icosaedre i el dodecaedre. El que s'hi explica és necessari per als dos llibres següents, de temes dispars.

El llibre XII és el de l'«exhaustió» —eudoxià, bàsicament. S'hi determinen, *en termes de la teoria de la proporció*, l'«àrea del cercle» i els «volums dels sòlids» escolars suara esmentats. Però no s'hi fa cap mena de referència a les seves «superfícies».

El llibre XIII clou l'obra mostrant que els cinc sòlids platònics —els poliedres regulars— existeixen. I, curiosament, ho fa oferint-ne una construcció força aritmètica. Hi trobem la relació de les arestes amb el radi de l'esfera circumscrita i de les arestes entre si. I, com a tancament definitiu, Euclides hi demostra que «solament» són possibles aquests cinc sòlids platònics.

[¶] Recordem que, per a referir-nos a un llibre concret, com ara el cinquè, usem indistintament les notacions «llibre V» o «EV».

[‖] Sovint, s'ha afirmat que és el text més original d'Euclides i se l'ha considerat una obra de recerca. FRAJESE i MACCIONI (1970), p. 568.

En aquesta obra no oferim, però, la traducció dels dos llibres afegits: el XIV i el XV.

El XIV —l'autoria del qual s'atribueix a Hipsicles, basant-se en un text d'Apol·loni— continua la comparació dels sòlids platònics inscrits en una esfera, essent-ne el resultat més notable el que estableix que «la raó que hi ha entre les superfícies del dodecaedre i l'icosaedre inscrits en una esfera és la mateixa que la dels seus volums». Inclou, doncs, el càlcul de les superfícies d'aquests dos sòlids.

El darrer llibre —el XV, molt probablement d'Isidor de Milet— compta el nombre d'arestes i d'angles sòlids dels sòlids platònics, i cerca la mesura dels angles diedres de les cares que es tallen en una aresta.

La unitat de l'obra dels *Elements* queda palesa gràcies a la forta dependència que aquest volum té amb l'anterior (PLA (2018)), una dependència que ens obligarà a referir-nos-hi sovint.

Vull agrair a l'assessora lingüística i al Servei Editorial de l'Institut d'Estudis Catalans la feina ingent que ha fet que l'obra sigui molt més entenedora, més correcta i més lúcida.

Capítol 1

Presentació dels *Elements* (Στοιχεῖα) d'Euclides. Llibres VII, VIII, IX, X, XI, XII i XIII

> The primes are the raw material out of which we have to build arithmetic, and Euclids theorem assures us that we have plenty of material for the task.
>
> GODFREY HAROLD HARDY[1]

Atesa, d'una banda, la importància intrínseca que els «elements» precedents tenen en el desenvolupament metodològic dels *Elements* euclidians a l'hora d'establir la validesa de les proposicions i, de l'altra, la importància que, per als filòsofs i matemàtics grecs, té el fet que una proposició sigui un teorema o un problema,[2] ens ha semblat interessant reproduir, a la taula 1.1, el contingut de la taula 1.1 (PLA (2018), p. 12), corregida

1. «Els nombres primers són la matèria bàsica amb la qual hem de construir l'aritmètica, i el teorema d'Euclides ens assegura que tenim prou material per fer-ho.» HARDY (1940), edició catalana, p. 96-97.

2. Vegeu l'ítem 3.2.11 de *Grècia IIIa*, p. 95-96.

i, a la taula 1.2, recollir amb detall els teoremes i els problemes de cadascun dels llibres VII, VIII, IX, X, XI, XII i XIII,[3] abans d'efectuar-ne l'anàlisi i la traducció adaptada i comentada, que constitueixen el nucli d'aquest capítol i de l'apèndix.

TAULA 1.1. *Els «elements» dels tretze llibres dels* Elements

Ll	D	P	Nc	E	Prob.	Teor.	Por.	Lem.
I	23	5	5 [o 9]	48	13	35 (+2)	(3)	—
II	2	—	—	14	2	12	(1)	—
III	11	—	—	37	6 (+1)	31	(3)	—
IV	7	—	—	16	16	—	(2)	
V	18	—	—	25	—	25	(2)	—
VI	3	—	—	33	10	23	(3)	—
VII	22	—	—	39	7	32(+1)	(1)	—
VIII	—	—	—	27	2	25(+1)	(1)	—
IX	—	—	—	36	—	36(+1)	(1)	—
X	4/6/6	—	—	115	24 (+3)	(91+12)	(5)	(9?)
XI	28	—	—	39	6	33(+1)	(1)	(1)
XII	—	—	—	18	2	16(+3)	(3)	(2)
XIII	—	—	—	18	6	12(+2+2)	(2)	(3?)

TAULA 1.2. *Detall dels teoremes i dels problemes dels set darrers llibres dels* Elements

Llibre	Problemes
VII	2, 3, 33, 34, 35, 36 i 39.[4]
VIII	2 i 4.[5]
IX	Cap de les trenta-sis proposicions.[6]
X	3, 4, 10, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 85, 86, 87, 88, 89 i 90.[7]
XI	11, 12, 22, 23, 26 i 27.[8]
XII	16 i 17.[9]
XIII	13 i lema, 14, 15, 16, 17 i 18.[10]

3. A l'adreça <http://aleph0.clarku.edu/˜djoyce/java/elements/>, els enunciats dels problemes estan en vermell i els dels teoremes, en negre.

4. El porisma d'EVII 2 és un teorema.

5. El porisma d'EVIII 2 és un teorema.

6. El porisma d'EIX 11 és un teorema.

7. I els lemes EX 29 i 33. En canvi, els porismes d'EX 3, 4, 6, 9, 23, 111 i 114, i els lemes 13, 17, 19, 22, 32, 42, 53 i 59 són teoremes.

8. El porisma d'EXI 33 és un teorema.

9. Els porismes d'EXII 7, 8 i 17, i els lemes d'EXII 2 i 4 són teoremes.

10. Els porismes d'EXIII 16 i 17, i els lemes d'EXIII 2, 13 i 18, també.

1.1 Els resultats aritmètics: EVII, EVIII i EIX

Els llibres VII, VIII i IX són eminentment pitagòrics. Recullen l'*aritmètica* d'aquesta escola —la influència de la qual és indiscutible— amb les millores conceptuals i metodològiques de les escoles atenenques de Plató i d'Aristòtil.[11]

S'hi tracten els nombres enters positius, els únics que accepten els matemàtics grecs, com veurem en les definicions ulteriors. També s'hi introdueixen les raons de dos nombres naturals, és a dir, s'hi accepta allò que avui anomenem «fraccions» o «nombres racionals» positius. Això obliga Euclides a repetir algunes de les proposicions establertes al llibre V,[12] que estudia les magnituds.

Per Aristòtil, el nombre és un tipus de magnitud. Si tenim en compte la distinció que fa entre magnituds discretes i contínues, serà de les primeres.[13] I, segons ell, l'aritmètica s'haurà d'inserir en el context de les magnituds.

Tanmateix, Euclides dedica tres llibres a l'aritmètica pitagòrica que, de fet, constitueixen un manual independent de la resta de l'obra, tant pels elements que necessiten dels llibres precedents com pels que aporten als posteriors. Ras i curt, aquests llibres no tenen cap mena de contingut geomètric. Les figures

11. Vegeu A.1 (pàgines 85-210) i la nota 187 (pàgina 85). ITARD (1961) és un estudi dels llibres aritmètics dels *Elements*.

12. De fet, en la definició DV 5, podríem dir que les raons són racionals quan, per a certs $m, n \in \mathbb{N}$, es dona la igualtat. Però Euclides no retorna al llibre V sinó que ofereix noves definicions, com si aquests tres llibres fossin totalment independents dels anteriors i, en particular, del V. Això no obstant, a EX 5 i EX 6, analitza de quina naturalesa són, relativament, dues magnituds amb la raó igual a la de dos nombres naturals o diferent d'ella.

13. Vegeu ARISTÒTIL (2000), 1020 a 13; 1039 a 12 i a 30; 1053 a 25-30; 1083 a 1; 1085 b 18-22; i 1088 a 5; edició castellana, p. 238, 329, 330, 397, 398, 533, 545 i 556. I ARISTÒTIL (1995), III 7, 207 b 7; edició castellana, p. 208-209.

que contenen no són autèntiques figures: s'hi representen nombres naturals mitjançant segments, que dibuixarem verticalment per indicar, d'alguna manera, que no tenen res a veure amb els segments geomètrics que hem emprat horitzontalment als llibres precedents.

I, a diferència del llibre V, en el qual les operacions bàsiques són la suma de magnituds, la multiplicació d'una magnitud per un nombre natural i la relació d'igualtat entre magnituds,[14] als tres llibres aritmètics apareix una operació nova: la multiplicació de nombres naturals[15] i, de retruc, la «divisibilitat» i la «divisió euclidiana», que Euclides usa, per exemple, a EVII 1 i EVII 2, de manera implícita. Atesa l'existència del producte $n \times m$ de dos nombres naturals, amb m i $n > 1$, el fet que $m \times n > m$ i n fa que el «principi d'Èudox-Arquimedes» (DV 4) resulti obvi.

La independència dels llibres VII, VIII i IX dels «elements» dels llibres precedents queda palesa quan observem que solament EIX 15 necessita EII 1 i EII 2.[16]

LLIBRE VII. *Els conceptes bàsics de la divisibilitat numèrica*

Aquest llibre, el primer dels tres aritmètics, conté les vint-i-dues definicions aritmètiques dels *Elements*, incloses les que serien pròpies dels altres dos llibres. Són definicions relatives al nombre [natural] que tenen a veure amb els conceptes de: unitat, nombre [natural], part, parts, múltiple, parell, senar, parell-parell, parell-senar, senar-senar, primer, compost, pla, sòlid, quadrat, cúbic i perfecte. I també referides als nombres primers entre si.

14. Allò que, en termes actuals, són les operacions pròpies d'un «espai vectorial».

15. Ara en diríem les operacions pròpies d'«un anell».

16. També ha de recórrer a algunes definicions i a alguns resultats tècnics del llibre V: EV 7 i EV 9 a EVII 19, DV 9 a EVIII 11 i EVIII 18, i DV 20 a EVIII 14.

A més, aquest llibre ofereix trenta-nou proposicions, dinou de les quals segueixen el guió del V i fan referència a la teoria de la proporció numèrica, és a dir, als nombres racionals. Les dues primeres proposicions —EVII 1 i EVII 2— mostren l'existència del màxim comú divisor i proporcionen l'algorisme d'obtenció o «algorisme d'Euclides». I les darreres fan referència als nombres primers, als primers entre si i al mínim comú múltiple.

D'entrada, val la pena indicar que hi ha dues propietats de la divisibilitat que Euclides no estableix de manera explícita però que usa en diverses ocasions. Són:
— La transitivitat: si $m|n$ i $n|p$, aleshores $m|p$.
— La compatibilitat amb la suma i la resta: si $m|p$ i $m|q$, aleshores $m|(p \pm q)$.[17]

Les definicions.[18] La definició de *unitat* —DVII 1— no és aritmètica sinó metafísica. I, de retruc, la de *nombre* —DVII 2— tampoc no ho és.[19] Però, un cop acceptat el concepte de nombre, les definicions següents són absolutament correctes.

Les de *part* (divisor) i *múltiple* —DVII 3 i DVII 5— reprodueixen les corresponents del llibre V. Però, a DVII 4, s'introdueix el significat essencial de *parts* —designat, a vegades, com a «fracció», «part alíquota» o «fraccionària».[20] Actualment, diríem que Euclides introdueix els «nombres racionals positius» i,

17. L'expressió $m|n$ —que es llegeix «m divideix n» o, en termes euclidians, «m és part de n»— significa «existeix un nombre natural q que fa que $n = m \times q$».

18. Vegeu el paràgraf A.1.1*a* (pàgines 87-91).

19. Vegeu les notes 13 i 190 (pàgines 3 i 87).

20. El significat de *parts* té el paper que tenia el de *raó* al llibre V però, en aquest context, és molt més clar i precís. De fet, si bé segueix el guió de les primeres definicions del llibre V des d'un punt de vista conceptual, Euclides trenca el paral·lelisme.

En català, el terme *parts* planteja una dificultat. A Euclides *parts* és singular: «un nombre és *parts* d'un altre nombre», però, en català, és plural: «un nombre té tres parts», entenent que té «una mateixa part» tres vegades; és a dir, que és divisible per tres o múltiple de tres. Potser, en aquest cas, hauríem d'utilitzar l'expressió «tros» o «divisor». Però, per com veurem més endavant, certes regles de maneig d'aquesta classe de nombres.[21]

▶ **Exercici 1**. Un cop establert el concepte de *part*, proveu la validesa de les dues propietats anteriors. [*Indicació.* Vegeu la nota 17.] ◀

Les definicions DVII 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19[22] i 22[23] proporcionen una taxonomia dels nombres naturals. Entre els més importants, es troben, probablement, els «nombres primers» (DVII 11), els «nombres primers entre si» (DVII 12) i els «nombres perfectes» (DVII 22).[24]

Euclides també defineix què hem d'entendre per «producte» de dos nombres naturals (DVII 15): la suma iterada d'un dels dos nombres tantes vegades com unitats té l'altre. I per «proporció de quatre nombres» (DVII 20): els nombres primer i segon són una mateixa part, un mateix múltiple o una mateixa part alíquota del tercer i del quart.[25]

---

respecte al text grec, usarem els termes *part*, plural *parts*, i *part alíquota* per a l'euclidià *parts*.

21. Donats dos nombres naturals m, n, es poden donar tres situacions: a) existeix un nombre natural k, i $n = k \times m$; b) existeix un nombre natural k i $m = k \times n$; c) existeixen dos nombres naturals k i ℓ, tots dos diferents de la unitat u, i $k \times m = \ell \times n$. Les tres possibilitats corresponen a «m és una part de n», «m és un múltiple de n» i «m és una part alíquota de n».

Aquesta interpretació moderna —en particular en el cas de la «part alíquota»— resulta molt còmoda perquè aclareix l'enunciat de les proposicions i l'entrellat de les demostracions. Això és degut al fet que permet escriure $\frac{1}{k}m = n$ i $\frac{\ell}{k}p = q$ per indicar que n és la k-ava part de m i q és ℓ vegades la k-ava part de p, respectivament. És obvi, doncs, que $\frac{1}{k}m = n$ i $\frac{\ell}{k}p = q$ equivalen a $k \times n = m$ i a $k \times q = \ell \times p$, respectivament. Recordem que, d'acord amb DVII 5, $k \times m = m + \cdots + m$ (k sumands). Se'ns planteja la pregunta: $k \times m$ i $m \times k$ valen el mateix? I Euclides la respon a EVII 16.

22. Són, de fet, definicions necessàries per al llibre VIII.

23. És, en realitat, una definició necessària per al llibre IX.

24. La definició de *nombre primer* és indubtablement pitagòrica. Que ho sigui la de *nombre perfecte* és més discutible, ja que no se'n troba cap traça abans d'Euclides. El teorema EIX 36 s'atribueix al seu geni.

25. Copseu les analogies i diferències que tenen amb les definicions del llibre V.

I, amb aquestes eines, ja es pot endinsar en l'estudi aritmètic de la divisibilitat.

Les proposicions.[26] Les dues primeres proposicions, EVII 1 i EVII 2, estableixen que, donats dos nombres naturals, sempre tenen un divisor comú màxim, que pot ser l'1 quan els dos nombres són primers entre si.[27] Afirmen i mostren que la manera de trobar-lo és un procés iteratiu: traiem el nombre petit al gran tantes vegades com sigui possible fins a aconseguir un residu més petit que el nombre petit, i iterem el procés amb el nombre petit i el residu. El procés «s'atura»[28] i el darrer residu és el màxim comú divisor que buscàvem.

Hi apareix, doncs, l'«antifèresi» (ἀνθυφαιρέω) —la «diferència alternada»— que, segons Alexandre d'Afrodísia, Aristòtil anomena «antanèresi» (ἀντανερεσυς). Aquesta eina, que permet establir la commensurabilitat o incommensurabilitat de dues magnituds de la mateixa classe,[29] la retrobarem al llibre X.

► **Exercici 2**. Suposant que no hi ha cap cadena descendent infinita de nombres naturals, donats dos nombres naturals $m < n$, proveu que: *a*) Sempre existeix un nombre natural d que $d|m, d|n$, i que, si $d'|m$, $d'|n$, aleshores $d'|d$ i d és el «màxim comú divisor de m i n», que s'abreuja $\mathrm{mcd}\,(m, n)$. *b*) Aquest nombre natural d és únic.[30]

Exercici 3. Calculeu els mcd següents: *a*) $(456, 759)$, *b*) $(5.193, 7.592)$, *c*) $(5.196, 7.592)$, *d*) $(28.434, 35.228)$ i *e*) $(576, 839, 432)$. ◄

26. Vegeu el paràgraf A.1.1*b* (pàgines 91-135). A la taula 1.2 (pàgina 2) s'indiquen quines són problemes.

27. Aquí, com en altres indrets, la unitat té el paper del nombre natural, malgrat el que Euclides ha establert a DVII 1.

28. De manera indirecta, apareix un «postulat» dels nombres naturals, el «principi del descens infinit», que Euclides no esmenta mai explícitament però que utilitza en diverses ocasions. Vegeu l'exercici 2 i les notes 41 i 215 (pàgines 9 i 92); les notes 210 i 1542, i el problema 14 de PLA (2016*b*), p. 122, 593 i 159. Val la pena llegir-lo i comparar-lo amb la manera de fer actual per adonar-se de la diferència entre els llenguatges matemàtics emprats.

29. CAVEING (1998), p. 111-113.

30. El màxim comú divisor de m i n, $\mathrm{mcd}\,(m, n)$, l'expressarem breument amb (m, n).

La proposició EVII 5 diu: si $m = \frac{p}{k}$, i $n = \frac{q}{k}$; $m+n = \frac{p+q}{k}$.[31]

▶ **Exercici 4**. Proveu-ho. ◀

Com ja vam fer amb les propietats de les raons i les proporcions del llibre V,[32] sintetitzem els resultats més notables del llibre VII a la taula següent.

TAULA 1.3. *Taula de les proposicions EVII 5-19*

Proposicions	Enunciat lingüisticoalgebraic
EVII 5 a 8	$n = \frac{\ell}{k}\, m$ i $q = \frac{\ell}{k}\, p$ impliquen $n \pm q = \frac{\ell}{k}\,(m \pm p)$.
EVII 9 i 10	$n = \frac{k}{k'}\, m, q = \frac{k}{k'}\, p$ i $n = \frac{\ell}{\ell'}\, q$, amb $m > p$ i $n > q$, impliquen $m = \frac{\ell}{\ell'}\, p$.
EVII 11	$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ implica $\frac{m-p}{n-q} = \frac{m}{n} [:= \frac{p}{q}]$.
EVII 12	Si $\frac{m_1}{n_1} = \cdots = \frac{m_k}{n_k}$, aleshores $\frac{m_1+\cdots+n_k}{n_1+\cdots+n_k} = \frac{m_1}{n_1}$.[33]
EVII 13	[*Alternando*] Si $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, aleshores $\frac{m}{p} = \frac{n}{q}$.
EVII 14	[Transitivitat de =] Si $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ i $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$, $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$.
EVII 15	Si $m = k\,u$ i $n = k\,p$, aleshores $\frac{u}{p} = \frac{m}{n}$.[34]
EVII 16	[Commutativitat de $\times$]: $m \times n = n \times m$.[35]
EVII 17 i 18	$\frac{m}{n} = \frac{k\times m}{k\times n} = \frac{m\times k}{n\times k}$.
EVII 19	[Definició alternativa de proporcionalitat.] $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ si, i només si, $m \times q = n \times p$.[36]

▶ **Exercici 5**. Demostreu les proposicions de la taula 1.3. ◀

La taula de correspondències entre les proposicions de caràcter operatiu dels llibres V i VII és aquesta:

TAULA 1.4. *Correspondències entre les proposicions de caràcter operatiu dels llibres* V *i* VII

llibre V	1	5	19	12	16	22
llibre VII	5 i 6	7 i 8	11	12	13	24

31. Recordem que $m = \frac{p}{k}$ i $n = \frac{q}{k}$ equivalen a $k \times m = p$ i $k \times n = q$, respectivament. Vegeu la nota 21 (pàgina 6).

32. PLA (2018), taula 1.9, p. 51.

33. És l'enunciat numèric d'EV 12. Les demostracions són també les mateixes.

34. És trivial si es parteix de la definició de proporcionalitat i d'EVII 13, però és un element essencial per a EVII 16.

35. Vegeu la nota 21 (pàgina 6).

36. A EVI 16 ho estableix per a segments rectilinis.

Les proposicions Evii 20, 21 i 22 estableixen, de manera clara i precisa, l'existència de dos nombres mínims —o, equivalentment, primers entre si— que tenen la raó de dos nombres donats per endavant. És a dir, existeixen uns m_1, n_1 mínims o, alternativament, que compleixen $(m_1, n_1) = 1$,[37] que satisfan $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m}{n}$, amb m, n donats per endavant.[38]

A continuació, oferim els resultats relatius a la divisibilitat que fan que el llibre sigui un text d'aritmètica molt notable:

Evii 23. Si dos nombres són primers entre si, tot nombre que en divideixi un és primer amb l'altre.

En síntesi, si $(m, n) = 1$, i $k|m$, aleshores $(k, n) = 1$.

Evii 24. Si $(k, m) = 1$ i $(k, n) = 1$, aleshores $(k, m \times n) = 1$.

Evii 27. Si $(k, m) = 1$, aleshores $(k^2, m^2) = (k^3, m^3) = 1$, etc.

Evii 28. $(m, n) = 1$ si, i només si, $(m, m+n) = (n, m+n) = 1$.[39]

Evii 29. Un nombre primer és primer amb qualsevol nombre que no el tingui com a part.

Evii 30. [Lema d'Euclides.] Si p és un nombre primer que divideix el producte $m \times n$, aleshores $p|m$ o $p|n$.[40]

Evii 31. Tot nombre compost té un divisor primer.[41]

Evii 32. Tot nombre o és primer o té un divisor primer.[42]

▶ **Exercici 6**. Useu el principi dels descens infinit per establir Evii 31 i el porisma corresponent. ◀

La proposició Evii 32, porisma de l'anterior, implica que «tot nombre natural factoritza en nombres primers». Estableix la part «existencial» del teorema fonamental de l'aritmètica.

---

37. Per a la notació (m, n), del màxim comú divisor de m i n, vegeu la nota 30 (pàgina 7).

38. Vegeu, a Levi (1947), edició del 2001, p. 208-209, les demostracions de les proposicions Evii 21 i Evii 22 basant-se en l'Evii 4.

39. Ho demostra per l'absurd.

40. És un recíproc parcial d'Evii 24.

41. Es basa en el principi del descens infinit. És un text digne de ser llegit i entès per la seva elegància i correcció, un d'aquells que hauria de formar part de la lectura de textos matemàtics clàssics en les etapes formatives.

42. És un porisma de l'anterior i també de lectura obligada.

▶ **Exercici 7**. Proveu l'afirmació anterior. ◀

El llibre VII es clou amb les proposicions EVII 33, 34, 35, 36, 37, 38 i 39 que, amb un clar paral·lelisme amb les tres primeres, mostren que, donats dos nombres, n'hi ha un que és el múltiple comú més petit —el mínim comú múltiple.[43]

▶ **Exercici 8**. Donats dos nombres naturals m i n, trobeu una manera de calcular el mínim comú múltiple de m i n, $[m, n]$.

Exercici 9. Calculeu el mcm de cada un dels grups de nombres de l'exercici 3 (pàgina 7).

Vegeu si és certa la igualtat $m \times n = (m, n) \times [m, n]$.

Constateu la validesa de la propietat anterior.

Observeu què passa quan, en lloc d'usar dos nombres, se n'usen tres o més de tres. ◀

TAULA 1.5. *Els «elements» de les proposicions del llibre* VII

EVII	D	P	Nc[44]	E
1	VII 12	—	—	—
2	—	—	—	VII 1
3	—	—	—	VII 1, 2 i 2 p.
4	VII 2, 3, 4	—	—	VII 2
5	VII 3	—	2	—
6	VII 4	—	—	VII 5
7	—	—	1, 3	VII 5
8	—	—	1, 2, 3	VII 6, 7
9	VII 3	—	—	VII 5, 6
10	—	—	—	VII 5, 6, 9
11	VII 20	—	—	VII 7, 8
12	VII 20	—	—	VII 5, 6
13	VII 20	—	—	VII 9, 10
14	—	—	1	VII 13
15	VII 20	—	1	VII 7, i 12
16	VII 2, 15	—	1 i 2	VII 15
17	VII 2, 15, 20	—	1	VII 13
18	—	—	—	VII 16, 17

43. El mínim comú múltiple de m i n, mcm (m, n), l'expressarem breument amb $[m, n]$.

44. A les taules d'«elements» dels llibres VII,VIII,IX,X,XI,XII i XIII (pàgines 10, 13, 18, 32, 53, 62 i 66, respectivament) s'hi esmenten les nou nocions comunes. Vegeu PLA (2018), nota 258, p. 85. I usem «l.», «p.» i «r.» per designar *lema*, *porisma* i *recíproc*.

Taula 1.5. *Els «elements» de les proposicions del llibre* VII (continuació)

EVII	D	P	Nc	E
19	—	—	1	V 7, 9; VII 17, 18
20	VII 2, 20	—	—	V 7; VII 4, 10, 12, 13
21	VII 12	—	—	VII 15, 20
22	VII 2, 12, 15	—	—	VII 17
23	VII 12	—	—	—
24	VII 12, 15, 20	—	1	VII 16, 19, 20, 21, 23
25	—	—	—	VII 24
26	—	—	—	VII 24
27	—	—	—	VII 25, 26
28	VII 12	—	—	VII 1, 5
29	VII 12	—	—	—
30	VII 15	—	1	VII 19, 20, 21, 29
31	VII 13	—	—	—
32	—	—	—	VII 31
33	VII 15, 20	—	1	VII 3, 13, 15, 16, 19, 20, 21
34	VII 3, 5, 15, 20	—	1	VII 16, 17, 19, 20, 21, 33
35	—	—	—	—
36	—	—	—	VII 34, 35
37	VII 2	—	1	VII 15
38	VII 20	—	1	VII 15
39	—	—	—	VII 36, 37, 38

Llibre VIII. *Algunes propietats de les proporcions numèriques contínues*

Aquest llibre, força elemental i amb un contingut aritmètic més limitat que l'anterior i el següent, no conté definicions ja que els conceptes que utilitza ja s'han definit abans, al VII.[45]

Alguns autors diuen que el seu interès rau en la necessitat de conèixer les proporcions contínues de raó dos a l'hora d'establir el teorema dels nombres perfectes (parells) [EIX 35 i EIX 36]. Aquesta opinió es basa, potser, en el fet que Euclides no

45. Vegeu la pàgina 4.

dedica ni una sola proposició a les progressions aritmètiques. Al nostre entendre, però, aquesta justificació és molt feble.

El llibre VIII conté vint-i-set proposicions, entre teoremes i problemes, dedicades a les «proporcions contínues» (ἑξῆς ἀναλογον), que actualment anomenem «progressions geomètriques». En concret, una «proporció contínua [de nombres naturals]» és una col·lecció de nombres naturals $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{k-2}, m_{k-1}$, m_k que satisfan la relació $\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_2}{m_3} = \cdots = \frac{m_{k-2}}{m_{k-1}} = \frac{m_{k-1}}{m_k}$.[46]

► **Exercici 10**. Proveu l'equivalència entre aquesta definició i la de la nota 46. ◄

Les proposicions.[47] Les proposicions s'agrupen en blocs diversos (EVIII 1, 2 i 3, 6 i 7, i 13) segons que els termes extrems m_1, m_k de la proporció contínua siguin mínims, és a dir, primers entre si, «irreductibles»; segons que sigui possible que els termes es mesurin els uns als altres, o no; segons la manera que es faci servir per col·locar termes en progressió contínua entre dos extrems primers entre si; segons quins termes es col·loquin entre dos nombres quadrats i entre dos nombres cúbics; i, finalment, segons quina sigui la situació dels nombres plans i sòlids.

Heus-ne aquí una síntesi breu.

Les proposicions EVIII 1, 2 i 3 estableixen que, si el primer i darrer termes, m_1 i m_k, són primers entre si, els termes [de la proporció contínua] són els més petits possibles.

En canvi, les EVIII 6 i EVIII 7 fan referència a la possibilitat que els termes es mesurin els uns als altres, o no.

La proposició EVIII 4 inclou el problema que planteja la manera de trobar, amb els termes mínims, una proporció contínua amb la raó dels termes d'una de donada per endavant.

---

46. Els nombres naturals $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{k-2}, m_{k-1}, m_k$ formen una «progressió geomètrica». És a dir, si fem $\frac{m_i}{m_{i+1}} = \lambda \in \mathbb{Q}$, aleshores $m_i = \lambda^{i-1} m_1$, en què $i = 1, \ldots, k$, i $\lambda^0 = 1$.

47. Vegeu el paràgraf A.1.2*b* (pàgines 135-170) i la taula 1.2 (pàgina 2).

En les proposicions EVIII 11 i EVIII 12 s'estableix que, entre dos [nombres] quadrats, hi ha una mitjana proporcional i, entre dos de cúbics, dues.[48]

Les proposicions EVIII 18, 19, 20 i 21 fan referència als nombres plans i sòlids.

I la darrera proposició, EVIII 27, afirma que els nombres sòlids semblants són com dos de cúbics.

▶ **Exercici 11**. Proveu EVIII 11, 12 i 27. ◀

TAULA 1.6. *Els «elements» de les proposicions del llibre VIII*

EVIII	D	P	Nc	E
1	—	—	—	VII 14, 20, 21
2	—	—	1	VII 14, 17, 18, 20, 21, 22, 27 VIII 1
3	—	—	—	VII 22, 27, 33 VIII 2 i 2 p.
4	VII 20	—	1	VII 13, 20, 34, 35
5	V 9 VII 15	—	1	VII 14, 17, 33 VIII 4
6	VII 1, 2, 12, 20	—	—	VII 14, 20, 33 VIII 2, 3
7	VII 20	—	1	VII 14, 20, 21, 33 VIII 2, 3, 6
8	V 7 VII 2, 15, 20	—	1	VII 15, 20, 33 VIII 1, 2 i 2 p.
9	V 7 VII 2, 15, 18, 20	—	1	VII 20, 33 VIII 1, 2 i 2 p.
10	VII 2, 15, 20	—	1	VII 17, 18
11	V 9 VII 15, 18	—	1	VII 17, 18
12	V 10 VII 15, 18, 19	—	—	VII 17, 18
13	VII 15	—	1	VII 14
14	VII 15, 20	—	—	VIII 7, 11
15	VII 15, 18, 20	—	—	VIII 7, 12
16	—	—	—	VIII 14

48. Aquesta qüestió està íntimament vinculada a la duplicació del cub. Vegeu PLA (2016*b*), p. 243-244.

TAULA 1.6. *Els «elements» de les proposicions del llibre* VIII (continuació)

EVIII	D	P	Nc	E
17	—	—	—	VIII 15
18	VII 15, 16, 21	—	1	V 9 VII 13, 17
19	V 9 VII 15, 21	—	1	VII 13, 17 VIII 18
20	VII 3, 15, 16, 21	—	1	VII 13, 17, 20, 33
21	VII 3, 14, 15, 17, 20, 21	—	1	VII 14, 17, 20, 21, 33 VIII 2, 3, 20
22	VII 21	—	—	VIII 20
23	VII 21	—	—	VIII 21
24	VII 21	—	—	VIII 8, 18, 22
25	VII 21	—	—	VIII 8, 19, 23
26	VII 21	—	—	VII 33 VIII 2 i 2 p., 18
27	VII 21	—	—	VII 33 VIII 2 i 2 p., 19

LLIBRE IX. *Els nombres primers, la descomposició en factors i els nombres perfectes (parells)*

Com l'anterior, aquest llibre no conté definicions,[49] inclou solament trenta-sis proposicions, entre teoremes i problemes. Moltes són realment importants per a la matemàtica i la seva història (com les EIX 14, 20, 35 i 36). La resta tenen un interès menor.

Segons Boyer, es tracta d'una aportació totalment pitagòrica.[50] Però hi ha autors que afirmen que l'EIX 36 és una aportació innovadora d'Euclides.

Les proposicions.[51] Les primeres proposicions, molt elementals, fan referència als productes i a la divisibilitat dels nombres plans semblants, dels quadrats i dels cúbics. Per exemple:

49. Vegeu la pàgina 170.
50. BOYER (1968), edició castellana, p. 128.
51. Vegeu el paràgraf A.1.3*b* (pàgines 170-210) i la taula 1.2 (pàgina 2).

EIX 1 i EIX 2 estableixen que dos nombres són plans semblants si, i només si, el seu producte és un nombre quadrat.
EIX 5 i EIX 6 diuen que, si multiplicant un nombre per un nombre cúbic se n'obté un de cúbic, el nombre que multiplica també ho és. I el quadrat d'un nombre cúbic, també.
EIX 8, 9, 10, 11, 12 i 13 relacionen els nombres primers amb les proporcions contínues que comencen amb la unitat.[52]
EIX 14 és un enunciat força controvertit. Afirma: el més petit dels nombres que pot ser mesurat per nombres primers diversos no admet cap altre divisor primer.

L'ambigüitat d'aquest enunciat resideix en la resposta a la pregunta següent: la formulació admet la repetició de nombres primers que mesuren el nombre en qüestió o solament accepta l'ús d'un divisor primer una sola vegada? És a dir, la proposició s'aplica al nombre $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$?, o solament val per a nombres com ara $30 = 2 \times 3 \times 5$?

Si acceptem la primera possibilitat, cosa que no admet tothom, tenim la «unicitat» del «teorema fonamental de l'aritmètica».[53] Però, si no l'acceptem, solament en tenim un cas molt particular.[54] Nosaltres ens inclinem per la primera possibilitat. Ens sembla que, als aritmètics grecs, no els podia passar per alt la descomposició en nombres primers de nombres com ara el 9, de les muses; el 12, dels signes del zodíac; el 60, de la

52. De fet, estudien algunes propietats de les progressions geomètriques de la forma $1, r, r^2, \ldots, r^k$. En particular:
EIX 8 i EIX 9. Si r és un nombre quadrat o cúbic, tots els termes de la progressió geomètrica són quadrats o cúbics, respectivament.
EIX 12. Els nombres primers que divideixen r^k divideixen r.
EIX 13. Si r és primer, els únics nombres que divideixen r^k són els termes de la progressió geomètrica $1, r, r^2, \ldots, r^{k-1}$, ja que r^k n'està exclòs per Nc 5.

53. Cal indicar, tanmateix, que, de manera clara, no trobem aquest resultat fins a l'any 1801, moment en el qual Gauss publica el seu tractat d'aritmètica. Vegeu GAUSS (1801), § 2, teorema 16, edició catalana, p. 10.

54. I, curiosament, la demostració tampoc no aclareix aquest dubte. Vegeu EIX 14 (pàgina 188).

base de numeració mesopotàmica; el 360, dels dies no epagòmens de l'any egipci; o els nombres 28, 496 i 8.128, que són nombres perfectes parells.

▶ **Exercici 12**. Proveu la validesa de la proposició EIX 14 en qualsevol dels dos propòsits. ◀

I arribem a un dels resultats més notables d'aquest llibre, EIX 20, que fa referència a la «infinitat de nombres primers», expressada, però, sense recórrer a l'infinit actual. La proposició diu textualment:

EIX 20. Hi ha més nombres primers que qualsevol quantitat [finita fixa].

Observem que, com dèiem abans, la proposició estableix l'existència d'una infinitat de nombres primers recorrent la infinitud potencial i, en conseqüència, evitant la infinitud en acte. En concret, donada una col·lecció finita arbitrària de nombres primers, sempre hi ha un nombre primer que no en forma part.[55]

▶ **Exercici 13**. Suposeu que teniu una quantitat k de nombres primers, $p_1, \ldots, p_k$. Considereu el nombre natural $N = (p_1 \times \cdots \times p_k) + 1$. Proveu que, necessàriament, hi ha d'haver un nombre primer diferent de $p_1, \ldots, p_k$. [*Indicació.* Useu EVII 31.[56] Observeu que, tal com s'articula el raonament, no cal que $p_1, \ldots, p_k$ siguin els k primers nombres primers. Vegeu el problema 6 (pàgina 72).] ◀

La proposició EIX 35 —«element bàsic» en la demostració d'EIX 36— proporciona, usant el llenguatge de les proporcions, la manera de determinar el valor de la suma dels termes d'una progressió geomètrica de raó dos i primer terme la unitat. Diu:

> Si tenim una multitud arbitrària de nombres contínuament proporcionals i sostraiem el primer del segon i del darrer, aleshores l'excés del segon sobre el primer és al primer com l'excés

55. PLA (2012), p. 149-151. La demostració que s'ofereix als *Elements* és la que encara es fa avui en els textos escolars.

56. Disjunció de casos.

> del darrer sobre el primer a la suma de tots els nombres que precedeixen el darrer.[57]

▶ **Exercici 14**. Demostreu la validesa de la proposició anterior. [*Indicació.* Consulteu el problema 16 (pàgina 74).] ◀

I el llibre es clou amb una proposició, l'Eix 36, aparentment de caràcter menor però que ha produït molta literatura i que conté problemes oberts encara avui. Fa referència als nombres perfectes (parells). Diu:

> Considerem una multitud arbitrària de nombres contínuament en proporció doble, [començant] des de la unitat. Si la suma de tots és un [nombre] primer, el que resulta de multiplicar la suma pel darrer nombre és perfecte [parell].[58]

Els nombres de la forma $2^k - 1$ s'anomenen «nombres de Mersenne» i, quan són primers, «nombres primers de Mersenne».[59]

▶ **Exercici 15**. Doneu:

a) Els deu primers nombres de Mersenne.

b) Els cinc primers nombres primers de Mersenne. [*Indicació.* El nombre de Mersenne $2^{11} - 1$ és primer?]

c) Els cinc primers nombres perfectes (parells).

Exercici 16. Proveu:

a) La proposició Eix 36.

b) Que tot nombre perfecte parell acaba en 6 o en 8. [*Indicació.* Pel que fa a la plausibilitat, fixeu-vos en els cinc primers nombres perfectes que heu calculat a l'ítem *c* de l'exercici anterior. La demostració la podeu fer pel compte de la vella o bé usant congruències mòdul 10.] ◀

Euclides no afirma pas que, amb aquest algorisme, s'obtinguin tots els nombres perfectes parells. Tampoc no diu res sobre els senars. L'any 1849, Leonhard Euler va establir que l'algorisme

---

57. Formalment, diu: «si $m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}, m_k$ és una progressió geomètrica, aleshores $\frac{m_2 - m_1}{m_1} = \frac{m_k - m_1}{m_1 + \cdots + m_{k-1}}$.»

58. Formalment, diu: «si $M := 1+2+\cdots+2^k = 2^{k+1} - 1$ és un nombre primer, el nombre $P := 2^k\, M$ és perfecte (parell).»

59. Pla, Paradís i Viader (2008), p. 367.

euclidià proporciona tots els parells.[60] I, això no obstant, ara encara no sabem si n'hi ha una infinitat o no.

Actualment, no coneixem cap nombre perfecte senar ni tampoc no sabem si n'hi ha o no.[61] El problema resta obert.

TAULA 1.7. *Els «elements» de les proposicions del llibre* IX[62]

EIX	D	P	Nc	E
1	VII 18	—	—	VII 17 VIII 8, 18, 22
2	VII 16, 18, 21	—	1	VII 17 VIII 8, 18, 20
3	VII 2, 15, 20	—	1	VIII 8, 23
4	VII 21	—	1	VII 17 VIII 8, 19, 23 IX 3
5	VII 21	—	—	VII 17 VIII 8, 19, 23 IX 3
6	VII 2, 15, 19, 20, 21	—	1	VIII 8, 19, 23
7	VII 13, 15, 17	—	—	—
8	VII 2, 15, 18, 20	—	1	VIII 22, 23
9	VII 2, 15, 19, 20	—	1	VIII 22, 23 IX 3, 8
10	VII 2, 20	—	1	VII 13 VIII 25, 26 r. IX 6, 8
11	VII 2	—	1	VII 15
12	VII 2, 11, 14, 15	—	—	VII 19, 20, 21, 29 IX 8 i 11 p.
13	VII 11, 12, 13, 15, 20	—	1	VII 19, 31 IX 8, 11 i 11 p., 12
14	VII 11	—	—	VII 30
15	VII 21	—	—	II 3, 4 VII 22, 24, 25, 28 VIII 2 i 2 p.

60. Aquest fet ja havia estat conjecturat per Descartes l'any 1638. Vegeu DICKSON (1919), edició del 2005, volum I, p. 12.

61. L'any 1638, en una carta adreçada a Mersenne, Descartes estableix la forma que han de tenir els nombres perfectes senars, si n'hi ha.

62. Observem que moltes de les proposicions, en particular EIX 35, es podien haver establert al llibre VII, però Euclides recorre a la seva

Taula 1.7. *Els «elements» de les proposicions del llibre* ix (continuació)

Eix	D	P	Nc	E	
	16	vii 2	—	—	vii 20, 21
	17	vii 20	—	—	vii 13, 20, 21
	18	vii 15	—	1	vii 19 ix 16
	19	vii 15	—	1	vii 14, 19, 20, 21 ix 17
	20	—	—	—	vii 28, 31 o 32, 36
	21	vii 6	—	—	—
	22	vii 7	—	—	ix 21
	23	vii 7	—	—	ix 21, 22
	24	vii 6	—	—	—
	25	vii 7	—	—	ix 24
	26	vii 7	—	—	ix 24
	27	vii 7	—	—	ix 24
	28	vii 15	—	—	ix 21
	29	vii 15	—	—	ix 23
	30	vii 6, 7	—	—	ix 23 o 29
	31	—	—	—	ix 30, 39
	32	vii 8	—	—	ix 13
	33	vii 8, 9	—	—	—
	34	vii 8, 9	—	—	—
	35	vii 7	—	1, 3	vii 11, 12, 13, 17, 18
	36	vii 20, 22	—	1	vii 14, 19, 20, 21, 29 ix 13, 35

1.2 Les quantitats incommensurables i les irracionals: Ex

Aquest llibre, realment extens, ha estat objecte de moltes discussions,[63] però molt poques degudes a erudits anteriors a Pla-

metodologia, i les dona al lloc en què li sembla que queda més palès el seu caràcter d'«element» i, per tant, el seu rendiment.

63. Vegeu, per exemple, la nota 21 de Kayas (1978), volum ii, p. 182. Tanmateix, per la seva gran capacitat analítica, val la pena recordar Szábó (1963). Hi ha altres intents d'explicar, amb més o menys profunditat, el contingut d'aquest llibre, com ara Heath (1921), volum i, p. 402-412;

tó. El document més antic que hi fa referència és un fragment del *Teetet*.[64]

LLIBRE X. *Les magnituds incommensurables i les irracionals*

El contingut del llibre X, fruit de l'Acadèmia de Plató, s'atribueix a Teodor, Teetet, Èudox i el mateix Euclides. És el més extens de tots els dels *Elements*. S'hi proposen tres grups de definicions. Les quatre del primer grup fan referència a les «magnituds commensurables» i «incommensurables». Després, en dos grups de sis definicions cadascun, s'estableixen les sis classes de segments medials i apòtoms que s'estudien en el cos proposicional. El llibre té cent quinze proposicions sobre segments irracionals.[65] De fet, tots s'obtenen a partir d'un segment unitat i usant arrels quadrades.

Aquest és un dels llibres més admirats i alhora més feixuc de llegir per a una mentalitat educada en una concepció algebraica com la nostra.[66] A més, ara, un cop assolides les conquestes de l'àlgebra, esdevé totalment inútil des d'un punt de vista funcional. De fet, estudia i investiga els segments incommensurables d'una de les vuit formes:

$$a \pm \sqrt{b}, \sqrt{a} \pm \sqrt{b}, \sqrt{a \pm \sqrt{b}} \text{ i } \sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}},$$

en què a i b són longituds de segments commensurables.[67]

---

i DEDRON i ITARD (1959), p. 339-345. Vegeu també les obres citades a la nota 489 (pàgina 211).

64. Vegeu PLA (2016a), B 7.8b_1, p. 497-498, que hem usat en parlar de Teodor de Cirene i que reproduïm, *in extenso*, a PLA (2020a), B 2.2ℓ_1.

65. Vegeu A.2 (pàgines 210-418) i també la nota 489 (pàgina 211).

A les pàgines 42-46, oferim una síntesi de les definicions i les proposicions que hem plagiat de KAYAS (1978), volum II, p. XVIII-XXII.

66. Vitrac hi dedica íntegrament el volum tercer: VITRAC (1998), de quatre-centes trenta-dues pàgines, per tal d'aclarir-ne bé el contingut.

A KAYAS (1978) hi trobem una adaptació més algebritzada de les demostracions que són més entenedores per a un lector d'avui en dia.

67. Tot seguit, veurem una possible justificació del fet que Euclides es limiti a segments d'aquesta classe.

Hem d'indicar, tanmateix que, per Euclides, aquest llibre no és aritmètic precisament perquè fa referència a l'«incommensurable». És eminentment geomètric, una mica en la línia del llibre II.

Es fa difícil justificar la intenció d'Euclides a l'hora d'elaborar aquest apartat. Però les raons poden ser, d'una banda, la naturalesa dels costats del triangle equilàter, del quadrat, del pentàgon, de l'hexàgon, de l'octògon, del decàgon i del pentadecàgon regulars respecte del radi de la circumferència circumscrita; i, de l'altra, la naturalesa de les arestes dels poliedres regulars[68] —el tetraedre, l'hexaedre o cub, l'octaedre, l'icosaedre i el dodecaedre regulars[69]—, del radi de l'esfera circumscrita, i dels lligams entre les arestes d'alguns sòlids i d'altres.

▶ **Exercici 17**. Vegeu el problema 27 (pàgina 77) i el 43 de Pla (2018), p. 66. ◀

Les definicions. El llibre X conté tres grups de definicions. El primer, quatre; i el segon i el tercer, sis cada un.[70]

Les quatre primeres definicions.

Dx 1.1. Les magnituds[71] són «commensurables [en longitud]»[72] quan poden ser amidades amb una mateixa mesura,[73] i «incommensurables [en longitud]» quan no ho poden ser.

Dx 1.2. Els segments són «commensurables en potència»[74] quan els seus quadrats poden ser mesurats amb una mateixa àrea;[75]

68. Recordem que usem l'expressió «regular» quan Euclides diu «equilàter i equiangle». Vegeu Pla (2018), nota 781, p. 254.

69. És a dir, amb les arestes i els angles sòlids iguals.

70. Vegeu els paràgrafs A.2.1a_1, A.2.1a_2 i A.2.1a_3 (pàgines 212-213, 286-287 i 353-354, respectivament).

71. Sorprèn la manera general amb què Euclides s'expressa a Dx 1.1 ja que, de fet, dins del llibre, solament maneja segments i quadrats.

72. Usa l'expressió grega μήκει σύμμετρος.

73. Són les commensurables amb una magnitud $\mathfrak{A}$.

74. Usa l'expressió grega δυνάμει σύμμετρος.

75. Són les commensurables amb un quadrat AB^2 de costat AB.

i «incommensurables en potència» quan no ho poden ser.[76]

▶ **Exercici 18**. Demostreu la validesa o la falsedat de:

a) Si dos segments són commensurables en quadrat, ho són necessàriament en longitud.

b) Si dos segments són commensurables en longitud, ho són necessàriament en quadrat.

c) Hi ha una infinitat de segments commensurables amb un segment donat i una infinitat d'incommensurables, tant en longitud com en quadrat.

Exercici 19. Doneu alguns exemples de segments commensurables en longitud, i uns altres de commensurables en quadrat i incommensurables en longitud. ◀

Dx 1.3. Un segment és «assignat» [o «racional»][77] quan és commensurable [en longitud] i en quadrat, o solament en quadrat. Altrament, és «irracional». I també ho és el segment commensurable [en longitud o en quadrat] amb un [segment] racional.

Dx 1.4. El quadrat d'un segment [assignat o] racional és «racional», i totes les àrees que hi són commensurables també.

En canvi, les àrees incommensurables [en quadrat] són «irracionals» —ἄλογοι.[78] I també ho són els segments amb els quadrats equivalents a àrees irracionals (αἱ δυνάμεαι αὐτὰ).[79]

En síntesi, si u és una longitud donada, que fa d'unitat, i ℓ designa la longitud d'un segment, aleshores Dx 1.1 i 1.2 indiquen les situacions següents, respectivament: $\ell = q\,u$; i $\ell = \sqrt{q}\,u$, en què $q \in \mathbb{Q}$ és irreductible i no quadrat.

Donat el segment u, les superfícies commensurables amb u^2 són racionals. I les incommensurables, irracionals. Aquestes su-

76. Les anomenarem «commensurables en quadrat» i «incommensurables en quadrat».

77. El text grec diu: εὐθεῖα ῥετή, 'segment assignat', però nosaltres usarem el terme *racional* encara que actualment no té aquest sentit.

78. Les definicions són una mica confuses a causa de l'ús que fa del mot *racional* —ῥητός, 'expressable o assignat'— i de *irracional* —ἄλογος, 'sense raó'—, que hem d'entendre amb el sentit de ἄρρηθος, 'inexpressable'.

79. Aquest darrer concepte —el d'àrea irracional— permet treure una segona arrel quadrada.

perfícies poden ser quadrats o figures poligonals. En el primer cas, els seus costats també són racionals o irracionals, respectivament. En el segon cas, ho són els costats dels quadrats equivalents a elles. El concepte de racionalitat d'Euclides és més ampli que l'actual i, des del nostre punt de vista, sofistica el text.[80]

▶ **Exercici 20**. Doneu alguns exemples de segments i superfícies racionals i irracionals. ◀

Les proposicions.[81] De totes les proposicions val la pena distingir-ne aquestes:[82]

Ex 1. [El mètode d'exhaustió.][83] Donades dues magnituds diferents, si sostraiem més de la meitat a la primera i ho iterem també amb cada romanent, aleshores aconseguim una magnitud més petita que la segona, amb un nombre finit de passos.

Per Euclides, aquest mètode és d'una importància cabdal a l'hora d'establir els resultats de quadratures i «cubicatures».[84] I també ho és per entendre molts resultats d'Arquimedes.[85] A més, serà adoptat pels matemàtics àrabs i pels d'Occident fins a finals del segle XVI i començaments del XVII.

La demostració es basa en la definició Dv 4, que és equivalent. Com ja vam indicar,[86] és un postulat i, per tant, la demostració que ofereix Euclides d'Ex 1 està viciada d'arrel.

---

80. És a dir, si ρ és racional —vegeu la nota 77 (pàgina 22)—, els nombres racionals, $q\,\rho$, i els irracionals quadràtics, $\sqrt{q}\,\rho$, amb $q \in \mathbb{Q}$, també ho són.

81. Vegeu els paràgrafs A.2.1b_1, A.2.1b_2 i A.2.1b_3 (pàgines 213-286, 287-353 i 354-418), respectivament.

82. Per a l'anàlisi de les nou primeres proposicions, consulteu Caveing (1998), capítol IV, p. 189-262.

83. El terme *exhaustió* el va introduir Grégoire de Saint-Vincent l'any 1647.

84. Vegeu Exii 2, 5, 10, 11, 12 i 18 (pàgines 488, 501, 512, 516, 520 i 538, respectivament).

85. Val la pena recordar l'ús d'aquest mètode com a eina iterativa per a la determinació, cada cop més ajustada, del nombre π.

86. Pla (2018), nota 798, p. 266.

Les proposicions Ex 2 i Ex 3 són un calc de les aritmètiques Evii 1 i Evii 2, concretament, aplicades a les magnituds.[87]

Ara, però, aquest procediment es converteix en el mètode d'«antifèresi» (ανϑυφαίρεση)[88] —un procés anàleg al procés iteratiu de determinació del màxim comú divisor o algorisme d'Euclides. I és el fet que el procés s'acabi o que no ho faci allò que caracteritza la commensurabilitat o la incommensurabilitat de les magnituds.

Un cop ben establert aquest fet, Euclides analitza les propietats més importants de la commensurabilitat i, molt especialment, de la incommensurabilitat, en longitud i en potència:

Ex 5, 6, 7 i 8. La commensurabilitat de dues magnituds es pot caracteritzar segons que tinguin o no la mateixa raó que dos nombres [naturals]. Per tant, la incommensurabilitat no és mai reductible a un nombre racional. Aquí trobem, doncs, explicitada la «crisi epistemològica pitagòrica».[89]

Ex 9. La commensurabilitat en longitud implica la commensurabilitat en potència. Però, a l'inrevés, no sempre és així.[90]

Ex 10. Mitjançant un procediment donat, es pot construir una magnitud incommensurable en longitud amb una magnitud donada per endavant. I, mitjançant un altre, una magnitud incommensurable en potència amb una magnitud donada per endavant.[91] Aquesta proposició és, en realitat, un exercici.

Ex 12. Podem establir la transitivitat de la commensurabilitat.

▶ **Exercici 21**. Mostreu tres magnituds —segments rectilinis o superfícies— $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ i $\mathfrak{A}_3$, amb les parelles $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ i $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ incommensurables

87. Novament, ens trobem amb aquesta mena de divorci entre els nombres naturals i les magnituds.

88. Vegeu Caveing (1998), p. 112; o <http://archive.wikiwix.com/cache/?url=http%3A%2F%2Fddata.over-blog.com%2Fxxxyyy%2F2%2F78%2F40%2F05%2Fhistoire_des_maths%2Fgrece.pdf>, p. 12.

89. Pla (2016*b*), p. 97-99 i 110-117.

90. Vegeu l'exercici 18 (pàgina 22).

91. Euclides n'estableix, doncs, l'existència geomètrica.

i, en canvi, la parella $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3$ commensurable. Queda establert, doncs, que la incommensurabilitat no és transitiva. ◀

Ex 11 i Ex 13. Podem lligar la commensurabilitat i la incommensurabilitat amb la proporcionalitat.

En un lema,[92] Euclides exposa com podem construir el catet o la hipotenusa d'un triangle rectangle quan coneixem els altres dos costats.

Ex 15 i Ex 16. La commensurabilitat i la incommensurabilitat són compatibles amb la suma de magnituds: la suma de magnituds commensurables [incommensurables] és commensurable [incommensurable] amb cada una.[93]

▶ **Exercici 22**. D'Ex 15 i Ex 16 es dedueix que la diferència de dues magnituds commensurables és commensurable i la de dues magnituds incommensurables és incommensurable?

Què passa quan sumem una magnitud commensurable i una d'incommensurable?

Exercici 23. La suma i la diferència de dues magnituds commensurables amb una tercera també ho són.

En canvi, en el cas de la incommensurabilitat, això pot fallar.

Doneu un exemple concret en el qual falli i un altre en el qual es compleixi. ◀

Ex 17 i Ex 18. La condició necessària i suficient que fa que les arrels de l'equació quadràtica $a\,X - X^2 = \frac{1}{4}b^2$ siguin commensurables o incommensurables amb a és que el «discriminant» $\sqrt{a^2 - b^2}$ ho sigui.[94] Proposicions curioses que, en realitat, són un diorisma.

▶ **Exercici 24**. Proveu que la condició necessària i suficient perquè les arrels x_1, x_2 de l'equació quadràtica $a\,X - X^2 = \frac{1}{4}b^2$ siguin commensurables o incommensurables amb a és que el «discriminant» $\sqrt{a^2 - b^2}$ també ho sigui. ◀

92. Els *Elements* contenen quinze lemes, i nou es concentren en aquest llibre.

93. Vegeu Ex 15 i Ex 16 (pàgines 233 i 234).

94. Naturalment, Euclides usa la terminologia de l'aplicació d'àrees.

La pregunta interessant seria: per què es preocupa Euclides d'establir aquestes dues proposicions? La resposta, segons Boyer, és:

> Aquestes proposicions suggereixen que els grecs utilitzaven les «seves» solucions de les equacions quadràtiques [del tipus $a\,x - x^2 = b^2$] per resoldre també problemes *numèrics*, com feien els matemàtics babilònics per resoldre els sistemes $x + y = a$, $x\,y = b^2$.[95] Però[, per als grecs,] era molt interessant saber si les arrels es podien expressar racionalment —com a quocients de nombres naturals— o no.[96]

I aquest autor aporta, a més, una opinió digna d'atenció i, alhora, agosarada:[97]

> Un estudi minuciós de la matemàtica grega indica un interès pel càlcul i les aproximacions numèriques que va més enllà del que suggereixen els tractats clàssics existents.[98]

Ex 19 i Ex 21. Un rectangle format per costats racionals commensurables en longitud és «racional». Però, si els costats ho són només en quadrat, és «irracional».

A partir d'Ex 22, Euclides introdueix la classificació de les magnituds incommensurables irracionals.[99]

Els segments irracionals es classifiquen en tres grups: «medials», «binomials» i «apòtoms». Aquests noms provenen del fet següent: un segment medial, binomial o apòtom és la mitjana proporcional, aritmètica o harmònica de dos segments incommensurables en longitud.[100]

---

95. Pla (2016*a*), § 2.7.6, p. 204-207 i 212-214.

96. Boyer (1968), edició castellana del 1986, p. 160. Remet a Heath (1925), edició del 1956, volum III, p. 43-45.

97. No sembla que això hagi estat confirmat pels estudis posteriors.

98. Boyer (1968), edició castellana del 1986, p. 160.

99. Ens hem inspirat en Kayas (1978), volum II, p. XVII-XXI. Vegeu també les pàgines 42-46. Tanmateix, Vitrac (1998) n'ofereix un estudi realment important i molt acurat.

100. Pla (2020*a*), textos C 2.2m_1 i C 2.2m_2, p. 231 i 232. La triple classificació correspon, doncs, a la terna principal de mitjanes gregues.

Considerem el quadrat $\square\, ABCD$ de costat racional i portem la diagonal AC a AE, la prolongació de AB (figura 1.1). Atès que el costat AB i la diagonal $AC = AE$ són segments commensurables només en potència, la mitjana proporcional [o geomètrica] AH és un segment medial.[101] Ara portem el costat AD a AF damunt la prolongació de BA. Aleshores, el segment $FE = FA + AE = AD + AC$ és binomial i, en canvi, el segment $BE = AE - AB$ és apòtom.[102]

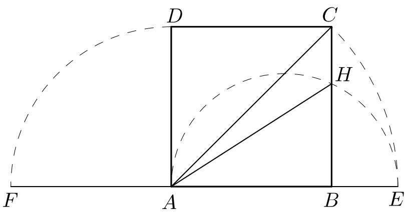


Figura 1.1. Els segments medials, binomials i apòtoms com a mitjanes proporcional, aritmètica, geomètrica i harmònica

D'antuvi, recordem que, en la proposició Ex 19, un rectangle de costats racionals i commensurables en longitud s'anomena «[rectangle] racional».

Tot seguit, Euclides introdueix la primera classe de segments irracionals: els «medials».

Taula 1.8. *Taula de la classificació dels segments segons Euclides*

$$\text{Segments: } \begin{cases} \text{racionals} & \begin{cases} \text{en longitud [i en potència]: } b\,q, \text{ amb } q \in \mathbb{Q} \\ \text{en potència solament: } b\sqrt{q}, \text{ amb } q \in \mathbb{Q} \end{cases} \\ \text{irracionals} & \begin{cases} \text{medials: } \rho\,\sqrt[4]{q}, \text{ amb } q \in \mathbb{Q} \text{ i } \rho \text{ racional} \\ \text{binomials: } (1+\sqrt{q})\,\rho, \text{ amb } q \in \mathbb{Q} \text{ i } \rho \text{ racional} \\ \text{apòtoms: } (1+\sqrt{q})\,\rho, \text{ amb } q \in \mathbb{Q} \text{ i } \rho \text{ racional} \end{cases} \end{cases}$$

Ex 21. Si els costats [racionals del rectangle] solament són commensurables en potència, el rectangle s'anomena *irracional.* I el costat del quadrat equivalent [a un rectangle irracional] també és [un «segment] irracional». Aquesta classe de segments s'anomena *segment medial* (μέση).[103]

101. Si $AB := \rho$, aleshores $AC = \sqrt{2}\,\rho$.

102. Si $AB := \rho$, aleshores $FE = \sqrt{2}\,\rho + \rho$ i $BE = \sqrt{2}\,\rho - \rho$.

103. L'adjectiu *medial* (μέση) prové del fet que el segment s'obté com a mitjana geomètrica. En conseqüència, si designem les línies racionals amb ρ i $\sqrt{q}\,\rho$, un segment medial és de la forma $\sqrt{\sqrt{q}\,\rho^2} = q^{\frac{1}{4}}\,\rho$.

▶ **Exercici 25**. Proveu que $\frac{1}{2}\,FE$ i $\frac{1}{\sqrt{2}}\,BE$ són, respectivament, la mitjana aritmètica i l'harmònica de AC i AD. [*Indicació.* Vegeu la figura 1.1.]

Exercici 26. *a*) Proveu la validesa del valor atribuït a un segment medial.
b) Òbviament, $\frac{\rho}{\rho\sqrt{q}} = \frac{\rho^2}{\rho^2\sqrt{q}}$. Deduïu la irracionalitat de $\rho^2\sqrt{q}$ i de la medial $\rho\, q^{\frac{1}{4}}$.
c) Si ho expressem amb la forma $\sqrt{\rho_1\sqrt{\rho_2}}$, cosa possible, quines limitacions s'han d'imposar a ρ_1 i ρ_2? ◀

Ex 24 i Ex 25. Un rectangle format per segments medials commensurables en longitud és racional medial. I si ho és en potència, racional o medial.

A continuació, Euclides determina les propietats dels segments i les àrees medials. I, curiosament, en aquest context dona l'algorisme d'obtenció de les ternes pitagòriques.[104] En concret, els lemes 1 i 2 que precedeixen la proposició Ex 29 proporcionen els algorismes que permeten trobar dos nombres (naturals) quadrats la suma dels quals és —o no és, respectivament— un nombre quadrat.[105]

Ex 36. El segment irracional anomenat *binomial*[106] és el que s'obté ajuntant-ne dos de racionals commensurables solament en potència. És a dir, si AB i BC són racionals i AB^2 i BC^2 són commensurables,[107] aleshores $AC = AB + BC$ és un «binomial».[108] I els sumands s'anomenen *monomis*.

▶ **Exercici 27**. Proveu que la forma algebraica d'un segment binomial indicada a la nota 108 és correcta. ◀

---

104. Pel seu contingut aritmètic, l'hauria d'haver proposat als llibres aritmètics. Si observem el detall de les demostracions (pàgines 253-257), veurem que solament li calen «elements» dels llibres I i II.

105. L'algorisme que trobem de manera implícita al Plimpton 322. Vegeu Pla (2016*a*), p. 249-257, en particular, la nota 464, p. 252.

106. En grec: καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων.

107. Això és el que entenem amb l'expressió «commensurables solament en potència».

108. L'expressió algebraica d'un segment binomial és: $(1+\sqrt{q})\,\rho$. Vegeu la taula 1.12 (pàgina 30).

Hi ha diverses menes de segments expressats en forma binomial que Euclides anomena *bimedials*. Són de la forma $AC = AB + BC$, amb les condicions de la taula 1.9.[109]

▶ **Exercici 28**. Si x, y, u i v són quatre magnituds, $x+y = u+v$, i u, v són més iguals entre si que x, y; aleshores $x^2 + y^2 > u^2 + v^2$. [*Indicació.* És el lema que precedeix la proposició Ex 42.]

Deduïu-ne que, en aquestes condicions, $2\,x\,y < 2\,u\,v$. [*Indicació.* Feu servir la proposició Eii 5. Vegeu Pla (2018).]

Taula 1.9. *Taula dels segments de la forma $AC = AB + BC$*

Nom	AB, BC	AB^2, BC^2	$AB^2 + BC^2$	$AB \times BC$	Prop.
Binomial[110]	Racionals	Comm.	—	—	Ex 36
Primer bimedial[111]	Medials	Comm.	—	Rac.	Ex 37
Segon bimedial[112]	Medials	Comm.	—	Medial	Ex 38
Segment major[113]	—	Incomm.	Rac.	Medial	Ex 39
—	—	Incomm.	Medial	Rac.	Ex 40
—	—	Incomm.	Medial	Medial, incomm. amb l'anterior	Ex 41

Exercici 29. La proposició Ex 42 estableix:

a) Si $a + \sqrt{\beta} = a' + \sqrt{\beta'}$, aleshores $a = a'$ i $\beta = \beta'$.

b) Si $\sqrt{a} + \sqrt{\beta} = \sqrt{a'} + \sqrt{\beta'}$, aleshores $a = a'$ i $\beta = \beta'$.

[*Indicació.* Quines condicions cal imposar a a i β en cada cas?] ◀

Taula 1.10. *Taula dels segments binomials $\gamma = a + \beta$*

Espècie	a, Δ	a	β	Def. i prop.
Primera	Comm.	Comm. amb ρ	—	Dx 2.1 i Ex 48
Segona	Comm.	—	Comm. amb ρ	Dx 2.2 i Ex 49
Tercera	Comm.	Incomm. amb ρ	Incomm. amb ρ	Dx 2.3 i Ex 50
Quarta	Incomm.	Comm. amb ρ	—	Dx 2.4 i Ex 51
Cinquena	Incomm.	—	Comm. amb ρ	Dx 2.5 i Ex 52
Sisena	Incomm.	Incomm. amb ρ	Incomm. amb ρ	Dx 2.6 i Ex 53

109. A la taula hi incloem el segment binomial per tal que quedi clar.
110. Diu: καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων.
111. Diu: καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτην.
112. Diu: καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέραν.
113. Diu: καλείσθω δὲ μείζων.

El segon grup de definicions —dels segments *binomials* (δύο ὀνομάτων)— el concep així: partim d'un segment racional ρ i d'un binomi format per dos monomis $\alpha := AB$ i $\beta := BC$, amb $\alpha > \beta$, tots dos racionals i commensurables en potència; i considerem $\gamma := AC$, o sigui, $\gamma = \alpha + \beta$ i $\Delta = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$. Ara tot depèn del fet que γ i Δ siguin commensurables o no.

Finalment, els segments irracionals que s'obtenen per diferència de dos altres segments s'anomenen *apòtoms* (ἀποτομή). Són de la forma $\varphi = \alpha - \beta$, amb $\alpha > \beta$. Abans d'introduir les darreres definicions, Euclides proporciona una classificació dels apòtoms en la mateixa línia de la taula 1.10. Són les proposicions Ex 73, 74, 75, 76, 77 i 78.

▶ **Exercici 30**. Sabríeu refer la taula 1.10 pensant en els apòtoms? ◀

TAULA 1.11. *Taula de les construccions dels segments dels grups segon i tercer*

Suma		Resta	
Ex 36	binomial	Ex 73	apòtom
Ex 37	binomial primer	Ex 74	apòtom primer d'una medial
Ex 38	binomial segon	Ex 75	apòtom segon d'una medial
Ex 39	major	Ex 76	menor
Ex 40	segment racional i medial	Ex 77	segment que, amb un de racional, fa un total medial
Ex 41	segment irracional costat d'un quadrat suma de dos medials	Ex 78	segment que, amb un de medial, fa un total medial

De fet, les proposicions Ex 36, 37, 38, 39, 40 i 41, i 73, 74, 75, 76, 77 i 78 proporcionen els nombres biquadrats, que podem aplegar en l'expressió:

$$\sqrt{\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha - \beta}} \pm \sqrt{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha - \beta}} \right). \quad (1.1)$$

Els dotze casos s'obtenen quan es consideren els signes $\pm$ segons que α, β, o ni α ni β, siguin quadrats perfectes, i α i $\alpha - \beta$ siguin commensurables o no.[114]

114. HEATH (1921), volum I, p. 409, ofereix una anàlisi més extensa.

Taula 1.12. *Classificació dels segments irracionals del llibre* x

Proposició	Nom del segment irracional	Valor algebraic
(1) $\begin{cases}\text{Ex 36}\\ \text{Ex 73}\end{cases}$	binomial apòtom	$\begin{cases}1+\sqrt{q}\\ 1-\sqrt{q}\end{cases}$
(2) $\begin{cases}\text{Ex 37}\\ \text{Ex 74}\end{cases}$	primer bimedial primer apòtom	$\begin{cases}\sqrt[4]{q}+\sqrt[4]{q^3}\\ \sqrt[4]{q}-\sqrt[4]{q^3}\end{cases}$
(3) $\begin{cases}\text{Ex 38}\\ \text{Ex 75}\end{cases}$	segon bimedial segon apòtom	$\begin{cases}\sqrt[4]{q}+\frac{\sqrt{q'}}{\sqrt[4]{q}}\\ \sqrt[4]{q}-\frac{\sqrt{q'}}{\sqrt[4]{q}}\end{cases}$
(4) $\begin{cases}\text{Ex 39}\\ \text{Ex 76}\end{cases}$	major menor	$\begin{cases}\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{q}{\sqrt{1+q^2}})}+\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{q}{\sqrt{1+q^2}})}\\ \sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{q}{\sqrt{1+q^2}})}+\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{q}{\sqrt{1+q^2}})}\end{cases}$
(5) $\begin{cases}\text{Ex 40}\\ \text{Ex 77}\end{cases}$	arrel quadrada d'una àrea més una medial segment que amb una àrea racional determina una àrea medial	$\begin{cases}\sqrt{\frac{\sqrt{1+q^2}+q}{2\,(1+q^2)}}+\sqrt{\frac{\sqrt{1+q^2}-q}{2\,(1+q^2)}}\\ \sqrt{\frac{\sqrt{1+q^2}+q}{2\,(1+q^2)}}-\sqrt{\frac{\sqrt{1+q^2}-q}{2\,(1+q^2)}}\end{cases}$
(6) $\begin{cases}\text{Ex 41}\\ \text{Ex 78}\end{cases}$	arrel quadrada de la suma de dues àrees medials segment que amb una àrea medial determina una àrea medial	$\begin{cases}\sqrt[4]{q'}\,\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{q}{\sqrt{1+q^2}})}+\sqrt[4]{q'}\,\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{q}{\sqrt{1+q^2}})}\\ \sqrt[4]{q'}\,\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{q}{\sqrt{1+q^2}})}-\sqrt[4]{q'}\,\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{q}{\sqrt{1+q^2}})}\end{cases}$

Les equacions biquadrades corresponents a les parelles de segments irracionals són:

(1) $x^4-2\,(1+q)\,x^2+(1-q)^2=0.$

(2) $x^4-2\,\sqrt{q}\,(1+q)\,x^2+q\,(1-q)^2=0.$

(3) $x^4-2\,\frac{q+q'}{\sqrt{q}}\,x^2+\frac{(q-q')^2}{q}=0.$

(4) $x^4-2\,x^2+\frac{q^2}{1+q^2}=0.$

(5) $x^4-\frac{2}{\sqrt{1+q^2}}\,x^2+\frac{q^2}{(1+q^2)^2}=0.$

(6) $x^4-2\,\sqrt{q'}\,u^2\,x^2+\frac{q'\,q^2}{1+q^2}\,u^4=0.$

Els nombres q i q' són racionals i els hem referit a un segment $u:=1$.

▶ **Exercici 31**. L'expressió (1.1) és una identitat? Quines són les dotze classes de nombres biquadrats possibles? ◀

A la taula 1.12 hi ha les expressions algebraiques del segments irracionals estudiats de Ex 36 a Ex 41 i d'Ex 73 a Ex 78, i les quàrtiques de les quals les parelles són les arrels positives.

Finalment, Euclides considera $\mathit{\Delta} := \sqrt{a^2 - \beta^2}$ i usa la mateixa metodologia de la classificació dels segments binomials. Ho fa al tercer grup de definicions Dx 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 i 3.6, i en les proposicions Ex 85, 86, 87, 88, 89 i 90.

▶ **Exercici 32**. Feu la taula que correspon als sis apòtoms. [*Indicació*. Distingiu els casos en els quals $\mathit{\Delta}$ i ρ són commensurables, i en els quals no ho són.] ◀

La taula 1.13 ofereix una síntesi de la complexitat del llibre:

Taula 1.13. *Taula de síntesi del llibre x*

	Suma	Resta
Construcció de la classe	Ex 36 a Ex 41	Ex 73 a Ex 78
Unicitat dels components	Ex 42 a Ex 47	Ex 79 a Ex 84
Construcció de les sis subclasses	Ex 48 a Ex 53	Ex 85 a Ex 90
Primera relació de les sis classes i les sis subclasses	Ex 54 a Ex 59	Ex 91 a Ex 96
Segona relació de les sis classes i les sis subclasses	Ex 60 a Ex 65	Ex 97 a Ex 102
Estabilitat de la classe sota la commensurabilitat	Ex 66 a Ex 70	Ex 103 a Ex 107

La dependència dels «elements» precedents respecte de les proposicions es troba a la taula 1.14:

Taula 1.14. *Els «elements» de les proposicions del llibre x*

Ex	D	P	Nc	E	
	1	v 4	—	—	
	2	x 1	—	—	v 1, 5 x 1
	3	—	—	—	v 1, 5 x 2
	4	x 1	—	—	x 3 i 3 p.
	5	v 1, 5	—	—	v 22 vii 7 p., 20

Taula 1.14. *Els «elements» de les proposicions del llibre* x (continuació)

Ex	D	P	Nc	E	
	6	V 2, 5 VII 2, 3, 20 X 1	—	—	V 7 p., 9, 11, 22
	7	—	—	—	X 6
	8	—	—	—	X 5
	9	—	—	1	VI 20 p. VIII 11 X 5, 6
	10	V 9 X 1.2	—	—	VI 13 X 5, 6 i 6 p., 9
	11	—	—	1	X 5, 6, 7, 8
	12		—	—	V 11, 22 VIII 4 X 5, 6
	13		—	—	X 12
	14	—	—	—	V 7 i 7 p., 17, 22 VI 22 X 11
	15	X 1.1	—	—	—
	16	X 1.1	—	—	X 1
	17	—	—	2	I 3, 10 II 4, 5 X 6, 12, 15, 17 l.
	18	—	—	—	X 6, 13, 16
	19	I 22 X 1.4	—	—	VI 11 X 11
	20	X 1.3, 1.4	—	—	I 46 V 7 VI 1 X 11
	21	X 1.3, 1.4	—	—	VI 1 X 11
	22	—	—	1	VI 14, 22 X 4, 11, 13, 21, 22 l.
	23	X 1.3	—	1	VI 1, 13, 17, 20 X 11, 13, 21, 22 l.
	24	—	—	—	I 46 VI 1 X 11, 12, 23 p.

TAULA 1.14. *Els «elements» de les proposicions del llibre x* (continuació)

Ex	D	P	Nc	E
25	x 1.3, 1.4	—	1	I 14, 46 V 1, 7, 11 VI 1, 13, 17 X 11, 19, 21, 22
26	x 1.4	—	—	II 4 VI 13, 17, 25 X 4, 6, 11, 13, 20, 22
27	—	—	—	V 11, 16 VI 12, 13, 17, 25 X 11, 21, 23
28	—	—	—	V 16 VI 12, 13, 16, 17 X 11, 21, 23
29 l. I	VII 6	—	—	II 6 IX 1, 24, 26
29 l. II	VII 6	—	1, 3, 5′	II 6 X 29 l. I
29	x 1.4	3	—	I 4, 47 III 31 V 19 p. IX 11, 24, 26 X 6 p., 9, 29 l. I
30	—	1	—	I 47 III 31 V 19 p. X 9, 29 l. II
31	x 1.4	—	—	I 47 V 7 VI 12, 17 X 11, 14, 21 i 21 l., 29, 30
32	x 1.4	—	—	VI 13, 17 X 10, 11, 14, 21 i 21 l., 23, 29
33	x 1.3	1, 3, 5	1	I 47 VI 1, 28 X 6, 11, 18, 21, 23 p., 30, 32 l.
34	x 1.4	—	—	I 47 III 31 VI 28 X 6, 11, 18, 31, 32 l., 33

TAULA 1.14. *Els «elements» de les proposicions del llibre* x (continuació)

Ex	D	P	Nc	E
35	—	3	1	I 47 III 31 X 11, 13, 18, 32 i 32 l.
36	X 1.4	—	—	II 4 VI 1 X 6, 11, 13, 15, 16
37	X 1.4	—	—	II 4 X 16
38	X 1.4	—	—	I 44 II 4 VI 1 X 6, 11, 13, 15, 20, 21 l., 22, 23, 28, 36
39	X 1.4	—	—	II 4 X 6, 16, 32 p., 33
40	X 1.4	—	—	X 16, 34
41	X 1.4	—	—	II 4 VI 1 X 11, 22, 35, 36
42	—	—	—	II 4 X 21, 26, 36
43	—	—	—	X 26, 37, 41 l.
44	—	—	—	II 4, 7 VI 1, 12, 16 X 6, 11, 13, 15, 21 l., 22, 36, 38, 41 l., 42, 59
45	—	—	—	X 26, 30
46	—	—	—	X 26, 40
47	X 1.3	—	—	II 4 VI 1, 12, 16 X 11, 22, 36, 41, 42
48	X 1.3, 2.1	—	—	V 14, 19 p. X 6 i 6 p., 9, 29 l. I, 36
49	X 1.3, 2.2	—	—	V 14, 19 p. X 6 i 6 p., 9, 29 l. I, 36
50	X 1.3, 2.3	—	1	V 14, 19 p., 22 X 6 i 6 p., 9, 36
51	X 1.3, 2.4	—	1	V 14, 19 p. X 6 i 6 p., 9, 29 ls., 36

Taula 1.14. *Els «elements» de les proposicions del llibre x* (continuació)

Ex	D	P	Nc	E
52	x 2.5	—	1	v 7 p., 14, 19 p. x 6 i 6 p., 36, 38 l.
53	x 1.3, 2.6	—	1	v 14, 19 p., 22 x 6 i 6 p., 9, 28 ls., 36
54	x 1.3, 1.4, 2.1	5	2	i 10, 14, 31, 43 ii 14 vi 1, 17, 28 x 11, 12, 13, 15, 17, 19, 36, 42, 48, 53 l.
55	x 2.2	5	—	i 10, 14, 31 ii 14 vi 1, 28 x 11, 12, 13, 15, 17, 19, 21, 23 l., 37, 42, 49, 53 l.
56	x 2.3	—	—	x 13, 21, 38, 42, 50, 55
57	x 1.2, 2.4	—	—	i 10, 31 ii 14 vi 1, 28 x 11, 13, 18, 19, 21, 39, 42, 51
58	x 1.2, 2.5	—	—	vi 1 x 11, 12, 13, 18, 19, 21, 40, 42, 52
59	x 1.2, 2.6	—	—	vi 1 x 11, 13, 21, 42, 53
60	x 1.4, 2.1	—	4′	i 10, 31 ii 4, 14 v 7, 14 vi 1, 12, 17 x 9 l., 11, 13, 15, 17, 20, 22, 36, 42
61	x 2.2	—	—	vi 1, 12 x 10 l., 11, 13, 15, 17, 20, 22, 36, 37, 59
62	x 2.3	—	—	vi 1, 12 x 10 l., 11, 12, 13, 15, 17, 21 l., 23 p., 36, 38
63	x 2.4	—	—	vi 1, 12 x 10 l., 11, 13, 18, 20, 22, 36, 39
64	x 2.5	—	—	x 13, 18, 20, 22, 36, 40, 63

Taula 1.14. *Els «elements» de les proposicions del llibre* x (continuació)

Ex	D	P	Nc	E
65	x 2.6	—	—	ii 4 x 11, 18, 22, 36, 44
66	x 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6	—	—	vi 11, 12, 16 x 11, 12, 13, 14, 36
67	—	—	—	v 16 vi 12 x 11, 21 l., 23, 37, 38
68	—	—	—	v 11, 16, 18 vi 12 x 11, 21 l., 23, 37, 38
69	—	—	—	x 40
70	—	—	—	x 41
71	x 1.3, 2.1, 2.2, 2.4, 2.5	—	—	v 14, 24 vi 1, 12 x 3, 11, 20, 22, 54, 55, 57, 58
72	x 1.3, 2.2, 2.6	—	—	vi 1 x 11, 22, 36, 56, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65
73	x 1.4	—	—	ii 7 vi 1 x 6, 8, 11, 13, 15, 16, 21
74	x 1.4	—	—	ii 7 x 16, 27
75	x 1.3, 1.4	—	—	ii 7 vi 1, 12 x 6, 11, 13, 15, 20, 22, 23 p., 24 l., 28, 74
76	x 1.4	—	—	ii 7 x 13, 16
77	x 1.4	—	—	ii 7 x 16, 34
78	—	—	—	ii 7 vi 1 x 11, 20, 22, 35, 73
79	—	—	—	ii 7 x 21, 26, 73, 74
80	—	—	—	ii 7 x 26, 74

TAULA 1.14. *Els «elements» de les proposicions del llibre* X (continuació)

Ex	D	P	Nc	E
81	—	—	—	II 7 VI 1 X 6, 11, 13, 15, 21, 22, 23 i 23 p., 73, 75, 79
82	—	—	—	I 2 i 3 II 7 X 26, 75, 76
83	—	—	—	I 2 i 3 II 7 X 26, 77
84	X 1.4	—	—	I 2 i 3, 22, 23 p. II 7 VI 1 X 11, 73, 78, 77
85	X 1.3, 3.1	—	—	V 17, 19 p. X 6 i 6 p., 9, 13 l., 29 ls., 73
86	X 1.3, 1.4, 3.2 VII 18	—	—	V 19 p. X 6 i 6 p., 9, 13 l., 29 ls., 73
87	X 1.3, 1.4, 3.3	—	1	V 19 p., 22 X 6 i 6 p., 9, 13 l., 73
88	X 1.3, 1.4, 3.4	—	1	V 19 p. X 5, 9, 13 l., 16 i 16 p., 73
89	X 1.3, 1.4, 3.5	—	—	V 19 p. X 5, 6 i 6 p., 9, 13 l., 19, 73
90	X 1.3, 1.4, 3.6	—	—	V 7, 19 p., 22 X 6 i 6 p., 9, 13 l., 19, 73
91	X 3.1	—	—	I 10, 31, 43 II 5 V 11 VI 1, 11, 17, 28 X 12, 13, 15, 17, 19, 21, 26, 53 l., 73, 80
92	X 3.2	5	—	I 11, 43 V 11 VI 1, 13, 26 X 11, 13, 15, 17, 19, 21, 53 l., 71, 73

TAULA 1.14. *Els «elements» de les proposicions del llibre* x (continuació)

Ex	D	P	Nc	E
93	x 1.3, 1.4, 3.3	5	—	II 13 V 11 VI 1, 13, 26 X 11, 13, 15, 17, 21, 53 l., 73, 75
94	x 3.4	5	—	I 10, 31, 43 II 14 VI 1, 11, 17, 26 X 11, 18, 19, 21, 73, 76
95	x 3.5	5	—	I 10 II 14 VI 26 X 18, 19, 21, 73, 77
96	x 3.6	5	—	I 11 II 14 VI 1, 26 X 11, 18, 21, 73, 78
97	x 1.1, 3.1, 3.5	—	1, 6′	I 11, 31 II 7, 14 V 17 VI 1, 17 X 11, 17, 20, 21 l., 22, 73, 77
98	x 1.4, 3.2	—	2	I 11, 31 II 7, 14 V 11, 17 VI 1, 17 X 11, 15, 17, 20, 21 l., 22, 23 p., 73, 74
99	x 1.1, 1.2, 3.3	—	6′	I 1, 17 II 4, 7, 14 V 11, 17 VI 1, 17 X 11, 13, 15, 17, 21 l., 22, 23 p., 73, 75
100	x 1.1, 1.3, 1.4, 3.4	—	2, 6′	I 11, 31 II 7, 14 V 17 VI 1, 17 X 11, 18, 20, 22, 73, 76

Taula 1.14. *Els «elements» de les proposicions del llibre* x (continuació)

Ex	D	P	Nc	E
101	1.4, 3.5	—	6′	I 11, 31 II 7, 14 VI 1 X 11, 18, 20, 22, 77
102	V 5 X 1.2, 3.6	—	6′	I 11, 31 II 7, 14 V 17 VI 1 X 11, 18, 21 l., 22, 78
103	X 1.1, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4.3.5, 3.6	—	—	V 12 VI 12 X 11, 12, 13, 14, 73
104	X 1.4	—	—	V 12, 16 VI 12 X 10 l., 11, 23 i 23 p., 74, 75
105	X 1.4	—	1	V 12, 16, 18 VI 22 X 11, 13, 21, 23 p., 76, 104
106	—	—	1	X 77
107	—	—	1	X 78
108	X 3.1	—	3	VI 17 X 13, 14, 20, 22, 91, 94
109	X 2.2, 2.5	—	3	VI 17 X 13, 73, 92, 95
110	X 3.3, 3.6	—	—	VI 1 X 11, 22, 73, 93, 96
111	X 2.6	—	—	VI 17 X 12, 13, 15, 60, 73, 97
112	X 1.3, 1.4, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6	2	—	I 2, 3 V 6, 7, 11, 12, 14, 17 VI 16, 17, 22 X 11, 12, 14, 15, 20, 36
113	X 1.1, 1.3, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6	2	—	I 2, 3 V 7, 9, 11, 14, 16, 19 p. VI 16, 17 X 11, 12, 13, 14, 15, 16, 20, 36, 73

Taula 1.14. *Els «elements» de les proposicions del llibre* x (continuació)

Ex	D	P	Nc	E
114	v 1; x 1.1, 1.3	—	1	i 2, 3; v 12, 13, 19; vi 1, 8 p., 13, 17; x 11, 12, 112
115	x 1.4	—	1	i 2, 3; vi 17; x 20

Creiem que la seva complexitat aconsella una síntesi detallada dels continguts d'aquest llibre tan especial i complex.[115]

Taula 1.15. *Síntesi del llibre* x

1. Un «segment medial» és el costat d'un quadrat equivalent a un rectangle irracional [Ex 22].[116]
   El rectangle de costats medials commensurables en longitud és una àrea «medial» [Ex 24].
   En canvi, si els costats són commensurables [només] en quadrat, l'àrea pot ser «racional» o «medial» [Ex 25].
2. Els «segments binomials» resulten de sumar dos segments racionals commensurables només en quadrat [Ex 36], és a dir, de la forma $AC = AB + BC$ amb AB i BC racionals, i AB^2 i BC^2 commensurables. Els segments AB i BC s'anomenen *monomis.*

   De segments binomials n'hi ha de cinc classes diferents:
   a) «Binomial de primera classe». S'obté sumant dos monomis medials. És a dir, és de la forma $AC = AB + BC$ en què AB i BC són medials, els quadrats AB^2 i BC^2, commensurables, i el rectangle de costats AB i BC, racional [Ex 37].
   b) «Binomial de segona classe». S'obté sumant dos monomis medials. És a dir, és de la forma $AC = AB + BC$ en què AB i BC són medials, els quadrats AB^2 i BC^2, commensurables, i el rectangle de costats AB i BC, medial [Ex 38].

115. Recordem que les formes algebraiques es troben a la taula 1.12.
116. Vegeu Ex 21 (pàgina 27). Per tant, és la mitjana geomètrica dels costats del rectangle irracional.

Taula 1.15. *Síntesi del llibre x* (continuació)

- *c*) «Major». S'obté com abans, però ara AB^2 i BC^2 són incommensurables, la seva suma, racional, i el rectangle, medial [Ex 39].
- *d*) «Binomi capaç d'una suma que és àrea medial i d'un rectangle racional». Els quadrats AB^2 i BC^2 són incommensurables de suma medial i el rectangle és racional [Ex 40].
- *e*) «Binomi capaç d'una suma de dues àrees medial». Els quadrats AB^2 i BC^2 són incommensurables de suma medial, i el rectangle és racional i incommensurable amb la suma dels quadrats [Ex 41].

3. El segon grup de definicions (pàgina 30) parteix d'un segment racional u i d'un binomial dividit en els monomis A i B amb $A > B$, tots dos racionals i amb quadrats commensurables. Aquests binomis, de la forma $C = A + B$, es classifiquen d'acord amb la commensurabilitat o incommensurabilitat de A i del discriminant $\sqrt{A^2 - B^2}$.

   En el primer cas, C és:

   - *a*) «Un segment binomial de primera classe». El monomi més gran A és commensurable en longitud amb u [Dx 2.1 i Ex 48].
   - *b*) «Un segment binomial de segona classe». El monomi més petit B és commensurable en longitud amb u [Dx 2.2 i Ex 49].
   - *c*) «Un segment binomial de tercera classe». Ni A ni B són commensurables en longitud amb u [Dx 2.3 i Ex 50].

   En el segon cas, C és:

   - *a*) «Un segment binomial de quarta classe». El monomi més gran A és commensurable en longitud amb u [Dx 2.4 i Ex 51].
   - *b*) «Un segment binomial de cinquena classe». El monomi més petit B és commensurable en longitud amb u [Dx 2.5 i Ex 52].
   - *c*) «Un segment binomial de sisena classe». Ni A ni B són commensurables en longitud amb u [Dx 2.6 i Ex 53].

TAULA 1.15. *Síntesi del llibre x*
(continuació)

4. Els segments irracionals formats per sostracció de dos segments son «apòtoms» de la forma $AC = AB - BC$ (amb $AB > BC$). I es classifiquen així:
   a) «Apòtom». És el cas en què els monomis AB i BC són racionals i els quadrats AB^2 i BC^2, commensurables [Ex 73].
   b) «Apòtom de medial de primera classe». És el cas en què els monomis AB i BC són medials; els quadrats AB^2 i BC^2, commensurables, i el rectangle de costats AB i BC, racional [Ex 74].
   c) «Apòtom de medial de segona classe». És el cas en què els monomis AB i BC són medials, i els quadrats AB^2 i BC^2 i el rectangle de costats AB i BC, medials [Ex 75].
   d) «Menor». És el cas en què els monomis AB i BC són de tal manera que AB^2 i BC^2 són incommensurables; la suma dels quadrats AB^2 i BC^2, racional, i el rectangle de costats AB i BC, medial [Ex 76].
   e) «Segment format per una àrea racional i una àrea total medial». És el cas en què els monomis AB i BC són de tal manera que AB^2 i BC^2 són incommensurables; la suma dels quadrats AB^2 i BC^2, medial, i el rectangle de costats AB i BC, racional [Ex 77].
   f) «Segment format per una àrea medial i una àrea total medial». És el cas en què els monomis AB i BC són de tal manera que AB^2 i BC^2 són incommensurables; la suma dels quadrats AB^2 i BC^2, medial, i el rectangle de costats AB i BC, medial i incommensurable amb la suma de quadrats AB^2 i BC^2 [Ex 78].
5. El tercer grup de definicions distingeix sis noves classes d'apòtoms. S'hi considera un segment racional u i un apòtom $BC = AB - AC$, amb $AB > AC$. I es classifiquen segons que el discriminant $\Delta = \sqrt{AB^2 - AC^2}$ sigui commensurable o incommensurable amb u.

   En el primer cas, tenim tres possibilitats per a BC:
   a) «Apòtom de primera classe». Quan el monomi més gran AB és commensurable en longitud amb u [Dx 3.1 i Ex 85].

TAULA 1.15. *Síntesi del llibre x* (continuació)

b) «Apòtom de segona classe». Quan el monomi més petit AC és commensurable en longitud amb u [Dx 3.2 i Ex 86].

c) «Apòtom de tercera classe». Quan ni AB ni AC són commensurables en longitud amb u [Dx 3.3 i Ex 87].

En el segon cas, tenim tres possibilitats per a BC:

d) «Apòtom de quarta classe». Quan el monomi més gran AB és commensurable en longitud amb u [Dx 3.4 i Ex 88].

e) «Apòtom de cinquena classe». Quan el monomi més petit AC és commensurable en longitud amb u [Dx 3.5 i Ex 89].

f) «Apòtom de sisena classe». Quan ni AB ni AC són commensurables en longitud amb u [Dx 3.6 i Ex 90].

En tots els casos, el segment AB és el segment total, i AC el «component», «terme» o «annex».

Si seguim la proposta algebraica de Heath,[117] molt clara i comprensible, resulta que «tots aquests segments irracionals es poden considerar solucions d'equacions de segon grau o de biquadrades que es descomponen en dues de segon grau».

En efecte, les equacions

$$x^2 \pm 2\,a\,x\,u \pm b\,u^2 = 0$$

tenen les solucions de la forma (1):

$$\begin{aligned} x_1 &= u\,(a + \sqrt{a^2 - b}), \quad & x_3 &= u\,(a - \sqrt{a^2 - b}), \\ x_2 &= u\,(\sqrt{a^2 + b} + a), \quad & x_4 &= u\,(\sqrt{a^2 + b} - a), \end{aligned}$$

en què u és el segment racional que prenem com a segment unitat $[u = 1, u^2 = 1]$, sempre respectant la dimensionalitat de les expressions.

117. HEATH (1925), volum III, p. 5-9.

Taula 1.15. *Síntesi del llibre x*
(continuació)

Aleshores, podem classificar les solucions x_1, x_2, x_3 i x_4 d'acord amb els valors i les relacions entre els coeficients a i b:

— Si els coeficients a i b són nombres enters o racionals, el coeficient b pot tenir la forma $a^2 \frac{m^2}{n^2}$. En aquest cas:

x_1 és un nombre binomial de primera classe [una suma],
x_3 és un nombre apòtom de primera classe [una resta].

I, a més, a^2 excedeix $a^2 - b$ —que és el quadrat de $\varDelta = \sqrt{a^2 - b}$— un quadrat construït sobre un segment commensurable en longitud amb el segment a [o au].

Però, si b no és de la forma $a^2 \frac{m^2}{n^2}$, aleshores:

x_1 és un nombre binomial de quarta classe i
x_3 és un nombre apòtom de quarta classe.

Pel que fa referència a les altres dues arrels x_2 i x_4, el coeficient b pot ser de la forma $a^2 \frac{m^2}{m^2-n^2}$, és a dir, el quadrat de $\varDelta$ excedeix el quadrat de a el quadrat d'un segment commensurable en longitud amb $\varDelta$. En aquest cas:

x_2 és un nombre binomial de segona classe i
x_4 és un nombre apòtom de quarta classe.

Però, si b no és de la forma $a^2 \frac{m^2}{n^2}$, aleshores:

x_2 és un nombre binomial de cinquena classe i
x_4 és un nombre apòtom de cinquena classe.

— Si el coeficient a té la forma $\sqrt{q}$, amb $q = \frac{m}{n}$, i m i n enters, aleshores les arrels (1) prenen la forma (2):

$$x_1 = u\,(\sqrt{q} + \sqrt{q-b}), \quad x_3 = u\,(\sqrt{q} - \sqrt{q-b}),$$
$$x_2 = u\,(\sqrt{q+b} + \sqrt{q}), \quad x_4 = u\,(\sqrt{q+b} - \sqrt{q}).$$

Si $q - b$ no és un quadrat perfecte, b és de la forma $\frac{m^2}{n^2}$. En aquest cas:

x_1 és un nombre binomial de tercera classe i
x_3 és un nombre apòtom de tercera classe.

TAULA 1.15. *Síntesi del llibre x* (continuació)

Però, si b no és de la forma $\frac{m^2}{n^2}$, aleshores:

x_1 és un nombre binomial de sisena classe i
x_3 és un nombre apòtom de sisena classe.

Les altres dues arrels x_2 i x_4 prenen la forma dels binomials i apòtoms de tercera i sisena classe segons que b prengui la forma $\frac{m^2}{m^2-n^2}$ o no.

D'aquesta manera, hem aconseguit dotze classes de nombres irracionals relatives a u. I, si els multipliquem per u i els traiem l'arrel quadrada, n'obtenim unes altres dotze, concretament, les arrels de les equacions:

$$x^4 \pm 2\,a\,u^2\,x^2 \pm b\,u^4 = 0.$$

Ordenadament són:

1) El segment binomial i
l'apòtom.

2) El bimedial de primera classe i
l'apòtom d'un medial de primera classe.

3) El bimedial de segona classe i
l'apòtom d'un medial de segona classe.

4) El segment major i
el segment menor.

5) El «costat» del quadrat equivalent a la suma
d'una àrea racional i una medial, i
el «costat» del quadrat equivalent a la diferència
d'una àrea racional i una medial.

6) El «costat» del quadrat equivalent a la suma
de dues àrees medials i
el «costat» del quadrat equivalent a la diferència
de dues àrees medials.

Així hem determinat vint-i-quatre classes disjuntes de segments irracionals (dotze binomials de la forma $x + y$ i dotze apòtoms de la forma $x - y$, en què x i y designen els monomis que cal sumar o restar) [Ex 112 a 114].

Per a acabar, també hem d'esmentar els nombres «medials», que són infinits en nombre [Ex 115].

1.3 La geometria de l'espai: Exi

El contingut d'aquest llibre s'atribueix a l'Escola d'Atenes —en particular, a l'Acadèmia de Plató. Com ja vam veure,[118] l'«estereometria» era una de les disciplines que havia de conèixer qui pretenia dirigir l'Estat.

Llibre xi. *La geometria de l'espai o estereometria*

Aquest llibre ofereix vint-i-vuit definicions —algunes força discutibles—, que cobreixen l'àmbit dels tres darrers llibres, i trenta-nou proposicions.[119]

Les definicions.[120] Les dues primeres definicions fan referència als conceptes de «línia», «figura» i «extrem» [Di 2, 5 i 6] del llibre i.

Dxi 1. Un *sòlid* (στερεόν)[121] és tot allò que té *longitud* (μῆκος), *amplada* (πλάτος) i *profunditat* (βάθος).[122]

Dxi 2. L'*extrem* d'un sòlid és una *superfície* (ἐπιφάνεια).[123]

118. Pla (2016*b*), C 7c_2, p. 544-545.

119. Vegeu A.3 (pàgines 419-485) i també la nota 790 (pàgina 420).

120. Vegeu A.3*a* (pàgines 420-424).

121. És curiós que usi aquest terme vinculat a l'òptica: «opac», «que no deixa passar la llum», aplicat a un sòlid ja que queda clos entre superfícies (ἐπιφάνεια, 'aparició'). Esdevé allò que es veu per damunt, com un feix lluminós.

122. De manera implícita, Euclides adopta la idea d'Aristòtil (1997), 268a, llibre i, p. 710: «Un cos (σόμα) [és una magnitud que] té tres dimensions.» Evita, però, el terme *dimensions*, que Aristòtil no defineix, i n'esmenta els tipus. Vegeu també Aristòtil (2000), 1060b 15, edició castellana, p. 431-432, i 1066b 23, edició castellana, p. 457: «Que l'infinit no existeix en les coses sensibles és obvi per la raó següent: Si la definició de cos és "cosa limitada per superfícies (ἐπιπέδοις)", no hi pot haver cap cos infinit, ni sensible ni intel·ligible, ni tampoc cap nombre separat i infinit, perquè el nombre i el que participa del nombre és mesurable.»

123. Els sòlids són magnituds de tres dimensions limitades. Vegeu la nota 793 (pàgina 420).

Les definicions Dxi 3 i Dxi 4 estableixen quan són perpendiculars a un pla[124] un segment rectilini o un pla.[125]

Dxi 3. Un segment rectilini que incideix en un pla és *perpendicular al pla* quan ho és a tots els segments rectilinis del pla que talla.[126]

Dxi 4. Un pla és *perpendicular a un altre pla* quan tots els segments d'un pla perpendiculars al segment d'intersecció dels dos plans són perpendiculars a l'altre pla.[127]

Dxi 5 i Dxi 6. La *inclinació* (κλίσις) d'un segment —o d'un pla— que incideix sobre un pla[128] és l'angle que forma el segment donat amb la seva projecció[129] damunt el pla, és a dir, l'angle determinat per dos segments perpendiculars al segment en el qual es tallen els plans pel mateix punt, un de cada pla.[130]

Dxi 7. Dos plans estan igualment inclinats sobre un altre quan els angles [diedres] de les seves inclinacions són iguals.

Naturalment, Euclides introdueix el paral·lelisme de dos plans (Dxi 8) «quan no es tallen».[131] Als *Elements*, hi manca, tanma-

124. Euclides no usa la paraula κάθετος sinó la frase «forma angles rectes amb un pla quan»: εὐθεια πρός ἐπίπεδον ἐστιν. Vegeu Di 10.

125. Observem que no ha definit enlloc què entén per *pla* (ἐπίπεδον). Tanmateix, pel que ja hem dit abans, el pla euclidià l'hem d'entendre com una part limitada del pla il·limitat en el sentit ideal platònic.

126. En el sentit «que pertanyen al pla i passen pel peu de la perpendicular».

127. Aquí, com també a Dxi 6, accepta implícitament que dos plans es tallen. Si no fos així, entre «a un altre pla» i «quan la línia», hauríem d'afegir l'expressió «que talla». Però aquest fet —«quan dos plans es tallen ho fan en un segment rectilini»— l'estableix a Exi 3.

128. Aquest terme *inclinació* ja l'hem trobat a Di 8, i Procle hi reflexiona profusament. Vegeu els textos C 2.2n a *Grècia IIIa*.

129. Euclides no precisa el significat de l'expressió «projecció del segment damunt el pla» $\mathcal{P}$, d'un segment PQ que hi incideix. Ni tampoc diu que aquesta projecció sigui un segment. Vegeu la nota 799 (pàgina 421).

130. Fixem-nos que, com veurem a Exi 2, els dos segments es troben en un pla i hi formen un angle rectilini. Actualment, aquest angle s'anomena «angle diedre».

131. Vegeu Di 23. Aquí, Euclides és més concís, no diu res de la necessitat de prolongar el pla indefinidament.

teix, el paral·lelisme d'un segment i un pla. Euclides dona, doncs, els «elements» *precisos i justos* que li calen per poder establir els resultats dels tres darrers llibres.

Les dues definicions següents, Dxi 9 i Dxi 10, fan referència a les figures sòlides *semblants* (ὅμοια), i *semblants i equivalents* (ἴσα ὅμοια).

I, abans d'endinsar-se en la descripció de les figures més rellevants, inclosos els sòlids platònics, introdueix un concepte realment important: el de *angle sòlid* (στερεά γωνία).

Dxi 11. Un angle sòlid és l'angle limitat per més de dos angles plans construïts en un punt, és a dir, amb el vèrtex comú, i que no són al mateix pla.

Seguidament, introdueix els sòlids més corrents: la *piràmide* (πυραμίς) (Dxi 12), el *prisma* (πρίσμα) (Dxi 13), l'*esfera* (σφαῖρα) i els seus elements (Dxi 14 a Dxi 17) —l'eix, el diàmetre i el centre—, el *con* (κῶνός) i el *cilindre* (κύλινδρός), i els seus elements (Dxi 18 a Dxi 20; i Dxi 21 a Dxi 23). En les tres darreres definicions usa el moviment de rotació, del qual hem parlat a l'apartat «Les nocions comunes» i al text A.1.1*c* de *Grècia IIa*.[132]

Després de precisar què entén per cons i cilindres «semblants» (Dxi 24), tanca les definicions d'aquest llibre i de tota l'obra amb les de *cub* (κύβος), *octaedre* (ὀκτάεδρόν), *icosaedre* (εἰκοσάεδρόν) i *dodecaedre* (δωδεκάεδρόν) (Dxi 25, 26, 27 i 28).[133]

És interessant indicar que, com ja ha fet als llibres aritmètics, Euclides no introdueix cap postulat *ad hoc*, cosa que fa que algunes de les demostracions esdevinguin coixes i defectuoses perquè contenen peticions de principi.

132. Pla (2018), p. 23-25 i 84-85.

133. El tetraedre és simplement una *piràmide* (πυραμίδες).

Les proposicions.[134] Les tres primeres proposicions pretenen mostrar l'*existència* del pla determinat per tres segments que es tallen dos a dos en tres punts no alineats; per dos segments concurrents; o per un segment i un punt que no es troba ni al segment ni a les seves prolongacions. Tanmateix, les demostracions corresponents són inacceptables perquè abans no s'ha establert ni la definició de *pla* ni cap postulat sobre els plans.[135]

Exi 1. Una part d'un segment no pot ser al pla de referència (τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον) mentre l'altra part és en un pla més elevat (μετεωροτέρῳ).
Exi 2. Dos segments concurrents són en un pla, i un triangle també.
Exi 3. Dos plans concurrents es tallen en un segment.[136]

Les proposicions que van d'Exi 4 a Exi 19 estableixen les propietats que lliguen el «paral·lelisme» i la «perpendicularitat» entre segments i plans, plans i plans, i segments i segments no coplanaris.

Exi 11 i Exi 12. Per un punt del pla podem tirar un segment perpendicular, i per un punt de fora del pla també.[137]

Exi 13. Des d'un punt, solament podem tirar una perpendicular a un pla.[138]
Exi 14. Dos plans perpendiculars a un segment són paral·lels.[139]

► **Exercici 33**. Suposeu que, pel mateix punt P del pla $\mathcal{P}$, hi passen dues perpendiculars al pla. Considereu un segment del pla que passi per P.

És cert que *a*) les dues perpendiculars són coplanàries? i que *b*) les

134. Vegeu A.3*b* (pàgines 424-485).

135. Vegeu la nota 817 (pàgina 425) i les demostracions d'Exi 1, 2 i 3 (pàgines 426, 427 i 429, respectivament).

136. Com sabem que no es tallen en un únic punt? Vegeu la nota 817 (pàgina 425).

137. És la rèplica d'Ei 11 i Ei 12.

138. Vegeu Ei 11′ i Ei 12′ a Pla (2018), p. 100-101.

139. Juntament amb Exi 4, proporciona l'existència d'un pla paral·lel a un pla donat. És la rèplica d'Ei 31.

dues perpendiculars formen angle recte amb el segment del pla que passa pel punt P? ◀

Exi 19. Dos plans perpendiculars a un tercer es tallen, i el segment en què s'intersequen també ho és.

La demostració per l'absurd és senzilla. De fet, es basa en la unicitat de la perpendicular a un pla per un punt (Exi 13).

▶ **Exercici 34**. Sabríeu demostrar-ho?

Exercici 35. Useu Exi 4 —«Si un segment és perpendicular a dos segments incidents d'un pla pel punt de tall, és perpendicular al pla»— i Ei 19, per establir que l'angle que formen una recta i un pla és el més petit que forma el segment rectilini incident amb qualsevol altre segment del pla que passa pel peu d'intersecció. ◀

Les set proposicions següents (d'Exi 20 a Exi 26) tracten els angles sòlids.

Exi 21. Tot angle sòlid està limitat per angles plans la suma dels quals no sobrepassa mai els quatre angles rectes. Com a màxim, hi ha cinc sòlids regulars (Exiii 18, pàgines 585 i 590).

La demostració es basa en el fet que cada un dels angles plans que limiten l'angle sòlid és més petit que la suma dels altres dos. I, amb la construcció d'un tetraedre i usant Ei 32, calcula el valor dels angles.

▶ **Exercici 36**. Estableix la validesa d'Exi 21. ◀

Exi 26. Podem construir un angle sòlid igual a un de donat amb el vèrtex en un punt donat d'un segment donat.[140]

Exi 27. Podem construir, sobre un segment donat, un paral·lelepípede semblant a un de donat disposat de manera semblant.[141]

Les darreres proposicions (d'Exi 27 a Exi 37) fan referència als paral·lelepípedes[142] i es preocupen de la igualtat i la proporcionalitat.[143]

140. És un problema d'existència anàleg al d'Ei 23.

141. Compareu-la amb Ei 45 i Evi 25.

142. Euclides fa servir l'expressió: στερεόν παραλληλεπίπεδον.

143. Euclides usa la propietat: «Per les diagonals de dues cares oposa-

► **Exercici 37**. Proveu la propietat esmentada a la nota 143. ◄

Exi 28. El pla que passa per les diagonals[144] de dues cares paral·leles divideix el paral·lelepípede en dues parts iguals.[145]

Euclides estableix també les proposicions anàlogues a Ei 35, Ei 36 i Evi 1.

Exi 31. Els paral·lelepípedes que tenen altures i bases iguals[, en el sentit de congruents,] són iguals[, en el sentit d'equivalents].[146]

Exi 32. Els paral·lelepípedes que tenen altures iguals són proporcionals a les bases respectives.

Exi 33. La raó entre paral·lelepípedes semblants és la raó triple de la de les arestes homòlogues.[147]

► **Exercici 38**. Considerem quatre segments en proporció contínua. Construïm els paral·lelepípedes semblants de manera anàloga sobre els segments primer i segon. La raó entre els paral·lelepípedes és la que hi ha entre el primer segment i el quart, que és la raó triple de la que hi ha entre el primer i el segon. [*Indicació.* És un porisma de l'anterior?] ◄

Acabem esmentant les proposicions Exi 34 i Exi 38, relatives als paral·lelepípedes equivalents i a una propietat del cub.

Exi 34. Als paral·lelepípedes equivalents, les bases són inversament proporcionals a les altures, i recíprocament.[148]

---

des passa un pla que conté dues de les arestes oposades que uneixen els plans», però no la demostra.

144. És l'única vegada que Euclides empra la paraula *diagonal* (διάγωνιος).

145. Compareu aquest resultat amb Ei 34.

146. Fixem-nos que aquí Euclides introdueix un concepte —l'*altura* (ὕψος)— que no ha definit, i no parla, com al llibre primer [Ei 35 i Ei 36], de «bases en un pla i cares oposades a les bases en un pla paral·lel». En concret, diu: «Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεά παραλληλεπίδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτο ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.»

147. Hi apareix la composició de raons. Vegeu Evi 20. En llenguatge més actual, és el cub de la raó de les arestes.

148. Vegeu Evi 14.

Exi 38. Els plans mitjans i perpendiculars d'un cub es tallen en un segment que dimidia i és dimidiat pel seu diàmetre.[149]

▶ **Exercici 39**. Proveu Exi 34 i Exi 38. ◀

Hi ha força resultats del llibre XI que generalitzen, de manera adequada, teoremes dels llibres I —de geometria elemental pitagòrica— i VI —talesiana i eudoxiana— al cas sòlid. En fem una síntesi a la taula següent:

Taula 1.16. *Taula de generalitzacions de resultats dels llibres* I *i* VI

XI	I	VI	XI	I	VI	XI	I	VI
9	30	—	24	33	—	32	—	1
11	12	—	25	—	1	33	—	20
12	11	—	26	23	—	34	—	14
17	—	2	27	—	18	36	—	17
20	20	—	28	34	—	37	—	22
23	22	—	29 a 31	35 i 36	—			

Tanquem aquest apartat, com ho hem fet en tots els precedents, amb els «elements» de les proposicions del llibre XI.

Taula 1.17. *Els «elements» de les proposicions del llibre* XI

Exi	D	P	Nc	E
1	III 10	—	—	—
2	—	1	—	XI 1
3	—	1	1, 9′	
4	I 10 XI 3	1	—	I 2, 4, 8, 15, 26
5	XI 3	—	—	XI 3, 4
6	XI 3	1, 3	1	I 4, 8, 11, 28 XI 2, 5
7	—	—	9′	XI 3
8	XI 3, 4	1, 2	1	I 11, 29, 48 XI 2, 4, 7
9	—	—	—	XI 3, 4, 6
10	—	1, 3	—	I 2, 18, 33 XI 9

149. Es refereix a la seva diagonal. Curiosament, al llibre IV Euclides no ha establert la proposició corresponent per al quadrat.

Taula 1.17. *Els «elements» de les proposicions del llibre* XI (continuació)

Exi	D	P	Nc	E
11	XI 3	—	—	I 11, 12, 31 XI 4, 8
12	—	—	—	I 31 IX 8, 11
13	XI 3	—	1	XI 3
14	XI 3, 8	1	—	I 17 XI 13
15	XI 3	—	3	I 31 XI 4, 9, 11, 14
16	I 23	—	2	XI 1
17	—	1	—	V 11 VI 2 XI 16
18	XI 3	—	—	I 11, 28 XI 4, 8
19	XI 4	—	—	XI 13
20	—	1, 2, 3	3, 4′	I 4, 20, 23, 25
21	—	—	4′	I 32 XI 20
22	—	1, 3	4′	I 2, 4, 20, 23, 24
23	I 15	1, 2, 3	1, 2, 3	I 2, 4, 8, 25, 29, 47 V 1, 5, 14, 16 XI 12, 22, 23 l.
24	—	1	1, 5′	I 4, 34 XI 10, 16
25	V 5 XI 10	—	—	VI 1 XI 24
26	—	1, 2, 3	—	I 2, 4, 8, 23 XI 11, 12
27	XI 9	—	—	V 22 VI 1, 12
28	—	—	—	I 24, 34 VI 10
29	—	—	1, 2, 3	I 3, 4, 8, 34, 36 XI 24

TAULA 1.17. *Els «elements» de les proposicions del llibre* XI (continuació)

Exi	D	P	Nc	E
30	—	1, 2, 5	—	XI 29
31	—	1, 2, 3, 5	1	I 2, 23, 29, 31, 35 V 7, 9, 11 VI 14 XI 1, 10, 11, 24, 25, 30
32	—	—	—	I 45 V 7 XI 14, 25, 31
33	V 10 VI 1, 9 XI 9	2	—	I 23 VI 10 XI 3, 10, 14, 24
34	V 5	2, 3, 5	1	I 2 V 7, 9 VI 11, 32 XI 11, 25, 29, 30, 31, 32
35	—	1, 2	—	I 2, 4, 8, 12, 26, 47, 48 IX 8, 11
36	—	3, 5	—	I 2 V 7 VI 14 XI 23, 31, 35 p., 36
37	—	—	—	XII 33, 36
38	—	1	—	I 4, 14, 15, 26, 29, 33 XI 9
39	—	5	—	I 34 XI 28, 31

1.4 L'exhaustió: Exii

Euclides aplica la teoria de la proporció i l'exhaustió a la geometria plana i a l'estereometria per cubicar la piràmide en relació amb el prisma, i el con amb el cilindre, i per establir la igualtat de les raons que hi ha entre les àrees de dos cercles i entre els quadrats que els circumscriuen, i entre els volums de dues esferes i entre els cubs que les circumscriuen.

LLIBRE XII. *Aplicacions del mètode d'exhaustió a quadratures i cubicatures*

El llibre XII només conté divuit proposicions però és transcendental.

Com ja hem dit anteriorment, comença amb les aportacions d'Èudox. Recull el «mètode d'exhaustió» que Euclides usa a EXII 2, 3, 4, 5, 10, 11 i 12, i, d'un manera lleugerament diferent, a EXII 16, 17 i 18.

De fet, amb aquest llibre, s'inicia allò que, amb el pas dels anys, coneixerem com a «càlcul» o, més tècnicament, com a «càlcul integral». No hi ha, però, «càlcul diferencial» ni «càlcul» pròpiament dit. S'hi enuncien les relacions mitjançant proporcions i s'hi estableix, per doble reducció a l'absurd, que no poden ser cap altres. L'aprofundiment d'aquesta tècnica serà un dels èxits indiscutibles de l'obra d'Arquimedes[150] i, des d'aleshores fins a mitjans del segle XIX,[151] les recerques per a millorar-la han fet córrer rius de tinta en la recerca matemàtica.[152]

Les proposicions.[153] Volem insistir, encara que resulti massa repetitiu, que, si atenem a la manera com entenem avui l'acció *calcular*, en aquest llibre no es calcula res. De fet, s'hi estableixen resultats que s'expressen en el «llenguatge de les proporcions».[154]

EXII 1. Les àrees dels polígons regulars semblants inscrits en dos cercles són com els quadrats dels diàmetres.[155]

---

150. PLA (2020*b*), capítol 4.

151. PLA (2003) i PLA (2016*d*).

152. No podem oblidar tampoc que, l'any 1961, Abraham Robinson plantejava un camí alternatiu per fonamentar l'anàlisi matemàtica: l'*anàlisi no estàndard*.

153. Vegeu A.4 (pàgines 486-540) i també la nota 923 (pàgina 486).

154. Com a exemple, vegeu EXII 2.

155. En realitat, és una proposició que s'hauria d'haver establert al llibre VI. Tanmateix, Euclides la inclou aquí com a «element», en el sentit donat a *Grècia IIIa*, immediat d'EXII 2.

EXII 2. Dos cercles són com els quadrats dels diàmetres.[156]

En la demostració per l'absurd, Euclides suposa que, si la raó dels cercles fos inferior a la raó dels quadrats dels diàmetres, seria possible trobar una superfície quarta proporcional que substituís el cercle consegüent per tal d'obtenir una proporció.[157] Però enlloc no estableix l'existència de la quarta proporcional de tres magnituds que no siguin segments.[158]

Lema previ a EXII 2. Donat un polígon regular $\mathcal{P}_n$ de n costats, inscrit en un cercle; si passem al polígon regular $\mathcal{P}_{2n}$ de $2n$ costats inscrit en el mateix cercle, eliminem més de la meitat de la superfície que el polígon $\mathcal{P}_n$ no cobreix. Només cal fixar-se en el pas del polígon $\mathcal{P}_4$ al $\mathcal{P}_8$ (figura 1.2*a*), ja que la tècnica és sempre la mateixa. N'hi ha prou amb conside-

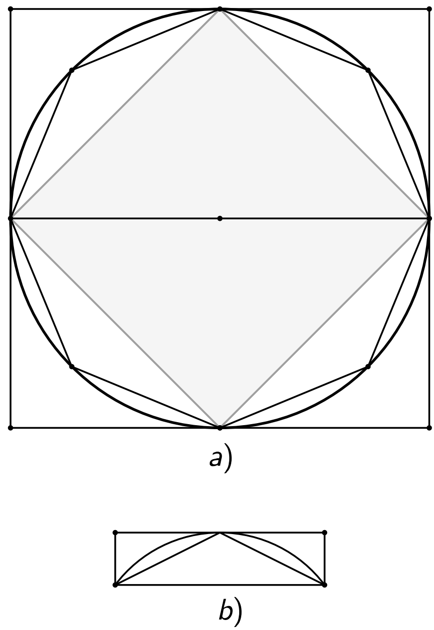


FIGURA 1.2. Exhaustió del cercle i d'un segment de cercle

156. En símbols: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$. Aquesta raó és, doncs, un «invariant», però no sabem quin valor té.

157. En símbols: si $\frac{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}_2} < \frac{d_1^2}{d_2^2}$, aleshores afirma que existeix —realment existeix?— una superfície $\mathcal{S} < \mathcal{S}_2$, de manera que $\frac{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$.

158. EXII 1. Si $\mathcal{P}_n^1$ i $\mathcal{P}_n^2$ són polígons regulars semblants de n-costats, $\frac{\mathcal{P}_n^1}{\mathcal{P}_n^2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$. D'això en resulta que, prenent límits quan n es fa infinit, $\frac{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$, atès que el límit de $\mathcal{P}_n^i$ és $\mathcal{S}_i$, amb $i = 1, 2$. Però aquesta possibilitat estava totalment exclosa en la doctrina d'Aristòtil. Vegeu PLA (2016*b*), p. 348-351; PLA (2010), p. 123-128.

rar el punt mitjà de l'arc que subtendeix cada costat del polígon i unir-lo amb els extrems del costat. Obtenim un triangle isòsceles que té una àrea superior a la meitat del segment circular en el qual està inscrit (figura 1.2*b*).[159]

La complexitat de la demostració es deu al fet que inclou un lema que s'hauria d'haver establert prèviament de manera separada.

A més de la proposició Exii 2, veritablement notable, el llibre conté, en resum, les proposicions següents:

Exii 3 i Exii 4 fan referència al trossejament de la piràmide.[160]

Exii 5. La raó entre les piràmides triangulars de la mateixa altura és igual a la de les seves bases.[161]
Exii 6. La raó entre les piràmides poligonals de la mateixa altura és igual a la de les seves bases.
Exii 7. Tot prisma triangular es pot descompondre en tres piràmides triangulars equivalents.[162]

► **Exercici 40**. *a*) Demostreu la proposició Exii 7.

b) Quina és la raó que hi ha entre un prisma i una piràmide que tenen les bases equivalents i la mateixa altura? ◄

Exii 8 i Exii 9 són les rèpliques de les proposicions Exi 33 i Exi 34 aplicades a piràmides triangulars.

159. Pla (2010), p. 125.

160. Vegeu la pàgina 60.

161. Dues observacions: 1. Euclides parla de «piràmides triangulars» (πυραμίδες καὶ τριγώνους) quan les bases són triangles. 2. Aquesta proposició és un exemple claríssim de proporció entre quatre magnituds, dues a dues, de la mateixa classe. Podem parlar de la seva raó perquè dues són sòlids —volums— i dues, superfícies —àrees. Per això, cal establir la definició de «proporció» en els termes de la definició Dv 5. Vegeu Pla (2018), p. 266-267, i pàgines 497-498 d'aquesta obra.

162. Com a porisma, aquesta proposició implica la proporció que hi ha entre un prisma i una piràmide que tenen les bases equivalents i la mateixa altura. Vegeu l'ítem *b* de l'exercici 40.

EXII 10. Un con és la tercera part del cilindre que té les mateixes base i altura.[163]
EXII 11. La raó entre cons i cilindres que tenen la mateixa altura és igual a la de les seves bases.
EXII 12 és la rèplica d'EXI 33 aplicada als cons i els cilindres.
EXII 18. La raó entre les esferes és igual a la raó triple dels seus diàmetres.[164]

Les proposicions EXII 16 i EXII 17 estableixen la manera d'inscriure, en un cercle o en una esfera, un polígon regular o un poliedre regular, de manera que els costats o les cares *no* toquin la circumferència o l'esfera inscrita amb el mateix centre que el cercle o l'esfera inicial.

En aquestes proposicions, Euclides usa el fet que, si iterem el procés de dimidiació d'una magnitud amb un nombre finit de passos, finalment aconseguim una magnitud prou petita per als nostres interessos. És una variant de l'exhaustió establerta a EX 1.[165]

▶ **Exercici 41**. Com podem lligar l'exhaustió exposada a EX 1 amb el fet que, si dimidiem de manera iterada una magnitud, finalment aconseguim una magnitud més petita que una altra donada per endavant?

Acabem el resum d'aquest llibre veient la desconstrucció de la piràmide triangular que Euclides planteja a la proposició EXII 3, i que proporciona un exemple del mètode d'exhaustió a l'espai.[166]

---

163. Un con i un cilindre amb bases equivalents són com 1 a 3. Vegeu l'ítem 2 de la nota 161.

164. És la generalització d'EXII 2 a l'espai. Però la demostració no és tan acurada. Com veurem a *Grècia IIIb*, cal esperar les aportacions d'Arquimedes, en concret, l'obra *De l'esfera i el cilindre*, per fer-ne una aproximació rigorosa. Vegeu PLA (2020*b*).

165. En termes actuals, $\lim_{n\to\infty}\frac{S}{2^n} = 0$; o, equivalentment, per a n gran, i ϵ petit i arbitrari, $\frac{S}{2^n} < \epsilon$.

166. És una proposició realment notable perquè mostra, encara que ho faci d'una manera indirecta, que el volum d'una piràmide no s'aconsegueix per mètodes simples com serien els del tangram espacial.

I, com a porisma, resulta la proposició EXII 7.[167]

EXII 3. Tota piràmide triangular es descompon en dues piràmides equivalents, i en dos prismes equivalents que són més grans que la meitat de la piràmide total.[168]

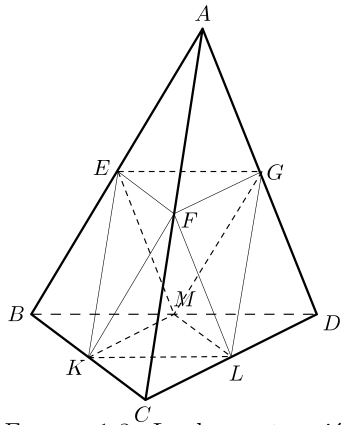


FIGURA 1.3. La desconstrucció d'una piràmide, a EXII 3

► **Exercici 42**. Sabríeu intuir-ho? I demostrar-ho? [*Indicació.* No és fàcil. Vegeu el text que segueix.] ◄

Tot el procés consisteix a descompondre la piràmide en els sòlids de la figura 1.3.

[*Construcció.*] Siguin E, F, G, K, L i M els punts mitjans de les arestes de la piràmide ⟁ $ABCD$.

Si els unim dos a dos, la piràmide ⟁ $ABCD$ queda dividida en les dues piràmides ⟁ $AEFG$ i ⟁ $EBKM$, equivalents entre si i semblants a la piràmide ⟁ $ABCD$,
i en els dos prismes ⌸ $EKMFCL$ i ⌸ $MLDEFG$, equivalents entre si [EXI 39]. ♣

[*Demostració.*] Cada prisma ⌸ $EKCFLM$ i ⌸ $MLDGFE$ cubica $\frac{1}{8}$ del volum $\mathcal{V} = \mathcal{A}(\triangle\, BCD) \times h$,
en què $\mathcal{A}(\triangle\, BCD)$ i h designen l'àrea de la base i l'altura de la piràmide ⟁ $ABCD$, respectivament.

Junts sumen $\frac{1}{4}\,\mathcal{V}$, que cubica més de la meitat del volum de la piràmide inicial ja que

$$\begin{aligned} v(⟁\, AEFG) &= v(⟁\, FKCL) < v(⌸\, EKCFLM), \\ v(⟁\, EBKM) &= v(⟁\, GMLD) < v(⌸\, MLDGFE). \end{aligned}$$ [169]

Un cop suprimits els dos prismes de la piràmide inicial, queden dues piràmides d'arestes la meitat de les arestes inicials.

167. Com vam dir a PLA (2016*b*), p. 254-255, s'atribueix a Demòcrit.
168. De fet, malgrat que l'enunciat ho pugui suggerir, aquesta proposició *no* generalitza EI 41, que és un simple exercici de tangram.
169. Vegeu l'exercici 43 (pàgina 61).

Si repetim el procés anterior en cadascuna de les dues piràmides petites, haurem sostret $2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8}\,\mathcal{V} = \frac{1}{4^2}\,\mathcal{V}$.

Iterem-ho n vegades i haurem tret, en total, un sòlid $\mathcal{V}_n$ el volum del qual és: $v(\mathcal{V}_n) = (\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n})\,\mathcal{V}$.

Pel mètode d'exhaustió, resulta que, per a un cert valor de n, $\mathcal{V} - v(\mathcal{V}_n) < \mathcal{V}'$, en què $\mathcal{V}'$ és un volum donat per endavant. ♠

▶ **Exercici 43**. Proveu que:
a) Cadascun dels prismes ⏢ $EKCFLM$ i ⏢ $MLDGFE$ cubica $\frac{1}{8}$ del volum $\mathcal{V} = \mathcal{A}(\triangle\, BCD) \times h$.
b) Junts cubiquen més de la meitat del volum de la piràmide inicial.
c) Sabem que les dues piràmides ◬ $AEFG$ i ◬ $EBKM$ són equivalents entre si i semblants a la piràmide ◬ $ABCD$, i que els dos prismes ⏢ $EKMFCL$ i ⏢ $MLDEFG$ són equivalents. Aleshores, basant-nos en Exi 33, tenim que $\mathcal{V}($◬ $AEFG) = \mathcal{V}($◬ $EBKM) = \frac{1}{8}\,\mathcal{V}($◬ $ABCD)$. Per tant, $\mathcal{V}($⏢ $EKMFCL) = \mathcal{V}($⏢ $EKCFLM) = \frac{3}{8}\mathcal{V}($◬ $ABCD)$.

Exercici 44. Repasseu els passos anteriors. Quant val $v(\mathcal{V}_n)$ quan $n \to \infty$? ◀

Un cop establert Exii 3, veiem, per doble reducció a l'absurd, que no és acceptable cap de les dues alternatives

$$\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_2} < \frac{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}_2} \text{ i } \frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_2} > \frac{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}_2},$$

en què $\mathcal{V}_i$ i $\mathcal{S}_i, i = 1, 2$, designen els volums de dues piràmides triangulars semblants, ◬ $A'B'C'D'$ i ◬ $A''B''C''D''$, i les àrees de les seves bases, $\triangle\, B'C'D'$ i $\triangle\, B''C''D''$, respectivament.

Ara podem demostrar Exii 5:

[*Demostració.*] Suposem, per exemple, que $\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_2} < \frac{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}_2}$. Aleshores, existeix un volum $\mathcal{V}''$ —realment, existeix?—[170] per al qual $\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_2} < \frac{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}_2} = \frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}''}$, en què $\mathcal{V}'' < \mathcal{V}_2$. A causa del que hem vist abans, existeix un sòlid $\mathcal{P}_n^2$ que satisfà $\mathcal{V}'' < \mathcal{P}_n^2 < \mathcal{V}_2$. Però Exii 4 —la rèplica d'Exii 1— estableix l'existència d'un sòlid $\mathcal{P}_n^1$, semblant a

170. Vegeu les observacions que hem fet a Pla (2018), p. 25 i 292, nota 870. I també a la nota 158 (pàgina 57).

$\mathcal{P}_n^2$, que satisfà: $\frac{\mathcal{P}_n^1}{\mathcal{P}_n^2} = \frac{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}_2} = \frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}''}$ amb $\mathcal{P}_n^1 < \mathcal{V}_1$. Però això implica que $\mathcal{P}_n^2 < \mathcal{V}''$, i és impossible.[171] ♠

TAULA 1.18. *Els «elements» de les proposicions del llibre XII*

EXII	D	P	Nc	E	
	1	VI 1	1, 4	—	I 32 III 27, 31 V 11 VI 4, 6, 20
	2	IV 2 V 6	5	1, 4′	I 47 III 17, 30 IV 6 V 7 p., 11, 16 VI 18 X 1 XII 1
	3	VI 1	1	1, 4′	I 4, 10, 29, 34, 41 VI 6, 34 XI 9, 10, 39
	4	—	—	1	V 12, 15, 16 VI 2, 22 XI 39 XII 3
	5	—	—	—	V 7 p., 11, 14, 16 X 1 XII 2, 4 XIII 3
	6	—	1	—	V 18, 22 XII 5
	7	—	1	1	VIII 22, 23 IX 3, 8
	8	VI 1 XI 9	—	—	V 11, 15 XI 9, 22, 24, 33 XII 7
	9	VI 3	5	1	I 34 V 11, 15 XI 34 XII 8

171. Compareu aquesta demostració amb la d'EXII 2, a PLA (2010), p. 126-127. És molt interessant l'anàlisi que en fa LEVI (1947), capítol IV, edició del 2001, p. 193-201.

Taula 1.18. *Els «elements» de les proposicions del llibre* XII (continuació)

Exii	D	P	Nc	E	
	10	x 18, 21	1, 5	1	I 47 III 30 IV 6, 7 V 15 X 1 XI 32 XII 2, 7 p.
	11	—	1	—	III 30 IV 6, 7 V 7 p., 11, 14, 15, 16 VI 18 X 1 XII 1, 2, 2 l., 6, 10
	12	VI 1 XI 12, 24 XII 9	1	—	IV 6 V 7 p., 11, 12, 15, 16, 22 VI 1, 5, 6, 8 X 1 XII 2, 2 l., 8, 10
	13	V 5 XI 21	2	—	I 2 V 4, 15 XI 14 XII 11
	14	V 5	—	2	I 2 XII 10, 11, 13
	15	V 5	—	—	V 7, 11 XI 13, 14 XII 11, 13
	16	—	1, 2	—	I 11, 12, 28 III 3, 14, 16 p. IV 1 X 1
	17	III 1, 28 IV 3 XI 3, 4, 14	1, 2	1, 3	I 3, 33, 47 III 15, 27, 28 V 7 VI 2 XI 1, 2, 6, 7, 8, 11, 12 XII 16
	18	—	—	—	V 7 p., 11, 14, 16 XII 2 l., 17 i 17 p.

1.5 Els cinc sòlids platònics: Exiii

Com ja hem dit en diverses ocasions, els *Elements* d'Euclides acaben establint una construcció per a cadascun dels cinc sòlids platònics i demostrant que solament n'hi ha cinc.

Llibre xiii. *Construcció dels cinc poliedres regulars*

Aquest llibre, que clou la magna obra atribuïda a Euclides, solament conté divuit proposicions però és una mica feixuc.

Estableix l'*existència* dels sòlids platònics inscrits en una esfera i demostra que el tetraedre, l'hexaedre o cub, l'octaedre, l'icosaedre i el dodecaedre són els *únics* poliedres regulars possibles.

Abans de construir-los, però, presenta les propietats dels polígons regulars en si mateixes i com a figures planes inscrites en un cercle.[172]

Les proposicions.[173] Per tal de construir els poliedres regulars inscrits en una esfera de diàmetre D, Euclides precisa el radi r de la circumferència que circumscriu una de les cares, és a dir, utilitza els «elements» previs següents:[174]

1. Hem d'inscriure un triangle equilàter en un cercle de radi $r = \frac{\sqrt{2}}{3} D$. Les cares del tetraedre inscriptible són iguals a aquest triangle i l'aresta del tetraedre inscrit val $A_4 = \frac{\sqrt{6}}{3} D$.
2. Hem d'inscriure un quadrat en el cercle de l'equador de l'esfera ($r = \frac{D}{2}$). L'aresta de l'octaedre inscrit val $A_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} D$.
3. Hem d'inscriure un quadrat en el cercle de radi $r = \frac{\sqrt{6}}{6} D$. L'aresta del cub inscrit és $A_6 = \frac{\sqrt{3}}{3} D$.

172. De fet, les hauria d'haver estudiades al llibre iv.
173. Vegeu A.5 (pàgines 540-592) i també la nota 1050 (pàgina 540).
174. Marchini (2006), p. 184-185.

4. Hem d'inscriure un pentàgon regular en un cercle de radi $r = \frac{\sqrt{5}}{5}\,D$. L'aresta de l'icosaedre inscrit val $A_{20} = \frac{1}{10}\sqrt{10(5-\sqrt{5})}\,D$.
5. Hem de tirar un segment igual a $A_{12} = \frac{\sqrt{3}}{6}(\sqrt{5}-1)\,D$, que és igual a $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\,A_6$.[175]

Ho sintetitzem en les dues taules següents:

TAULA 1.19. *Relacions de les arestes dels poliedres regulars i el diàmetre $D := 2\,R$ de l'esfera circumscrita*

Poliedre	Construcció	Aresta	Relació dels quadrats	Valor relatiu de l'aresta
Tetraedre	EXIII 13	A_4	$\frac{\mathrm{A}_4^2}{D^2} = \frac{2}{3}$	$\mathrm{A}_4 = \frac{2\sqrt{6}}{3}\,R$
Octaedre	EXIII 14	A_8	$\frac{\mathrm{A}_8^2}{D^2} = \frac{1}{2}$	$\mathrm{A}_8 = \sqrt{2}\,R$
Cub	EXIII 15	A_6	$\frac{\mathrm{A}_6^2}{D^2} = \frac{1}{3}$	$\mathrm{A}_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,R$
Icosaedre	EXIII 16	A_{20}	$\frac{\mathrm{A}_{20}^2}{D^2} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$	$\mathrm{A}_{20} = \frac{\sqrt{10\,(5-\sqrt{5})}}{5}\,R$
Dodecaedre	EXIII 17	A_{12}	$\frac{\mathrm{A}_{12}^2}{D^2} = \frac{3-\sqrt{5}}{6}$	$\mathrm{A}_{12} = \frac{\sqrt{3}\,(\sqrt{5}-1)}{3}\,R$

TAULA 1.20. *Els radis dels cercles que circumscriuen els polígons auxiliars que construeix Euclides per trobar l'aresta de cada un dels poliedres regulars inscrits en una esfera de diàmetre D*

Poliedre	Construcció		Aresta	Radi del cercle circumscrit
Tetraedre	[EXIII 13]	Triangle equilàter	A_4	$r_{A_4} = \frac{\sqrt{2}}{3}\,D$
Octaedre	[EXIII 14]	Quadrat	A_8	$r_{A_8} = \frac{1}{2}\,D$
Cub	[EXIII 15]	Quadrat	A_6	$r_{A_6} = \frac{\sqrt{6}}{6}\,D$
Icosaedre	[EXIII 16]	Pentàgon regular	A_{20}	$r_{A_{20}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\,D$
Dodecaedre[176]				

175. És a dir, equival a la part gran del costat del cub inscrit en l'esfera quan el dividim en mitjana i extrema raó.

176. En aquest cas, el mètode seguit és diferent. Vegeu la nota 175.

▶ **Exercici 45**. Vegeu el problema 43 (pàgina 80).

Exercici 46. Calculeu el valor de l'aresta a_6 del cub [o hexaedre regular] inscrit en una esfera, en funció del radi r de l'esfera.

Exercici 47. Proveu Exiii 10: «El triangle format pels costats d'un pentàgon, un hexàgon i un decàgon inscrits en un mateix cercle formen un triangle rectangle.» [*Indicació.* Aquesta proposició es podria haver establert al llibre iv?] ◀

Taula 1.21. *Els «elements» de les proposicions del llibre* xiii

Exiii	D	P	Nc	E
1	ii 11 v 5	2	$1, 2, 5'$	i 43, 46 ii 4, 11 vi 1, 3
2	vi 3	2	$1, 3, 5'$	i 2, 43, 46 ii 4 v 14 vi 1, 17
3	i 22 vi 3	—	1, 2	i 31, 33, 34, 36, 43, 46 ii 4 v 14 vi 17
4	vi 3	—	1, 2	i 43, 46 vi 17
5	vi 13	2	1	i 12, 43, 46 v 4 vi 17
6	vi 1 x 1.4	2	—	i 2, 3, 10 vi 17 x 6, 9, 73, 97 xiii 1
7	—	1	1, 2, 3	i 4, 6, 8 iii 28
8	—	—	$1, 5'$	i 4, 5, 6, 32 iii 28 iv 14 v 7, 14 vi 4, 33

TAULA 1.21. *Els «elements» de les proposicions del llibre* XIII (continuació)

EXIII	D	P	Nc	E
9	V 5	1, 2	1, 5′	I 2, 5, 32 III 1, 20 IV 15 p. V 7, 14 VI 4, 33
10	—	1, 2, 4	1, 2, 3, 5′	I 4, 5, 12, 26, 32 II 2 III 1, 3, 26, 28, 29 IV 15 p. VI 4, 17, 32, 33
11	V 5, 14, 16 X 1.4, 3.4	1, 2	2, 3	I 4, 32 III 1 V 7, 11, 15, 17, 18, 19 p., 24 VI 4, 8 X 9, 12, 15, 73, 94 XIII 1, 8
12	V 15	1, 2	1	I 47 II 4 III 1, 27, 29, 30, 31 IV 2, 15 p. V 17
13	I 20 V 5 XI 3	1, 2, 3	1, 2	I 4, 32 I 2, 4, 11, 47 III 1 IV 24 V 7 VI 8 p., 10, 17 XI 12 XIII 12, 13 l.
14	V 5, 9	1	1, 2	I 2, 4, 10, 11, 46, 47 III 31 VI 8 XI 12
15	V 5, 9 XI 3	1, 3	1	I 2, 11, 47 I 2, 4, 11, 47 III 31 IV 5 VI 8, 10

Taula 1.21. *Els «elements» de les proposicions del llibre* xiii (continuació)

Exiii	D	P	Nc	E
16	iii 11 v 5, 9 xi 3	2, 3	1, 2	i 2, 10, 11, 29, 33, 36 i 2, 4, 11, 47 iii 1, 10, 28, 29, 30, 31 iv 11, 15 v 7 vi 8, 10 xi 6 xiii 3, 4, 9, 10, 11
17	vi 2 x 1.3, 1.4 xi 3	1, 2	1, 2	i 1, 6, 11, 18, 38 i 2, 4, 11, 47 ii 11, ? v 7, 14, 15 vi 32 xi 1, 6, 11, 18, 38 xiii 4, 5, 6, 79, 15
18	v 5, 9, 15 x 1.3	1, 3	1, 2, 3, 4′	i 1, 6, 11, 18, 38 i 2, 10, 11, 12, 47 ii 4 iii 14 iv 15 p. v 9, 11, 13 vi 1, 4, 8, 10, 20 i 20 p., 23 xiii 9, 10, 13, 14, 15, 16 i 16 p., 17

En definitiva, aquest és el resum del que aporten els llibres vii, viii, ix, x, xi, xii i xiii dels *Elements* de l'insigne matemàtic del Museu d'Alexandria, el contingut complet dels quals desenvoluparem a l'apèndix A (pàgines 85 a 592).

1.6 Els dos llibres apòcrifs: Exiv i Exv

En algunes edicions dels *Elements* hi trobem els llibres xiv i xv, que són d'Hipsicles i d'Isidor de Milet. Nosaltres, però, solament n'oferim una ressenya molt succinta.[177]

177. Heath (1921), volum i, p. 419-421.

Llibre XIV. *Relacions de les arestes dels poliedres regulars*

Podem dir que el llibre XIV, molt breu, és una prolongació realment interessant del XIII. Estableix els lligams entre els volums i les arestes dels sòlids platònics. De manera molt sintètica, enuncia i demostra la proposició següent d'Hipsicles:[178]

> [Teorema d'Hipsicles.] Si el punt C divideix el segment AB en mitjana i extrema raó, amb AC com la part més gran, i un cub, un dodecaedre i un icosaedre estan inscrits en una mateixa esfera; aleshores:
>
> 1. $\dfrac{\text{costat del cub}}{\text{costat de l'icosaedre}} = \dfrac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{\sqrt{AB^2 + BC^2}}.$
> 2. $\dfrac{\text{àrea del dodecaedre}}{\text{àrea de l'icosaedre}} = \dfrac{\text{costat del cub}}{\text{costat de l'icosaedre}}.$
> 3. $\dfrac{\text{volum del dodecaedre}}{\text{volum de l'icosaedre}} = \dfrac{\text{àrea del dodecaedre}}{\text{àrea de l'icosaedre}}.$
> 4. $\dfrac{\text{volum del dodecaedre}}{\text{volum de l'icosaedre}} = \dfrac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{\sqrt{AB^2 + BC^2}}.$

▶ **Exercici 48**. Sabríeu demostrar les relacions anteriors? [*Indicació.* Vegeu el problema 44 (pàgina 80).]
Exercici 49. Proveu que, si dividim dos segments en mitjana i extrema raó, la raó de les dues parts grans de les divisions respectives és la mateixa que la dels segments inicials. Què passa amb la raó de les parts petites? És igual o diferent? ◀

Llibre XV. *Inscripcions de poliedres regulars*

El darrer llibre, de qualitat inferior a l'anterior, estableix tres grups de proposicions.[179]

En primer lloc, les inscripcions que es poden establir entre els cinc poliedres regulars:

---

178. Heath (1925), volum III, p. 512-519.
179. Vegeu-ne un resum a Heath (1925), volum III, p. 519-520.

1. Un tetraedre en un cub.
2. Un octaedre en un tetraedre.
3. Un octaedre en un cub.
4. Un cub en un octaedre.
5. Un dodecaedre en un icosaedre.

► **Exercici 50**. Sabríeu demostrar les afirmacions anteriors? [*Indicació.* Vegeu el problema 45 (pàgina 80).] ◄

En segon lloc, el càlcul del nombre de vèrtexs i arestes de cada un dels sòlids platònics.

► **Exercici 51**. Feu un quadre en el qual hi hagi el nom del sòlid, i el nombre de cares (c), de vèrtexs (v) i d'arestes (a). Sabríeu establir una relació entre aquests tres nombres? Si la trobeu haureu arribat a la «fórmula d'Euler». ◄

En tercer lloc, la determinació del valor dels angles diedres dels sòlids platònics.

TAULA 1.22. *Els angles diedres dels sòlids platònics*

Sòlid regular	Base del triangle isòsceles	Costats del triangle isòsceles
Tetraedre	Costat de la cara triangular	La perpendicular pel vèrtex a la base de la cara triangular
Octaedre	La diagonal del quadrat de costat una aresta de la cara triangular	Ídem
Icosaedre	La corda que uneix dos vèrtexs no consecutius del pentàgon regular de costat una aresta de la cara triangular[180]	Ídem
Dodecaedre	La corda que uneix dos vèrtexs no consecutius de la cara pentagonal[181]	La perpendicular pel punt mitjà d'una corda que uneix dos vèrtexs consecutius d'una cara al costat paral·lel d'aquesta cara[181]

180. És el «pentàgon de l'icosaedre».

181. Vegeu el segment BC de la figura EXIII 17 (pàgina 579). En ocasions, la justificació d'una afirmació es repeteix diverses vegades en una mateixa pàgina, com ara. En aquestes ocasions, usarem el mateix número da la nota de la primera vegada per tal de simplificar la col·lecció de notes de la pàgina.

Isidor de Milet dona, en cada cas, un triangle isòsceles en la base del qual hi ha un angle diedre. Estableix, en concret, els resultats de la taula 1.22 (pàgina 70).

► **Exercici 52**. Són correctes els valors dels angles diedres que suggereix la taula 1.22? Quin valor tenen com a part del nombre π? Quin valor tenen en graus, minuts i segons? Per què no cerquem l'angle diedre del cub?

Exercici 53. Tenint en compte el que diu la taula 1.22, completeu el quadre que heu confegit a l'exercici 51 amb el valor de l'angle diedre. ◄

1.7 Problemes

Problema 1. Siguin $m, n \in \mathbb{N}$. Proveu que:

a) Existeixen $q, r \in \mathbb{N}$, de manera que $n = m \times q + r$, amb $0 \leq r < m$.

b) Els nombres q i r són únics (q i r s'anomenen *quocient* i *residu* de la «divisió euclidiana [per defecte]» de n per m).[182]

Problema 2. Si acceptem que tota col·lecció decreixent de nombres naturals és finita, podreu demostrar que l'«algorisme d'Euclides» proporciona el mcd de dos nombres naturals m i n.

Problema 3.

a) Factoritzeu en factors primers els nombres 6, 20, 36, 81, 252, 891, 1.012, 1.053, 2.431, 5.060, 11.583, 12.155, 14.400, 57.915, 158.400, 289.875 i 14.414.400.

b) Cerqueu el mcd, (m, n), i el mcm, $[m, n]$, de cadascuna de les parelles m, n de nombres de l'ítem *a*.

c) És cert que $m \times n = (m, n) \times [m, n]$?

d) Cerqueu una terna per a la qual $m \times n \times p = (m, n, p) \times [m, n, p]$ i una altra per a la qual això falli.

Sabríeu explicar quan es compleix la igualtat anterior i quan falla?

182. Els catorze primers problemes estan relacionats i alguns són repeticions dels problemes 10 al 16, Pla (2016*b*), p. 157-160.

e) Doneu la factorització en nombres primers del mcd, (m, n), i del mcm, $[m, n]$, a partir de les factoritzacions en nombres primers de m i n.

Quina és la llei que determina els exponents dels nombres primers en les factoritzacions en nombres primers del (m, n) i del $[m, n]$?

Problema 4. Euclides usa, sense demostrar-lo, el principi següent de substitució: si $(m, p) = 1$ i $n = m$, aleshores $(n, p) = 1$.

Problema 5.

a) Doneu una fórmula que calculi $\sigma(n) = \sum_{d|n,d>0} d$.

b) Expliciteu una manera sistemàtica de trobar tots els divisors positius de m.

Problema 6. Sigui $E_k = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k + 1$, en què $p_1, p_2, \ldots, p_k$ són els k primers nombres primers.

a) Calculeu E_1, E_2, E_3, E_4 i E_5. Tots són primers?

b) És certa la conjectura: «E_k és primer per a tot índex k»?

c) Doneu el primer E_k que admet un divisor primer diferent de tots els nombres primers $p_1, p_2, \ldots, p_k$ i de E_k.

Problema 7. Proveu que:

a) Si el nombre $2^k - 1$ és primer, k també ho és.

b) És certa l'afirmació: «Si k és primer, $2^k - 1$ és primer»? [*Indicació*. Cerqueu els valors de $2^k - 1$ per a $k = 2, 3, 5, 7, 11$ i 13.]

Problema 8. Proveu que:

a) Si el nombre $2^p + 1$ és primer, l'exponent p és necessàriament de la forma 2^k.

Els nombres de la forma $F_k := 2^{2^k} + 1$ s'anomenen «nombres de Fermat» i, quan són primers, «nombres primers de Fermat».

b) Els nombres F_0, F_1, F_2, F_3 i F_4 són primers de Fermat.

És certa la conjectura: «Per a tot índex k, F_k és primer»?

c) Si la resposta a l'ítem *b* és «no», doneu el primer índex k per al qual $2^{2^k} + 1$ factoritza.

Problema 9. És possible demostrar que hi ha infinits nombres primers de la forma $4n + 1$ i infinits de la forma $4n - 1$. Però les demostracions no són anàlogues.

a) Proveu que tot nombre primer senar és d'una de les dues formes $4n-1$ o $4n+1$.
b) Classifiqueu els nombres primers més petits que 200 en cada una d'aquestes dues formes.
c) Adaptant el mètode d'EIX 20 (exercici 13, pàgina 16), vegeu que hi ha una infinitat de nombres primers de la forma $4n-1$.
d) Què falla quan voleu aplicar la tècnica demostrativa d'EIX 20 als nombres primers de la forma $4n+1$?
e) Podríeu conjecturar que tot nombre primer de la forma $4n+1$ és la suma de dos quadrats? [*Indicació*. Cerqueu els nombres primers de la forma $4n+1$ més petits que 1.000 i mireu si compleixen aquesta condició.]
f) La descomposició en suma de dos quadrats dels nombres primers de la forma $4n+1$ és única? Si la resposta és negativa, doneu dos exemples de cada un dels casos.

Problema 10. Calculeu el valor dels nombres $Q_n := (2n)^2+1$, amb $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

La conjectura «Tots els nombres de la forma Q_n, amb $n \in \mathbb{N}$, són primers» és certa o falsa?

Doneu tots els nombres primers d'aquesta forma menors que 1.000.

Actualment, no sabem si hi ha una infinitat de primers de la forma Q_n.

Problema 11. Proveu el teorema d'Euler [1849]: «Si P és un nombre perfecte [parell], té la forma $2^{k-1}(2^k-1)$, amb 2^k-1 primer.» [*Indicació*. Recordeu que m és perfecte si, i només si, $\sigma^*(m) = \sigma(m)-m = m$. O, equivalentment, $\sigma(m) = 2m$.]

Doneu els vint-i-cinc primers nombres primers de Mersenne.

Problema 12. En la demostració d'EVII 24 (pàgina 117), Euclides prova el lema de Gauss: «Siguin m, n i $p \in \mathbb{N}$. Si $p|(m\times n)$ i $(p, m) = 1$, aleshores $p|n$.» [*Indicació*. Useu EVII 19, 20 i 21.]

Problema 13. Emprant les definicions i la metodologia del llibre VII dels *Elements* d'Euclides, demostreu que, si m, n i p són tres nombres naturals, aleshores $\frac{m}{p} = \frac{n}{p}$ si, i només si, $m = n$.

Problema 14. Demostreu que, donada una multitud de k raons irreductibles $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{m_3}{n_3}, \ldots, \frac{m_{k-1}}{n_{k-1}}$ i $\frac{m_k}{n_k}$, no necessàriament iguals, existeixen $k+1$ nombres, $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{k-2}, p_{k-1}, p_{k+1}$ mínims, de manera que $\frac{m_i}{n_i} = \frac{p_i}{p_{i+1}}$ amb $i = 1, 2, \ldots, k$.

Compareu la vostra demostració amb la d'EVIII 4 (pàgina 140).

Determineu els nombres p_1, p_2, p_3 i p_4 en el cas que les raons $\frac{m_i}{n_i}$, $i = 1, 2, 3$, siguin $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$ i $\frac{1}{9}$.
[*Indicació.* Vegeu la nota 353 (pàgina 140).]

Problema 15. Proveu que, si $m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}, m_k$ són k nombres naturals en proporció contínua —és a dir, en progressió geomètrica— i m_1 i m_k són primers entre si, aleshores $m_1 = q_1^\ell$ i $m_k = q_k^\ell$, amb $(q_1, q_k) = 1$.

Problema 16. L'expressió que s'estableix a EIX 35 (pàgina 206), val per a qualsevol progressió geomètrica?

Deduïu-ne l'expressió de la suma S_n dels n termes de la progressió geomètrica tal com s'estableix actualment: «Si $a, a\,r, a\,r^2, \ldots, a\,r^{n-1}$ és una progressió geomètrica de n termes, primer terme a i raó $r > 1$, la suma $S_n := a + a\,r + \cdots + a\,r^{n-1}$ dels n termes s'expressa amb $S_n = a\,\frac{r^n - 1}{r-1}$.»

Problema 17. Constateu que les demostracions d'EIX 13 i EIX 15 (pàgines 184 i 189) són correctes. Com serien algebritzades?

Problema 18. Analitzeu la demostració de la proposició EIX 19 i comproveu si les afirmacions de la nota 439 (pàgina 194) són correctes. [*Indicació.* Vegeu HEATH (1925), volum II, p. 411-412.]

Problema 19. Verifiqueu quina és la forma algebraica de:

a) Un segment medial.

b) L'àrea d'un rectangle de costats medials i

  b_1) commensurables en longitud.

  b_2) commensurables només en quadrat.

Constateu la validesa d'EX 25 (pàgina 41).

Problema 20. Proveu que:

a) La terna $m = 2\lambda\mu, n = \lambda^2 - \mu^2$ i $p = \lambda^2 + \mu^2$, amb $\lambda, \mu \in \mathbb{N}, \lambda > \mu, (\lambda, \mu) = 1$ i de diferent paritat, és una terna pitagòrica numèrica, és a dir, $p^2 = m^2 + n^2$.

b) Totes les ternes pitagòriques *simples* —sense divisors comuns— són com les anteriors:

- b_1) Un catet és parell i l'altre senar.
- b_2) Si m és, per exemple, el catet parell, podeu escriure $n^2 = p^2 - m^2 = 4\left(\frac{p+m}{2}\right)\left(\frac{p-m}{2}\right)$.

c) I, a més, es plantegen les qüestions següents:

- c_1) Quina és la paritat de la hipotenusa?
- c_2) Com podeu garantir que $\frac{p+m}{2}$ i $\frac{p-m}{2}$ són quadrats?
- c_3) Els termes $\frac{p+m}{2}$ i $\frac{p-m}{2}$ són primers entre si?

Problema 21. Siguin $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ i $\mathfrak{C}$ tres magnituds. Demostreu:
—La transitivitat: si $\mathfrak{A}$ mesura $\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{B}$ mesura $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$ mesura $\mathfrak{C}$.
—La compatibilitat amb $\pm$: si $\mathfrak{A}$ mesura $\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$ mesura $\mathfrak{B} \pm \mathfrak{C}$.
[*Indicació*. Vegeu els dos ítems de la pàgina 5.]

Problema 22. Dos segments α i β, en què $\alpha > \beta$, són «commensurables pitagòricament» quan l'excés del quadrat del més llarg sobre el del més curt és el quadrat de costat un segment commensurable en longitud amb el més llarg, és a dir, $\alpha^2 - \beta^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \alpha^2$. Demostreu que:

a) Una condició necessària per tal que α i β, en què $\alpha > \beta$, siguin commensurables pitagòricament és que $\beta^2 = \left(\frac{n^2-m^2}{n^2}\right)\alpha^2$.

b) Si α i β són commensurables en quadrat —és a dir, $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{m'}{n'}$—, una condició suficient és que $\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^2 \alpha^2}{\alpha^2} = \frac{m'-n'}{n'}$.

[*Indicació*. Vegeu Frajese i Maccioni (1970), p. 271-275.]

Problema 23. Entre altres resultats, Euclides estableix que, si $\frac{\beta}{\gamma}$ no és un quadrat perfecte, no és mai possible que $\sqrt{\alpha} = \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$.[183]

Problema 24. En quines condicions,

a) $\sqrt{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} = \sqrt{\gamma} + \sqrt{\delta}$?

b) $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\gamma} - \sqrt{\delta}$?

183. Itard (1961), p. 339-345.

c) $\sqrt{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} = \sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}$?

Problema 25. Proveu que:

a) $\sqrt{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-\beta^2}} = \sqrt{\dfrac{\alpha-\beta}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$.

Useu aquesta identitat per expressar el costat del pentàgon regular inscrit en un cercle de radi 1, $a_5 = \frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, en «forma menor». [*Indicació*. Vegeu la nota 1096, pàgina 563.]

b) $\dfrac{\alpha}{\sqrt{\beta}} = \dfrac{\alpha}{\beta}\sqrt{\beta}$.

c) $\dfrac{\alpha}{\sqrt{\beta}\pm\sqrt{\gamma}} = \dfrac{\alpha}{\beta-\gamma}\left(\sqrt{\beta}\mp\sqrt{\gamma}\right)$.

Problema 26. En aquest problema s'ofereixen les traduccions algebraiques de les demostracions d'Ex 33 i Ex 34, en les quals Euclides usa les dues relacions $x+y=-b$ i $x\,y=c$, amb b i c convenients, per trobar parelles de segments irracionals concrets.

Ex 33, pàgina 264. Volem trobar dos segments incommensurables en quadrat, de manera que la suma dels quadrats que els tenen com a costats és [una àrea] racional i el rectangle que els té com a costats, [una àrea] medial.

a) Considereu els dos segments u i $\frac{u}{\sqrt{1+q^2}}$, en què u i q són racionals [Ex 30].

b) Resoleu el sistema $x+y=u,\ x\,y=\frac{u^2}{4\,(1+q^2)}$. Determineu els valors de x i y i constateu que són incommensurables en quadrat [Ex 18].

Ex 34, pàgina 266. Volem trobar dos segments incommensurables en quadrat, de manera que la suma dels quadrats que els tenen com a costats és [una àrea] medial i el rectangle [que els té com a costats, una àrea] racional.

a) Considerem els dos segments medials $\frac{u}{\sqrt[4]{1+q^2}}$ i $\frac{u}{\sqrt[4]{(1+q^2)^3}}$, en què u i q són racionals [Ex 31, segona part].

b) Resoleu el sistema $x+y=\frac{u}{\sqrt[4]{1+q^2}}, x\,y=\frac{u^2}{4\,\sqrt[4]{(1+q^2)^3}}$. Determineu els valors de x i y i constateu que són incommensurables en quadrat [Ex 18].

c) Feu $X^2=\frac{u}{\sqrt[4]{1+q^2}}\,x$ i $Y^2=\frac{u}{\sqrt[4]{1+q^2}}\,y$. Determineu els valors de X

i Y. [*Indicació.* Tenim que $X^2+Y^2=\frac{u^2}{\sqrt{1+q^2}}$, que és una àrea medial,
i $X\,Y=\frac{u}{\sqrt[4]{1+q^2}}\sqrt{x\,y}=\frac{1}{2}\,\frac{u^2}{1+q^2}$, que és una àrea racional.

Els valors que s'obtenen són:

$$x=\frac{u}{2\,\sqrt[4]{(1+q^2)^3}}\,(\sqrt{1+q^2}+q).$$

$$y=\frac{u}{2\,\sqrt[4]{(1+q^2)^3)}}\,(\sqrt{1+q^2}-q).$$

$$X=\frac{u}{\sqrt{2\,(1+q^2)}}\,\sqrt{\sqrt{1+q^2}+q}.$$

$$Y=\frac{u}{\sqrt{2\,(1+q^2)}}\,\sqrt{\sqrt{1+q^2}-q}.$$

Problema 27. En funció dels radis r i R de l'esfera inscrita i de la circumscrita, doneu els valors de les arestes dels cinc poliedres regulars: el tetraedre, el cub, l'octaedre, l'icosaedre i el dodecaedre.

Indiqueu quina classe de segment s'obté, en cada cas, usant la terminologia del llibre X.

Problema 28. Proveu el lema previ a EXII 2 (pàgina 57).

Problema 29. Proveu EXII 2, seguint els passos següents:

a) Suposeu que $\frac{S_1}{S_2}<\frac{\delta_1^2}{\delta_2^2}$, i accepteu l'existència d'una certa superfície $S<S_2$ que fa que $\frac{S_1}{S}=\frac{\delta_1^2}{\delta_2^2}$.[184]

b) Apliqueu l'exhaustió a S_2-S, amb polígons regulars p_{2^n}, de 2^n costats, i deduïu-ne que, per a un cert n, $S_2-p_{2^n}<S_2-S$.

c) Per EXII 1, sabem que $\frac{P_{2n}}{p_{2n}}=\frac{\delta_1^2}{\delta_2^2}$.

d) Per Nc 1 i EV 16, sabem que $\frac{P_{2n}}{S_1}=\frac{p_{2n}}{S}$.

e) Useu DV 7 i el fet que $p_{2n}>S$, i deduïu-ne que $P_{2^n}>S_1$.

f) Per què no és possible aquesta darrera desigualtat?

g) Suposeu que $\frac{S_1}{S_2}>\frac{\delta_1^2}{\delta_2^2}$ i vegeu que també mena a l'impossible.

184. Aquí Euclides suposa que, donades tres superfícies S_1, δ_1^2 i δ_2^2, existeix la seva *quarta proporcional* S. Però això solament ho demostra en el cas de tres rectes a EVI 12. Vegeu PLA (2018), p. 317. Així doncs, aquesta suposició no està justificada.

Problema 30. És correcta l'afirmació feta a la nota 158 (pàgina 57), si s'accepta l'ús del pas al límit? És cert que $\text{lím}_{n\to\infty}\mathcal{P}_n^1 = \mathcal{S}_1$? Per què no arribeu a una fal·làcia com la que vam veure al problema 12?[185]

Problema 31.

a) Donat un cilindre, si sobre la base hi construïm un polígon regular, podem formar un prisma que el tingui com a base i que sigui de la mateixa altura que el cilindre.

b) Apliqueu el mètode d'exhaustió d'un cercle amb polígons regulars —com al problema 23— i el fet que el volum d'un prisma és igual al producte de l'àrea de la base per l'altura, per establir, per doble reducció a l'absurd, que el volum d'un cilindre és igual al producte de l'àrea de la base per l'altura. [*Indicació*. Observeu que els prismes construïts sobre bases poligonals que exhaureixen el cercle també exhaureixen el cilindre.]

Problema 32. Les diagonals de dues cares oposades d'un paral·lelepípede són coplanàries?

Problema 33. Proveu que el volum d'una piràmide de base poligonal convexa és $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\,\mathcal{S} \times h$. [*Indicació*. Podeu usar càlcul integral.]

Problema 34. Proveu que la raó entre els volums de dues piràmides semblants és igual a la raó triple de les arestes corresponents.

Problema 35. Proveu les proposicions Exii 16 i 17 (pàgines 530 i 531). [*Indicació*. En la demostració d'Exii 17, tingueu en compte els dos problemes següents.]

Problema 36. Proveu l'afirmació de la nota 1042 (pàgina 536).

Problema 37. Considereu tres cordes iguals SK, KB i BO d'un cercle de centre W, de manera que la corda SO sigui més curta que les altres tres.

Proveu que $KB^2 > 2\,BW^2$, seguint els ítems:

a) Els tres arcs $\widehat{SK}, \widehat{KB}$ i $\widehat{BO}$ són iguals. [*Indicació*. Vegeu Eiii 28.]

b) L'arc $\widehat{SO}$ és més petit que els altres tres. [*Indicació*. Euclides omet aquest fet, que hauria d'haver establert al llibre iii.]

185. Pla (2016*b*), p. 263.

c) L'arc $\widehat{KB}$ és més gran que una quarta part de la circumferència.

d) L'angle central $\widehat{KWB}$ és obtús. [*Indicació*. Vegeu EVI 33.]

e) En el triangle obtusangle $KB^2 > KW^2 + WB^2$. [*Indicació*. Vegeu EII 12.]

f) Per tant, $KB^2 > 2\,BW^2$.

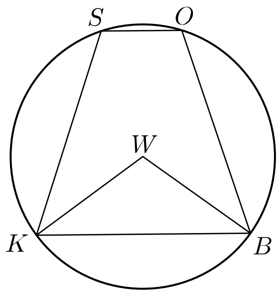


FIGURA 1.4. Problema 36

Problema 38. Sabríeu determinar el volum d'una esfera amb càlcul integral?

Problema 39. Proveu la proposició EXIII 2 i el lema que la segueix, de manera directa.

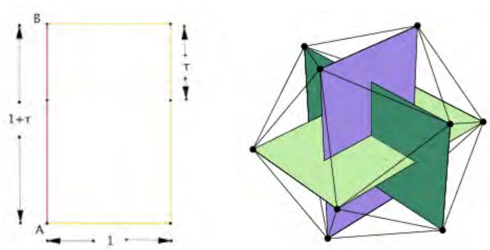
Problema 40. Proveu geomètricament la proposició següent: «Si dividim un segment en mitjana i extrema raó, i damunt la part gran portem la part petita; resulta que [la part gran] queda dividida en mitjana i extrema raó, i la part petita és la part gran [d'aquesta nova divisió].» [*Indicació*. Vegeu la proposició EXIII 5 (pàgina 549).]

Problema 41. Proveu que:

a) Un pentàgon amb tres angles iguals és regular. [*Indicació*. Vegeu EXIII 6 (pàgina 550).]

b) Si el pentàgon només en té dos, necessàriament no ho és.

Problema 42. Els tres rectangles auris i l'afirmació de Stillwell. Suposem tres rectangles auris que s'intersequen ortogonalment dos a dos, amb el centre comú. Si unim els seus vèrtexs obtenim un dodecaedre. [*Indicació*. Vegeu la figura següent i STILLWELL (1994), p. 8.]



Problema 43. Són correctes les afirmacions dels quatre ítems (pàgina 64) i els valors de les arestes que corresponen a cada poliedre regular?

Problema 44. Són correctes les quatre igualtats (pàgina 69) que relacionen les arestes d'alguns poliedres regulars?

Problema 45. Sabríeu demostrar les inscripcions de poliedres regulars descrites a les pàgines 69-70?

Problema 46.

a) Feu en cartolina les plantilles dels cinc sòlids platònics.
b) Computeu la suma dels valors dels angles plans que concorren en un vèrtex.
c) En un vèrtex poden concórrer-hi sis triangles equilàters? I quatre quadrats? I quatre pentàgons regulars?
d) Conjectureu que, malgrat la resposta anterior, no podem construir cap altre sòlid platònic.

[*Indicació*. Observeu que el resultat establert a la pàgina 590 és plausible. Aquest és un exercici molt simple que permet adonar-se de què significa la «plausibilitat» d'un resultat matemàtic.]

Problema 47. Sabeu quin és el valor dels angles sòlids dels sòlids platònics? En cas afirmatiu, completeu el quadre de l'exercici 51 (pàgina 70).

Problema 48. Proveu que la mitjana i extrema raó del segment unió de dos segments és la suma de les mitjanes i extrema raó de cada un dels segments. És a dir, suposeu que $(a' :=)A'B'$ i $(a'' :=)$ $A''B''$ són dos segments. Siguin C' i C'' els punts que els divideixen en mitjana i extrema raó en què $(m' :=)A'C'$ i $(m'' :=)A''C''$ són les parts més grans. Considereu un segment $(a = a' + a'' :=)AB$ equivalent als segments $A'B'$ i $A''B''$ junts. El dividim pel punt C en mitjana i extrema raó. Proveu que AC equival a $A'C'$ i $A''C''$ junts. [*Indicació*. Tot rau a veure que les raons $\frac{A'B'}{A'C'}$ i $\frac{A''B''}{A''C''}$ són iguals i igual a $\frac{AB}{AC}$. Feu-ho *a*) algebraicament. *b*) Geomètricament, usant la construcció que Euclides fa a Eɪɪ 11 o bé considerant dos pentàgons regulars convenients concèntrics.]

Problema 49. Proveu les desigualtats $a_4 > a_8 > a_{20} > a_{12}$, en què a_4, a_8, a_{20} i a_{12} designen les arestes del tetraedre, l'octaedre, l'icosaedre i el dodecaedre.

Què passa amb l'aresta a_6?

1.8 Algorismes

Programa 1. Feu un algorisme que simuli l'algorisme d'Euclides per a la determinació del màxim comú divisor de dos nombres m, n, donats. Useu-lo per donar els mcd de les parelles de l'exercici 3 (pàgina 7) o de l'ítem *a* del problema 3 (pàgina 71).

Anàlogament, per al mínim comú múltiple.

Programa 2. Feu un algorisme que, donats tres nombres m, n i p, digui «sí» si $(m, n, p) \times [m, n, p] = m \times n \times p$, i «no» si $(m, n, p) \times [m, n, p] \neq m \times n \times p$.

Programa 3. Feu un algorisme que factoritzi un nombre natural n en nombres primers.

I, usant-lo, un altre que digui quants divisors positius diferents té el nombre i els mostri tots.

Programa 4. Feu un programa que doni la suma de tots els divisors positius de n.

Programa 5. Feu un algorisme que factoritzi una parella de nombres naturals en nombres primers. Seguidament, que formi el nombre que obtenim agafant, de cada descomposició, els nombres primers amb l'exponent menor dels exponents que el nombre primer té en cadascuna de les descomposicions.

Useu aquest algorisme per donar els mcd de les parelles de l'exercici 3 (pàgina 7) o de l'ítem *a* del problema 3 (pàgina 71).

Programa 6. Siguin $2, 3, 5, \ldots, p_k$ els k primers nombres primers.

Feu un programa que calculi, per a $k \leq 20$, el nombre $E_k = 2 \times 3 \times 5 \times \cdots \times p_k + 1$.

I un altre que classifiqui els nombres E_k en primers i en compostos. I que, en el cas dels compostos, doni un nombre primer que els divideixi.

Programa 7. Feu un programa que doni els n primers nombres de Mersenne $M_k := 2^k - 1$.

Programa 8. Feu un programa que classifiqui els nombres de Mersenne en primers i en compostos.

Programa 9. Feu un programa que proporcioni els set primers nombres perfectes (parells).

Programa 10. Feu un programa que calculi els nombres de la forma $2^{2^n} + 1, n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Programa 11. Feu un programa que digui quin dels nombres anteriors és primer i quin és compost.

Programa 12. Feu un programa que classifiqui els nombres primers més petits que 2.000 en les formes $4n - 1$ i $4n + 1$.

Programa 13. Feu un programa que escrigui els nombres primers de la forma $4n + 1$ com a suma de dos quadrats.

Programa 14. Feu un programa que calculi els nombres de la forma $(2n)^2 + 1 < 2.000$, i digui quins són primers i quins no.

En aquest segon cas, doneu un divisor primer.

Programa 15. Feu un programa que, entrant-hi els valors reals de a, b i c, resolgui, al cos $\mathbb{R}$ dels nombres reals, l'equació quadràtica $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ quan sigui possible, i digui «irresoluble» quan no ho sigui.

Programa 16. Feu un programa que doni el valor de la mitjana i extrema raó d'un segment de longitud 1.

Programa 17. Feu un algorisme que, per a cada terna de nombres $k \in \mathbb{N}$, i a i $r \in \mathbb{R}$, simuli la fórmula d'Euclides que proporciona la suma S_k dels k termes de la progressió geomètrica de primer terme a, raó r.

Apliqueu-lo al cas en què $a = 1, r = 2$. I, per a cada valor de $k \in \mathbb{N}$ que hi entreu, feu que calculi S_k i $2^{k+1} - 1$ i constati que tots dos valors són iguals.

Programa 18. Feu l'algorisme que calculi els deu primers nombres de Fermat i indiqui quins són primers i quins són compostos?

Programa 19. Feu l'algorisme que resolgui la qüestió plantejada al problema 14 (pàgina 74) i apliqueu-lo al cas concret que s'hi planteja.

Programa 20. Useu GeoGebra, o qualsevol altre programa, per:
a) Dividir un segment en mitjana i extrema raó.
b) Dibuixar el rectangle auri corresponent.

Programa 21. Useu GeoGebra, o qualsevol altre programa, per dibuixar el polígon regular de n costats, per a cada valor $n \leq 100$, però limitant-vos als valors $3, 4, 5$ i 15, i els seus dobles successius.

Programa 22. Feu un programa que associï a cada poliedre regular la longitud de l'aresta, en funció dels radis r i R de l'esfera inscrita i de la circumscrita, respectivament.

Programa 23. Amb un programa de dibuix geomètric —GeoGebra, per exemple— feu les plantilles dels cinc sòlids platònics amb les «pestanyes» adequades per tal que, un cop les hàgiu imprès en cartolina, les pugueu retallar i enganxar. [*Indicació.* Vegeu el problema 46.]

Programa 24. Feu un programa que, per a a, v, c de cada un dels sòlids platònics, calculi totes les possibilitats de l'expressió genèrica $\pm a \pm v \pm c$ i digui si alguna de les determinacions possibles dona el mateix valor per a tots els sòlids platònics. Aquest algorisme proporciona la fórmula d'Euler. [*Indicació.* Vegeu l'exercici 51 (pàgina 70).]

Apèndix A

Text dels *Elements* (Στοιχεῖα) d'Euclides. Llibres VII, VIII, IX, X, XI, XII i XIII

> [...] Parce que presque tout ce que les hommes ont dit de mieux a été dit en grec.[186]
>
> MARGUERITE YOUCERNAR

A.1 L'aritmètica: EVII, EVIII i EIX

Comentaris generals dels tres llibres aritmètics. Els llibres VII, VIII i IX són aritmètics.[187] Com ja hem dit (pàgina 2), constitueixen una anomalia dins del conjunt de l'obra. Els seus continguts tenen l'origen a l'Escola pitagòrica i, des d'aquest punt de vista, s'haurien hagut de situar abans dels llibres eudoxians V i VI. Ara bé, atesa la seva independència de la resta, es podrien haver constituït com un altre text o, en tot cas, com

186. «Perquè gairebé tot el que els homes han dit de millor, ho han dit en grec.» YOUCERNAR (1948), edició francesa de 1951, p. 52.

187. Vegeu HEATH (1925), volum II, p. 277-426; VERA (1970), volum I, p. 829-860; FRAJESE i MACCIONI (1970), p. 419-563; KAYAS (1978), volum II, p. 1-68; PUERTAS (1994), p. 111-240; VITRAC (1994), p. 247-466; ACERBI (2007), p. 1090-1229. Vegeu també <http://www.opera-platonis.de/euklid/>, llibres VII, VIII i IX, i <http://farside.ph.uteuxas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf>, p. 193-280.

un apèndix final. Però la distribució dels *Elements*, tal com ens ha arribat, els situa entre els llibres elementals de la geometria plana i els de l'estereometria o geometria sòlida, de caràcter superior. Una explicació possible d'aquesta distribució és que, per Euclides, representaven un precedent epistemològic del llibre X, que també és aritmètic però que tracta dels [segments] irracionals i, per tant, necessita la teoria de la proporció eudoxiana.

En aquests llibres, les figures són absolutament ideals, ja que s'hi usen segments rectilinis per designar nombres naturals que solament serveixen per ajudar a seguir el fil del raonament.[188] Tanmateix, per distingir-los de la representació de segments pròpiament dits i de magnituds no numèriques, hem dibuixat verticalment els segments que representen nombres naturals.

Al llibre X [EX 1 i EX 3] s'afirma que, quan hi ha commensurabilitat entre magnituds, es dona l'algorisme d'Euclides —és a dir, que l'anomenada *antifèresi* (ἀνθυφαιρέω) és finita— ja que, de fet, la commensurabilitat de dues magnituds es pot representar com una raó entre dos nombres naturals [EX 5, 6, 7 i 8].

I, atès que els objectes d'aquest llibre són magnituds i segments [rectilinis], semblaria més idoni que seguís el V —o el VI— i servís per donar entrada a la raó entre nombres [naturals]. Però Euclides, a l'inici del llibre X, necessita recórrer a la definició DVII 20 i a alguns resultats aritmètics, molt pocs, del VIII per establir la «construcció» dels segments irracionals.

A.1.1 Llibre setè: EVII

p. 4 **Comentaris.** Aquest llibre conté totes les definicions dels termes que s'empren en els tres aritmètics: en total, vint-i-dues.

188. És curiós que Euclides, seguint l'Escola pitagòrica, no usi punts per designar els nombres naturals. Vegeu PLA (2016*b*), p. 110.

Això fa que els altres dos, a diferència dels set precedents, no continguin cap definició.

Entre les trenta-nou proposicions que s'hi estableixen trobem l'«algorisme d'Euclides» per a determinar el màxim comú divisor de dos nombres, que obre el llibre; els principis de la divisibilitat numèrica i la teoria dels nombres racionals, en termes de la teoria de la proporció; l'establiment del representant canònic de les raons numèriques, amb antecedent i consegüent mínims, i la propietat commutativa del producte de nombres naturals. Finalment, la determinació del mínim comú múltiple clou aquest llibre introductori, però essencial, de l'aritmètica pitagòrica passada pel sedàs del geòmetra d'Alexandria.

[Text del llibre VII]

A.1.1*a* Les definicions (Ὅροι)[189] p. 5

DVII 1. La *unitat* (μονάς) és el que fa que cada objecte existent pugui ser anomenat «u».[190]

---

189. HEATH (1925), volum II, p. 279-295; FRAJESE i MACCIONI (1970), p. 419-423; PUERTAS (1994), p. 111-115; VITRAC (1994), p. 247-259.

190. La unitat és, doncs, un concepte metafísic i no es considera un nombre en si mateixa. Malgrat tot, com veurem, a vegades s'ha d'acceptar que la unitat és un nombre: per exemple, en les definicions de «nombre primer» [DVII 11] i de «nombres primers entre si» [DVII 12].

Aquesta definició va ser traduïda per Boeci i divulgada per Isidor de Sevilla: «Nam unum semen numeri esse, non numerorum» (ISIDOR DE SEVILLA (2004), edició electrònica, p. 414).

Per a una anàlisi de la diferència entre «unitat» i «nombre», vegeu ARISTÒTIL (2000), llibre V, capítol 6, 1016b 16 i 22-30, edició castellana, p. 221: «"Ser u" consisteix a "ser principi de nombre". [...] Sempre la "unitat" és el que és indivisible en quantitat o en classe. El que és totalment indivisible en quantitat s'anomena "mònada", si no té posició, i "punt", si en té; i "línia", "superfície" i "cos" (o "sòlid") quan és divisible en una, dues o tres dimensions, respectivament.» Vegeu també: llibre X, capítol 1, 1052b 15-20; 1053b 3-9, edició castellana, p. 395-396, i 398; i, a més, llibre XIII, capítol 8, 1083a 1-2, edició castellana, p. 533: «Abans que res, cal delimitar quina és, si n'hi ha, la diferència entre el nombre i la unitat.» I, finalment, llibre XIV, capítol 1, 1088a 4-8, edició castellana, DVII 2. El *nombre* (αριθμός) és una multitud d'unitats.[191]

DVII 3. Un nombre és *part* (μέρος) d'un altre, un petit d'un gran, quan [el petit] mesura (καταμετρῆ) el gran.[192]

DVII 4. Però el petit és *parts* [del gran] (μέρη) quan no el mesura.[193]

DVII 5. I el gran és *múltiple* (πολλαπλάσιος) del petit quan aquest el mesura.

DVII 6. El nombre *parell* (ἄρτιος) és el [que es pot] dimidiar.[194]

DVII 7. I el nombre *senar* (περισσός) és el [que] no [es pot] dimidiar,

---

p. 536: «I, efectivament, d'acord amb la raó: "u" significa que és mesura d'una certa pluralitat, i "nombre" que es tracta d'una pluralitat mesurada i d'una pluralitat de mesures. Per això, lògicament, la unitat no és un nombre ja que la mesura tampoc no és mesures sinó un principi, com l'u.»

191. Cal entendre una quantitat pròpia. Defineix, doncs, els nombres naturals més grans que la unitat.

Nicòmac de Gerasa parla de «multitud limitada» (πλῆθος ὡρισμένον), de «col·lecció d'unitats» (μονάδων σύστημα) i de «sèrie de quantitats fetes d'unitats» (ποσότητος χύμα ἐκ μονάδων συγκείμενον) (NICÒMAC (1926), llibre I, capítol I, 1, edició anglesa, p. 190; VERA (1970), volum II, p. 913). Aquesta definició, com l'anterior, va ser traduïda per Boeci i divulgada per Isidor de Sevilla: «Numerus autem est multitudo ex unitatibus constituta.» ISIDOR DE SEVILLA (2004), edició electrònica, p. 414.

192. De manera explícita, Euclides suposa que els nombres naturals són comparables. Formalment, si $m, n \in \mathbb{N}, (n < m), n|m$ si, i només si, existeix un nombre natural k, de manera que $m = k\,n := n + \cdots + n$ (k sumands). Aquesta dualitat entre els nombres m, n i k és la que recull l'expressió *mesura* (καταμετρῆ).

193. Es diu que el petit és «part alíquota» o «fracció» del gran. Formalment, existeixen dos nombres naturals $\ell < k$ amb $k\,n = \ell\,m$, és a dir, $n = \frac{\ell}{k}\,m$, amb $\frac{\ell}{k} < 1$. Nosaltres usarem l'expressió «part alíquota» (vegeu la nota 219) i reservarem «parts» per fer el plural de «part» —«divisor».

Fixem-nos que, si bé les definicions DVII 3 i 5 són les mateixes que DV 1 i DV 2 però aplicades als nombres naturals, aquesta definició correspondria a la de «raó», DV 4. I això fa pensar que, per Euclides, els nombres no eren magnituds pròpiament; encara que, com ja hem indicat, les raons de magnituds commensurables poden ser tractades com raons numèriques.

De fet, implícitament, suposa que el petit és «parts» del gran si hi ha un tros [un nombre contingut en el petit, és a dir, més petit que el petit, una quantitat menor d'unitats] que és part del gran. Vegeu EVII 6.

194. Però Euclides no precisa què entén per la «meitat» d'un nombre.

o que difereix, d'un nombre parell, una unitat.[195]

DVII 8. El nombre *parellament parell* (ἀρτιάκις ἄρτιος) és [el nombre que pot ser] mesurat per un nombre parell un nombre parell de vegades.[196]

DVII 9. El nombre *parellament senar* (ἄρτιάκις δὲ περισσός) és el nombre que és parell el nombre senar de vegades.[197]

DVII 10. El nombre *senarment senar* (περισσάκις δὲ περισσός) és un nombre que és senar un nombre senar de vegades.[198]

DVII 11. El nombre *primer* (πρῶτος) és el que solament és mesurat per la unitat.[199]

---

195. Observem que usa la unitat com un nombre sempre que la diferència de dos nombres en sigui un. Ateses les definicions, el nombre parell està format per dues quantitats d'unitats iguals i el senar, per dues quantitats d'unitats una de les quals té una unitat més que l'altra. Formalment, parell: $k + k = 2\,k$; senar, $k + (k + 1) = 2\,k + 1$.

196. És, doncs, de la forma $2\,k \times 2\,\ell$. Però, alhora, pot ser també parellament senar, $2\,k' \times \ell'$, amb ℓ' senar. Vegeu EIX 34. Ara bé, Nicòmac de Gerasa, Teó d'Esmirna i Jàmblic opinen, molt més creïble, que un nombre parell-parell és de la forma 2^k, és a dir, és un nombre que no admet la possibilitat de ser parellament senar. Per a aquesta classificació dels nombres, vegeu, *in extenso*, NICÒMAC (1926), I, 8-12, edició anglesa, p. 192-203.

197. Hem d'entendre que és un nombre de la forma $2^k\,(2\ell + 1)$, en què $\ell \geq 1$. Aquesta mena de nombres és molt important, com veurem a EIX 36.

198. Hem d'entendre que és un nombre que descompon en producte de dos nombres senars. Malgrat que THOMAS (1939), volum I, p. 69, introdueix el nombre «senarment parell», aquesta classe de nombres no es troba en les definicions dels *Elements*. Ara bé, al *Parmènides* de Plató, 143 d 1-143 e 5, edició catalana, p. 84-85, els trobem tots quatre. La qüestió que es planteja és si el «parellament senar» és de la forma $2\,(2\,\ell + 1)$ i el senarment parell de la forma $2^k\,(2\,\ell + 1), k > 1$. En el cas que ens ocupa, però, aquesta dualitat no hi és.

199. Aquesta definició i les dues següents, molt probablement d'arrel pitagòrica, són importantíssimes per als llibres aritmètics dels *Elements*.

Val la pena observar que, per DVII 2, tot nombre és mesurat per la unitat ja que es compon d'unitats. La Nc 5 exclou la possibilitat que un nombre sigui mesurat per si mateix. Aristòtil, atès que no admet la unitat com a nombre, és més radical: «Un nombre primer no té divisors» (ARISTÒTIL (1987), II, 13, edició castellana, p. 421-422). Per Euclides, en canvi, la unitat n'és l'únic divisor.

Així doncs, per Euclides, un nombre p és «primer» si, i només si, per a

Dvii 12. Els nombres *primers entre si*[200] (πρῶτοι πρός ἀλλήλος ἀριθμοί) són els que solament admeten la unitat com a mesura comuna.[201]

Dvii 13. El nombre *compost* (σύνθετος) és el [que admet] un nombre com a mesura.[202]

Dvii 14. Els nombres diversos són *compostos entre si* (σύνθετοι πρός ἀλλήλους ἀριθμοί) si, i només si, admeten un nombre com a divisor comú.[203]

Dvii 15. El *producte* (πολλαπλασσιάζειν) d'un nombre per un [altre] és el nombre que resulta quan sumem el primer amb si mateix tantes vegades com unitats té l'altre.[204]

Dvii 16. El nombre *pla* (ἐπίπεδος) és el producte de dos nombres que s'anomenen *costats* (πλευράς).[205]

---

cada $k \in \mathbb{N}, k \neq p$, quan $k|p$, aleshores $k = 1$. A vegades, se l'anomena *indescomponible*. Recordem que Timàrides de Paros l'anomenava «rectilini» Pla (2016*b*), p. 332.

200. També anomenats *nombres coprimers*.

Pel que fa a aquesta classificació —primer/compost—, vegeu Nicòmac (1926), capítols xi-xii, edició anglesa, p. 201-203. Al capítol xiii, fa referència al «garbell d'Eratòstenes», un algorisme iteratiu, útil per a trobar els nombres primers, que no és en l'obra euclidiana.

201. Siguin $m, n \in \mathbb{N}$. Diem que m i n són «primers entre si» si, i només si, per a tot $k \in \mathbb{N}$, si $k|m$ i $k|n$, aleshores $k = 1$.

Observem que Euclides es dota d'un «element» [Evii 1] relatiu als nombres primers entre si, abans d'establir l'algorisme d'Euclides.

202. Pel que ja hem dit abans, aquest nombre no és ni la unitat —que no és un nombre— ni el mateix nombre —que no pot ser-ne mai part.

Formalment, el nombre natural $n \in \mathbb{N}$ és «compost» si, i només si, existeix un $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 1$ i $k \neq n$, i $k|n$.

203. Vegeu la nota anterior.

204. Diu: Ἀριθμός ἀριθμόν πολλαπλασιάζειν λέγεται i, seguidament, estableix la definició més primitiva i clàssica de multiplicació o producte de dos nombres. Formalment, si $m, n \in \mathbb{N}$, $m \times n = m + \overset{n)}{\cdots} + m$. Diu també que «multiplica» els dos nombres. De fet, és un abreujament de la suma d'un nombre amb si mateix tantes vegades com unitats té l'altre.

205. Hi veiem un lligam entre nombres i geometria, en la línia dels nombres figurats que ja vam tractar a Pla (2016*b*), p. 126. Els conceptes usats són indubtablement pitagòrics. En aquest cas, el «costat» és un nombre.

Dvii 17. Un nombre és *sòlid* (στερεός) quan l'obtenim multiplicant tres costats.

Dvii 18. El nombre *quadrat* (τετράγωνος) l'obtenim multiplicant un nombre per un altre igual, o *formant-lo* (περιεχόμενος)[206] amb dos nombres iguals.

Dvii 19. El nombre *cub* (κύβος) l'obtenim multiplicant-lo per si mateix tres vegades, o formant-lo amb tres nombres iguals.

Dvii 20. Quatre nombres són *proporcionals* (ανάλογον)[207] quan el primer és el mateix múltiple, part o parts —part alíquota—, del segon que el tercer del quart.[208]

Dvii 21. Els nombres plans i sòlids *semblants* (ὁμοῖος) són els que tenen els costats proporcionals.[209]

Dvii 22. Un nombre és *perfecte* (τέλειος) quan és igual a [la suma de] les seves parts [pròpies].[210]

A.1.1*b* Les proposicions p. 7

[La teoria de la divisibilitat][211]

Evii 1. *Considerem dos nombres* [*naturals*] *diferents. Sostraiem el petit del gran* [*tantes vegades com podem*] *i iterem* [*el procés*]*. Si el residu que queda no mesura mai el* [*nombre*] *precedent fins que s'assoleix*

206. Del verb, περιέχω, 'que abraça'.

207. De fet, s'hauria d'escriure ἀνά λογόν, 'en proporció'.

208. És la rèplica de Dv 6. Si bé allà simplement deia «quan tenen la mateixa raó». De manera implícita, això suposa que «ser el mateix múltiple, part o part alíquota» és «tenir la mateixa raó».

209. Diu: «ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς.» Retrobem, doncs, la geometrització, és a dir, conceptes geomètrics en l'àmbit numèric.

210. En l'epistemologia euclidiana [Nc 5, a Pla (2018), p. 85], «pròpies» és redundant. Considera, però, que la unitat és una part del nombre.

Hi ha un acord força ampli a l'hora de considerar que aquest concepte de «nombre perfecte» és euclidià. Una raó que podria justificar-ho és el fet que Euclides clou els llibres aritmètics proporcionant un algorisme per a determinar els nombres perfectes (parells) [Eix 36].

211. Podem trobar un estudi molt acurat dels llibres aritmètics d'Euclides a Itard (1961). És aconsellable fer una lectura simbolitzada de cada enunciat i, sobretot, de les demostracions, com du a terme Heath (1925), volum ii. Vegeu la nota 222 (pàgina 94).

la unitat,[212] *els dos nombres donats són primers entre si.*[213]

Siguin AB i CD dos nombres diferents.[214]

[*Construcció.*] Sostraiem el petit del gran de manera continuada i iterem el procés.

Suposem que el residu obtingut no mesura mai [el residu] precedent fins que no s'aconsegueix l'u com a residu. ♣

Afirmo que AB i CD són primers entre si, és a dir, solament l'u mesura AB i CD alhora.

[*Demostració.*] Suposem que AB i CD no són primers entre si.[215]

Aleshores, algun nombre [natural] mesurarà els dos nombres. [Dvii 12]

Sigui E aquest nombre.[216]

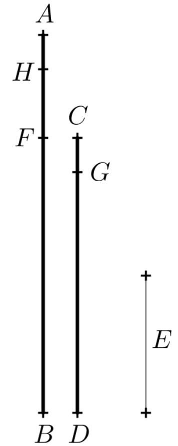


Figura Evii 1

[Portem successivament] el [segment] petit CD sobre el gran, [AB], fins a aconseguir determinar el punt F de manera que CD mesuri BF i FA sigui més petit que CD.[217]

---

212. És essencial expressar-ho així i, de retruc, acceptar la unitat com un nombre. Ja no tornarem a insistir més en el fet que, quan li cal, Euclides accepta la unitat com un nombre més.

213. Euclides dona un procediment per a escatir si dos nombres naturals donats són primers entre si. Cal que, en aplicar l'algorisme d'Euclides, s'obtingui l'u, és a dir, la unitat com a darrer residu. Vegeu la nota 212.

214. Per tal d'ajudar a copsar millor aquesta demostració, Euclides proporciona figures, que representarem amb segments rectilinis verticals. Aquesta representació és, doncs, ideal. Vegeu el darrer paràgraf de la pàgina 86.

215. Hipòtesi de l'absurd. Necessita la hipòtesi de l'absurd perquè no té cap garantia que el procés s'acabi, malgrat que, com veurem, aquest postulat —«que el procés s'acaba necessàriament»— l'usa més endavant.

Aquesta hipòtesi oculta —el «descens infinit» en paraules de Fermat (2008), p. 396 i següents— és essencial, com veurem a l'inici del llibre Ex 2 (pàgina 215).

216. Observem que, curiosament, usa la doble notació per designar els nombres naturals que representa mitjançant segments rectilinis: dues lletres o més, quan, per fer-ho més entenedor, ha de partir el nombre en parts, o una sola lletra quan no l'ha de partir.

217. Aquí Euclides empra la divisió euclidiana o divisió entera per de-

[Ara iterem el procés.] AF mesura DG i deixa un residu GC més petit [que DG];
[fins que] GC mesura FH i deixa l'u, HA, com a residu. [hipòtesi]

Però, atès que E mesura CD i CD mesura BF,
E també mesura BF. [transitivitat][218]

I [E] mesura el nombre total BA,
per tant,[219] també mesura la diferència AF. [per compatibilitat][220]

A més, AF mesura DG, per tant, E també el mesura.

I [E] mesura el nombre total DC,
per tant, també mesura el residu CG.

I CG mesura FH.

Per tant, E mesura FH i el nombre total FA.

Així doncs, mesura el residu AH, que és l'u. I això és impossible.[221]

Cap nombre no mesura AB i CD alhora, per tant, aquests nombres són primers entre si. [Dvii 12]

---

fecte, que depèn del fet que el procés d'antifèresi és limitat. La possibilitat que sigui il·limitat està exclosa, encara que aquest fet no s'hagi explicitat. Vegeu la nota 215 (pàgina 92).

218. Euclides recorre a la transitivitat que, com ja hem indicat (pàgina 5), ni la proposa com a postulat ni l'estableix com a «element» previ a la demostració.

219. Podria haver dit, simplement, «iterem el procés anterior i el tornem a iterar tantes vegades com calgui». Fixem-nos que l'algorisme descrit en la construcció és de tal naturalesa que els divisors comuns dels dos nombres inicialment donats s'hereten, és a dir, la part petita i el residu admeten els divisors dels nombres inicials en cada etapa del procés.

220. Aquí usa la compatibilitat amb la diferència (página 5). Ens trobem en una situació anàloga a la que ja hem comentat a la nota 218.

Atenció! A vegades, quan dos nombres n, m compleixen $n < m$, es diu també que [el nombre] n és una «part» del [nombre] m, però ara «part» és col·loquial i engloba les dues possibilitats, «part» i «parts», definides al text [Evii 3 i Evii 4]. Això justifica que alguns autors usin «divisor» en lloc de «part», i «fracció» o «part alíquota» en lloc de «parts». Aleshores, «ser una part» significa «ser més petit» en el sentit d'«estar contingut dins». Nosaltres usarem l'expressió «part alíquota» per designar el terme tècnic de «parts», introduït per Euclides a Dvii 4. Això no obstant, el text euclidià és prou clar perquè l'ús dels termes tècnics «part» i «parts» no comporti cap mena de confusió amb l'ús col·loquial «una part de».

221. Cap nombre no divideix la unitat, que és allò en virtut del qual els nombres són nombres. Vegeu la nota 190 (pàgina 87).

I això és el que volíem demostrar. ♠[222]

Evii 2. *Volem trobar el màxim comú divisor de dos nombres donats que no són primers entre si.*

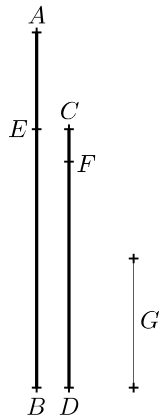


Figura Evii 2

Siguin AB i CD els dos nombres donats [que] no són primers entre si.

Volem determinar el màxim comú divisor de AB i CD.[223]

[*Demostració.*][224] *a*) Si CD mesura AB,
CD és un comú divisor de CD i AB,
atès que [CD] també es mesura a si mateix.[225]

I, a més, [CD] és la [mesura comuna a AB i CD] més gran possible,
ja que no hi ha cap nombre més gran que CD que mesuri CD. ♠

b) Suposem que CD no mesura AB.

---

222. Hem fet el que s'anomena l'«algorisme d'Euclides ("cap avall")». Tenim m i n, amb $m > n$. Fem $m = k_1 \times n + r_1, n = k_2 \times r_1 + r_2, r_1 = k_3 \times r_2 + r_3, \ldots, r_{s-3} = k_{s-1} \times r_{s-2} + r_{s-1}, r_{s-2} = k_s \times r_{s-1} + r_s$, amb $m > n > r_1 > r_2 > \cdots > r_{s-2} > r_{s-1} > r_s > 0$. I ara suposem que $r_s | r_{s-1}$. Aquesta afirmació és important perquè, en no disposar del zero, Euclides no pot dir que $r_{s-1} = k_{s+1} \times r_s + r_{s+1}$, amb $r_{s+1} = 0$.

Aleshores, amb aquesta darrera observació tenim, procedint «cap amunt»:

1. $r_s | r_s$ i $r_s | r_{s-1}$. I, de retruc, $r_s | r_{s-2}$ (compatibilitat, pàgina 5).
2. Tot nombre natural p que divideix r_{j+2} i r_{j+1} divideix r_j (amb $j = 1, \ldots, s-2$).
3. En definitiva, seguint el procés dos passos més, tot nombre natural p que divideix r_s —amb l'observació anterior— divideix m, n.

Per a acabar, indiquem que Heath (1925), volum ii, p. 296-426, dedica una nota explicativa al significat i als passos de la demostració de cadascuna de les proposicions dels llibres vii, viii i ix, en temes algebraics, cosa que fa que les demostracions esdevinguin molt més entenedores. Fer-ho és molt aconsellable. Vegeu, per exemple, la demostració d'Evii 8 (pàgina 102) tal com l'ofereix Euclides i tal com s'entén si es tradueix a llenguatge algebraic.

223. La part, o divisor, més gran comuna a tots dos.

224. Disjunció de casos.

225. Aquí es trenca la limitació que imposa la noció comuna Nc 5.

[*Construcció.*] Aleshores, sostraiem el petit de[ls nombres] AB i CD del gran continuadament i de manera alternada,[226]
fins a assolir un nombre que mesuri el [nombre] precedent.[227] ♣

[*Demostració.*] Per hipòtesi [i per l'absurd], aquest nombre [que es mesura a si mateix i el precedent] no pot ser la unitat.[228] [EVII 1]

Així doncs, el [darrer] residu serà un nombre que mesura el precedent.

b_1) El nombre CD mesura [el nombre] BE [tant com pot],
i deixa com a residu [final el nombre] AE més petit [que CD].

A més, EA mesura DF [tant com pot] i deixa el residu FC [més petit que EA],
i [el nombre] CF mesura AE.[229]

Per tant, CF mesura AE i AE mesura DF.

En definitiva, CF també mesura DF i a si mateix.
[per transitivitat]

Resulta, doncs, que CF mesura el total CD, [per compatibilitat]
i CD mesura BE.

Per tant, CF també mesura BE i EA. [per transitivitat]

En conseqüència, [CF] mesura el total AB [per compatibilitat]
i CD.

I CF mesura AB i CD alhora.

En definitiva, CF és una mesura comuna als dos nombres inicials AB i CD. ♠

Afirmo que [CF] és la [mesura comuna a AB i CD] més gran.

b_2) Si CF no n'és la mesura comuna més gran,[230]
n'hi ha una més gran que CF.

---

226. L'aplicació de l'algorisme descrit en la demostració d'EVII 1.

227. El procés té un final. Vegeu la nota 222 (pàgina 94).

228. Si fos la unitat, AB i CD serien primers entre si en contra de la hipòtesi.

229. Aquí s'inicia el retorn del darrer residu cap als dos nombres inicials. Es mesura a si mateix i el precedent, i aleshores s'itera cap amunt (nota 222, pàgina 94).

Aquest camí és el que serveix, de fet, per resoldre a la diofàntica lineal, cosa que no s'esmenta als *Elements*.

230. Hipòtesi de l'absurd.

En diem G.

Atès que G mesura CD, i CD mesura BE, resulta que G també mesura BE. [per transitivitat]

Però [G] mesura AB i, per tant, també mesura el residu AE.[231] [per compatibilitat]

Però AE mesura DF i, en conseqüència, G mesura DF [per transitivitat] i el total DC.

Per tant, G mesura el residu CF. [per compatibilitat]

O sigui, que el gran mesura el petit. I això és impossible.

En definitiva, cap nombre [G] més gran que CF mesura els nombres AB i CD alhora. ♠

En conseqüència, CF[232] és el màxim comú divisor de AB i CD. I això és el que volíem demostrar. ♠

Evii 2, porisma. *Si un nombre mesura dos nombres, també en mesura el màxim comú divisor.*[233]
I això és el que volíem demostrar. ♠

Evii 3. *Volem trobar el màxim comú divisor de tres nombres naturals donats que no són primers entre si.*
Siguin A, B i C tres nombres donats [que] no [siguin] primers entre si.

Volem determinar-ne el màxim comú divisor.

[*Demostració*.] Sigui D el màxim comú divisor de A i B.[234] [Evii 2]

Aleshores, es dona una d'aquestes dues possibilitats:[235]

---

231. Ara iterem cap avall per tal d'arribar al darrer residu i veure que G el mesura.

232. Recordem que és el primer residu que trobem en el procés iteratiu que mesura l'anterior. Això, en llenguatge actual, porta al fet que el residu següent és zero, però el zero no té cabuda en l'aritmètica grega i, per tant, tampoc no en té als *Elements* d'Euclides.

233. La demostració és el procés cap avall que acabem de fer.

234. Aquí cal que A i B no siguin primers entre si ja que, si ho són, el màxim comú divisor dels tres nombres és necessàriament u. Euclides omet aquest cas, d'altra banda trivial. Recordem que tres nombres poden ser primers entre si i, en canvi, no ser-ho dos a dos, com ara la terna $(6, 14, 21)$.

235. Disjunció de casos.

a) D mesura C.

b) D no mesura C.

a) D'antuvi suposem que D mesura C.

a_1) Atès que D també mesura A i B, D mesura A, B i C. ♠

Afirmo que D n'és el màxim [comú divisor].

a_2) En efecte, si D no n'és el màxim comú divisor,[236]

hi ha algun nombre més gran que D, en diem E, que mesura els [tres] nombres A, B i C.

Però, si E mesura A, B i C, també mesura A i B.

Per tant, E mesura el màxim comú divisor de A i B. [EVII 2, porisma]

Però D és el màxim comú divisor de A i B.

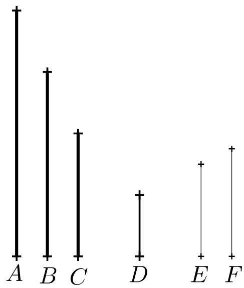


FIGURA EVII 3

Per tant, E mesura el màxim comú divisor D.

És a dir, el gran mesura el petit. I això és impossible.

De tot això en resulta que cap nombre més gran que D no pot ser mesurat pels [tres] nombres A, B i C alhora.

En definitiva, D és el màxim comú divisor de A, B i C. ♠

b) A continuació, suposem que D no mesura C.

En primer lloc, afirmo que C i D no són primers entre si.

b_1) Atès que A, B i C no són primers entre si,

hi ha un nombre que els mesura.

Ara bé, el nombre que els mesura també mesura A i B.

Per tant, mesura el màxim comú divisor, D, de A i B,

[EVII 2, porisma]

i, alhora, mesura C.

En conseqüència, hi ha un nombre que mesura els nombres C i D alhora.

Per tant, C i D no són primers entre si. ♠

Podem, doncs, determinar el seu màxim comú divisor, E. [EVII 2]

Atès que E mesura D i D mesura A i B,

E també mesura A i B. [per transitivitat]

236. Hipòtesi de l'absurd.

Però també mesura C.

Per tant, [el nombre] E mesura A, B i C.

Afirmo que [E] n'és el màxim [comú divisor].

b_2) Si E no és el màxim comú divisor de A, B i C,[237]
hi ha un nombre més gran que E, en diem F,
que mesura els tres nombres A, B i C.

Com que F mesura A, B i C, també mesura A i B.

Per tant, mesura el màxim comú divisor de A i B. [Evii 2, porisma]

Però D és el màxim comú divisor de A i B.

Per tant, F mesura D, i també C.

Així doncs, F mesura D i C.

En conseqüència, mesura el màxim comú divisor de D i C.
[Evii 2, porisma]

Però E és el màxim comú divisor de D i C.

Per tant, F mesura E, el gran mesura el petit. I això és impossible.

En definitiva, cap nombre més gran que E no mesura els nombres A, B i C.

I, per tant, E és el màxim comú divisor de A, B i C. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evii 4. *Tot nombre més petit que un altre n'és part o part alíquota*[, *el petit del gran*].

Siguin A i BC dos nombres, i BC el més petit de tots dos.

Afirmo que BC és part o part alíquota de A.

[*Demostració.*][238] Els nombres A i BC satisfan una d'aquestes dues possibilitats:[239]

a) Són primers entre si.

b) No són primers entre si.

a) En primer lloc, suposem que A i BC són primers entre si.

Si separem BC en les unitats que el formen, cada una d'aquestes

237. Hipòtesi de l'absurd.

238. És curiosa, aquesta demostració. Donats dos nombres, o bé un és part de l'altre —el mesura— o bé no ho és. I, aleshores, necessàriament n'és part alíquota, atès que totes dues definicions són excloents [Dvii 3 i Dvii 4, pàgina 88].

239. Disjunció de casos.

unitats també serà part de A. [DVII 2 i 3]

Per tant, BC és part alíquota de A.[240] [DVII 4] ♠

b) Si, en canvi, A i BC no són primers entre si, aleshores es dona una d'aquestes possibilitats:[241]

b_1) BC mesura A.

b_2) BC no mesura A.

b_1) Si BC mesura A, n'és una part. [DVII 3] ♠

b_2) En cas contrari, considerem el màxim comú divisor, D, de A i BC, [EVII 2]
i dividim BC en [les parts o els trossos][242] BE, EF i FC, iguals a D.

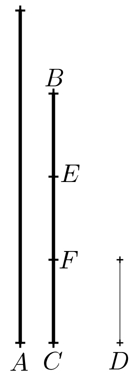


FIGURA EVII 4

Atès que D mesura A, D és part de A.

Però D és igual a cada una de les parts BE, EF i FC.

D'això en resulta que cada part BE, EF i FC també és una part de A. [per substitució][243]

Per tant, BC és part alíquota de A.[244] [DVII 4] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVII 5. *Si dos nombres són la mateixa part de dos nombres, la suma* [*dels primers*] *és la mateixa part de la suma* [*dels segons*].[245]

240. Si dos nombres, com A i BC, són primers entre si, cap no és part de l'altre.

241. Disjunció de casos.

242. Vegeu la nota 20 (pàgina 5). Recordeu que usem «part» i «parts» per designar «parts exactes», és a dir, «tros» o «divisor», i «trossos» o «divisors»; i «part alíquota» per designar «parts» en el sentit de DVII 4. No ho tornarem a repetir.

243. Apliquem el «principi de substitució» a la propietat «ser part». Si [el nombre] m és part de[l nombre] n i [el nombre] $m' = m$, aleshores m' també és part de n. Aquest principi també val per a les parts alíquotes. Vegeu PLA (2018), nota 318, p. 98.

244. Adonem-nos que, indirectament, Euclides dona una definició alternativa de «part alíquota» —o «parts», com en diu ell— d'un nombre. Hi ha un nombre, part pròpia de cada un dels nombres, però que els mesura tots dos una quantitat diferent de vegades. Quan els dos nombres són primers entre si, necessàriament la part pròpia és la unitat.

245. Formalment: si $m_1 = k \times n_1$ i $m_2 = k \times n_2$, aleshores la suma $m_1 + m_2 = k \times (n_1 + n_2)$. O, equivalentment, si $n_i = \frac{1}{k} m_i, i = 1, 2,$

Considerem que un nombre A és una part d'un [nombre] BC
i un altre [nombre] D és la mateixa part d'un altre [nombre] EF.

Afirmo que la suma[246] de A i D també és la mateixa part de la suma de BC i EF, que A ho és de BC.

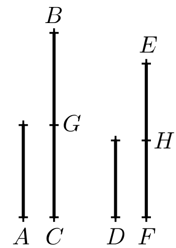


FIGURA EVII 5

[*Demostració.*][247] [El nombre] D és tantes vegades part del EF com el [nombre] A ho és del BC,
és a dir, BC conté tants nombres iguals a A com EF a D. [DVII 3]

Si [el nombre] BC queda dividit en [els nombres] BG i GC, tots iguals a[l nombre] A,
aleshores el nombre EF queda dividit en [les parts, que són nombres,] EH i HF, tots iguals a[l nombre] D.

En definitiva, la multitud de [divisions] BG, GC és igual a la multitud de [divisions] EH, HF.

I, atès que BG és igual a A, i EH a D,
resulta que BG i EH [junts] també són iguals a A i D [junts]. [Nc 2, iterat]

Anàlogament, GC i HF [junts] ho són a A i D [junts]. [Nc 2, iterat]

En definitiva, BC conté tants nombres iguals a A com BC i EF [junts en contenen d']iguals a A i D [junts].

Resulta, doncs, que BC és divisible per A tantes vegades com BC i EF [junts] ho són per la suma de A i D.

De la mateixa manera [i amb la mateixa quantitat] que A és part de BC, la suma A i D ho és de la suma BC i EF.
I això és el que volíem demostrar. ♠[248]

---

aleshores $n_1+n_2=\frac{1}{k}(m_1+m_2)$. En la demostració, Euclides usa aquesta equivalència de manera explícita: $m=k\times n$ si, i només si, $n=\frac{1}{k}m$.

246. Euclides considera que A està format per unitats i D també. Aleshores, $A+D$ conté totes les unitats que formen A i totes les que formen D.

247. La idea de la demostració és simple. Si $m_i=n_i+\overset{k)}{\cdots}+n_i$, $i=1,2$, aleshores $m_1+m_2=(n_1+\cdots+n_1)+(n_2+\cdots+n_2)=(n_1+n_2)+\cdots+(n_1+n_2)$ (k sumands). Però un nombre és una suma d'unitats: $n_i=1+\cdots+1$ (n_i sumands), $i=1,2$. El fet de recórrer a les unitats evita la commutativitat de la suma.

248. Com a porisma, en resulta la compatibilitat amb la suma. Aquesta proposició no depèn de les anteriors.

EVII 6. *Si dos nombres són la mateixa part alíquota de dos nombres, la suma [dels primers] és la mateixa part alíquota de la suma [dels segons].*[249]

Suposem que el nombre AB és part alíquota del nombre C
i un altre [nombre] DE és la mateixa part alíquota d'un altre F.

Afirmo que la suma AB i DE també és la mateixa part alíquota de la suma de C i F que AB ho és de C.

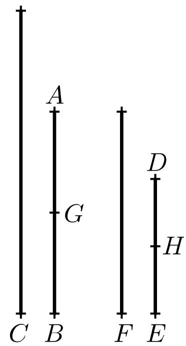


FIGURA EVII 6

[*Demostració.*][250] Atès que AB és part alíquota de C, i DE és la mateixa part alíquota de F,
resulta que F es compon de tantes parts[251] de DE com C de AB.

Així, tantes vegades com hem dividit AB en parts, AG i GB, de C,
hem dividit DE en parts, DH i HE, de F.

Per tant, la multitud de [divisions] AG, GB és igual a la multitud de [divisions] DH, HE.

I, atès que [cada] part AG és [part alíquota] de C,
resulta que [cada part] DH és la mateixa part alíquota de F.[DVII 4]

Aleshores, per a cada part AG de C, la suma de AG i DH és la mateixa part de la suma de C i F. [EVII 5]

Pel mateix raonament, cada cop que GB és [part] de C,
la suma de GB i HE és la mateixa part de la suma de C i F. [EVII 5]

En definitiva, la part alíquota que AB és de C, la suma de AB i DE ho és de la suma de C i F.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVII 7. *Si dos nombres són la mateixa part de dos [nombres], la diferència dels primers és la mateixa part de la diferència dels totals.*[252]

---

249. Formalment, si $m_i = \frac{k}{\ell} n_i$, amb $i = 1, 2$, aleshores $m_1 + m_2 = \frac{k}{\ell}(n_1 + n_2)$. Euclides usa el fet que $m = \frac{k}{\ell} n$ equival a $\ell \times m = k \times n$.

250. La demostració és obscura i el dibuix no ajuda gens a aclarir-la.

251. En el sentit de «divisors». Vegeu les notes 20 i 244 (pàgines 5 i 99, respectivament).

252. De manera una mica fosca, estableix l'anàleg d'EVII 5, però per a la diferència. Formalment, si $n_i = \frac{1}{k} m_i, i = 1, 2$, amb $n_1 < n_2$; aleshores $n_2 - n_1 = \frac{1}{k}(m_2 - m_1)$.

Sigui un nombre AB part d'un nombre CD del qual sostraiem AE, que és la mateixa part de CF [que sostraiem de CD].

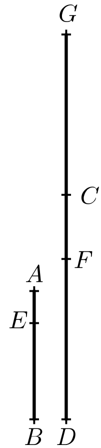


FIGURA EVII 7

Afirmo que el residu EB és la mateixa part del residu FD que [el total] AB ho és de[l total] CD.

[*Demostració.*] Per [a cada] part AE de CF, sigui EB la mateixa part de CG.

I, com que EB és la mateixa part de CG que la part AE és de CF,
resulta que cada part AE de CF és la mateixa part que AB de GF. [EVII 5]

I hem suposat que, per a [cada] part AE de CF, AB també és la mateixa part de CD.

En conseqüència, AB és la mateixa part de CD que de GF.

Per tant, GF i CD són iguals. [Nc 1 i 2, i DVII 15]

Sostraiem CF de tots dos.

Aleshores, els residus GC i FD són iguals. [Nc 3]

I, com que EB és la mateixa part de GC que AE de CF,
i GC i FD són iguals, [Nc 1]
tenim que, per a cada part AE de CF, EB és la mateixa part de FD. [per substitució]

Però AB és de CD la mateixa part que AE de CF.

En definitiva, el residu EB és la mateixa part del residu FD que el tot AB del tot CD.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVII 8. *Si dos nombres són la mateixa part alíquota de dos nombres [totals], aleshores el residu [del gran sobre el petit] és també la mateixa part alíquota del residu del nombre total gran sobre el petit.*[253]

Seguint els enunciats d'EVII 5 i EVII 6, aquesta proposició i la següent resultarien més clares si diguéssim: «Si dos nombres són la mateixa part [part alíquota] de dos nombres, la diferència [dels primers] és la mateixa part [part alíquota] de la diferència [dels segons].»

253. L'enunciat d'Euclides és fosc i l'hem adaptat d'una manera més clara. De fet, estableix l'anàleg d'EVII 6, però per a la diferència. Formalment, si $n_i = \frac{\ell}{k} m_i, i = 1, 2, n_1 < n_2$, aleshores $n_2 - n_1 = \frac{\ell}{k}(m_2 - m_1)$.

Sigui el nombre AB la mateixa part alíquota del nombre CD que el [nombre] AE que sostraiem [a AB] és de[l nombre] CF que sostraiem [a CD].

Afirmo que el residu EB també és la mateixa part alíquota del residu FD que el total AB del total CD.

[*Demostració.*][254] Considerem [el nombre] GH igual a AB.[255]

Aleshores, la part alíquota que GH és de CD, AE l'és de CF.

El nombre GH el dividim en les parts GK i KH de CD,[256]
i [el nombre] AE en les parts AL i LE de CF.

Així, la multitud de [divisions] GK, KH és igual a la multitud de [divisions] AL, LE.

I com que AL és la mateixa part de CF que GK de CD,
i CD és més gran que CF,
resulta que GK també és més gran que AL.[257]

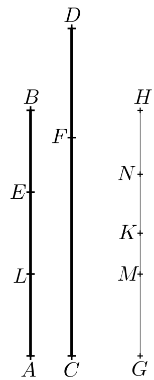


FIGURA EVII 8

Fem GM igual a AL.[258]

Aleshores, la part que GK és de CD, GM l'és de CF. [Nc 1, 2 i 3]

Per tant, el residu MK també és la mateixa part del residu FD que el tot GK és del tot CD. [EVII 7]

254. Vegeu la nota 222 (pàgina 94).

255. Fixem-nos que, quan Euclides fa això, es basa, d'alguna manera, en el fet que, en la figura geomètrica, allò que es representa són segments rectilinis perquè hi podem fer segments iguals. La qüestió que es planteja ara és: podem fer-hi nombres iguals? Acceptarem aquest fet i l'usarem a EVII 9 i EVII 25, i a EVIII 3 i EVIII 4, sense esmentar-lo. I, a més, si A i B són primers entre si, i C i D són iguals a A i B, respectivament; C i D també són primers entre si.

256. AB és part alíquota de CD i, de retruc, GH també. Hi ha una part de CD que, a més, és part de GH. Vegeu l'últim paràgraf de la nota 244 (pàgina 99).

257. Aquí usa el fet que, si $GK := \frac{1}{k}\,CD$, $AL := \frac{1}{k}\,CF$ i $CD > CF$; aleshores $GK > AL$.

258. Vegeu la nota 252 (pàgina 101).

De bell nou, la part que KH és de CD, EL l'és de CF,
i CD és més gran que CF.

Per tant, HK és més gran que EL.

Sigui KN igual a EL.[259]

Aleshores, la part que KH és de CD, KN l'és de CF. [Nc 1, 2 i 3]

D'això en resulta que el residu NH també és la mateixa part del residu FD que el tot KH és del tot CD. [Evii 7]

I hem vist que el residu MK és la mateixa part del residu FD que el tot GK és del tot CD.

En conseqüència, la suma de MK i NH és la mateixa part alíquota de DF que el tot HG és del tot CD. [Evii 6]

Però la suma de MK i NH és igual a EB, i HG a BA.

En definitiva, el residu EB també és la mateixa part alíquota del residu FD que el tot AB és del tot CD.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evii 9. *Si un nombre és una part d'un nombre, i un altre [nombre] és la mateixa part d'un altre, la part o part alíquota que el primer [nombre] és del tercer, el segon l'és del quart.*[260]

Siguin els nombres A i D la mateixa part dels nombres BC i EF, respectivament.

Afirmo que, alternativament, BC és la mateixa part o la mateixa part alíquota de EF que A ho és de D.

[*Demostració.*] Atès que D és la mateixa part de EF que A ho és de BC,

[el nombre] EF conté la mateixa quantitat de [nombres] iguals a D que BC iguals a A.

Dividim BC en [les parts] BG i GC iguals a A,
i EF en [les parts] EH i HF iguals a D. [Dvii 3]

El nombre de [divisions] BG, GC coincideix amb el de EH, HF.

Atès que els nombres BG i GC són iguals entre si,
que els nombres EH i HF també ho són

---

259. Vegeu la nota 255 (pàgina 103).

260. Simbòlicament, siguin $m_1 = \frac{1}{k}\, n_1$, i $m_2 = \frac{1}{k}\, n_2$. Si $m_1 = \frac{\ell}{\ell'} m_2$, aleshores $n_1 = \frac{\ell}{\ell'} n_2$.

i que la multitud de [divisions] BG, GC és igual a la multitud de [divisions] EH, HC,

resulta que GC és la mateixa part o la mateixa part alíquota de HF que BG de EH. [DVII 3]

I, aleshores, la suma BC és la mateixa part o la mateixa part alíquota de la suma EF que BG de EH. [EVII 5 i 6]

Però BG i EH són iguals a A i D, respectivament.

Així doncs, BC és la mateixa part o la mateixa part alíquota de EF que A de D. [per substitució]

I això és el que volíem demostrar. ♠

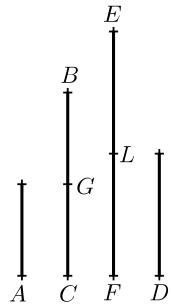


FIGURA EVII 9

EVII 10. *Si un nombre és part alíquota d'un altre, i un altre és la mateixa part alíquota d'un altre; també, alternativament, la part alíquota o la part que el primer és del tercer, el segon l'és del quart.*[261]

Considerem un nombre AB que és part alíquota de C
i un altre DE [que és] la mateixa part alíquota d'un altre F.

Afirmo que també, alternativament, C és la mateixa part alíquota o la mateixa part de F que AB de DE.

[*Demostració.*] Atès que les parts AB i DE són la mateixa part alíquota de C i F, respectivament,

resulta que AB conté tantes parts de C com DE de F.

Com que AB és la mateixa part alíquota de C que DE de F, DE conté tantes parts de F com AB en conté de C.

Considerem que hem dividit AB en les parts AG i GB de C,
i DE en les parts DH i HE de F.

Així, la multitud de [divisions] AG, GB és igual a la multitud de [divisions] DH, HE.

I, com que, per a cada part AG de C, DH és la mateixa part de F, resulta també que, alternativament, el que cada part o cada part alíquota AG és de DH, C ho és de F. [EVII 9]

261. Simbòlicament, sigui $m_1 = q\,n_1$ i $m_2 = q\,n_2$. Aleshores, si $m_1 = q'\,m_2$, aleshores $n_1 = q'\,n_2$, en què q, q' designen nombres racionals, és a dir, $q := \frac{k}{\ell}$ i $q' := \frac{k'}{\ell'}$.

Pel mateix [raonament], el que [cada] part o part alíquota GB és de HE, C ho és de F. [Evii 9]

Per tant, [el que cada] part o part alíquota AG és de DH, GB ho és de HE.

I, aleshores, el que [cada] part o part alíquota AG és de DH, AB ho és de DE. [Evii 5 i 6]

Però hem vist que el que [cada] part o part alíquota AG és de DH, C ho és de F.

I[, en definitiva,] el que [cada] part o part alíquota AB és de DE, C ho és de F.
[per substitució]

I això és el que volíem demostrar. ♠

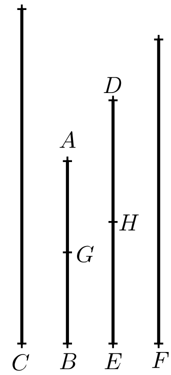


Figura Evii 10

Evii 11. *Si un nombre és a un altre nombre com una part que sostraiem [del primer és] a una [part] que sostraiem [del segon], els residus són entre si com els nombres [corresponents].*[262]

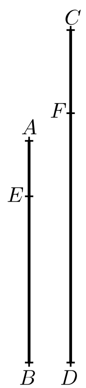


Figura Evii 11

Suposem que [el nombre] AB és al CD com el [nombre part] AE, que sostraiem [de AB], al [nombre part] CF, que sostraiem [de CE].

Afirmo que el residu EB és al residu FD com el tot AB al tot CD.

[*Demostració.*] Atès que AB és a CD com AE a CF, resulta que el que [cada] part o part alíquota AB és de CD, AE ho és de CF. [Dvii 20]

Per tant, el residu EB també és la mateixa part o part alíquota del residu FD que AB ho és de CD. [Evii 7 i 8]

Per tant, EB és a FD com AB a CD. [Dvii 20]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evii 12. *Si una multitud arbitrària de nombres és proporcional, un [dels primers nombres] és a un dels altres[, el corresponent,] com la [suma] dels primers a la [suma] dels segons.*[263]

262. Si $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$, aleshores $\frac{m_1-n_1}{m_2-n_2} = \frac{m_1}{m_2}$. És la proposició que, en el cas numèric, correspon a la Ev 19, que fa referència a magnituds.

263. Formalment, si $\frac{m_1}{n_1} = \cdots = \frac{m_k}{n_k}$, aleshores $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_1+\cdots+m_k}{n_1+\cdots+n_k}$. Ve-

Considerem una multitud arbitrària de nombres, A, B, C i D, proporcionals, [o sigui,] que A és a B com C a D.

Afirmo que A és a B com A i C [junts són] a B i D [junts].

[*Demostració*.] Atès que A és a B com C a D, el que [cada] part o part alíquota A és de B C ho és de D. [DVII 20]

Aleshores, la suma de A i C també és la mateixa part o part alíquota de la suma de B i D que A de B. [EVII 5 i 6]

Així doncs, A és a B com la suma de A i C a la de B i D. [DVII 20]

I això és el que volíem demostrar. ♠

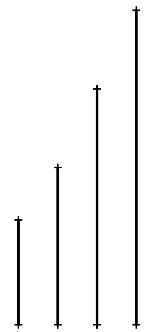


FIGURA EVII 12

EVII 13. *Si quatre nombres són proporcionals, també ho són* alternando.[264]

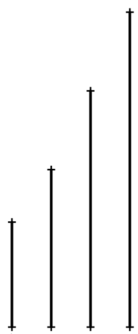


FIGURA EVII 13

Considerem quatre nombres proporcionals A, B, C i D[, és a dir,] A és a B com C a D.

Afirmo que també són proporcionals *alternando*, [és a dir,] que A és a C com B a D.

[*Demostració*.] Atès que A és a B com C a D, el que [cada] part o part alíquota A és de B, C també ho és de D. [DVII 20]

Aleshores, alternativament, el que [cada] part o part alíquota A és de C, B també ho és de D. [EVII 9 i 10]

Per tant, A és a C com B a D. [DVII 20]

I això és el que volíem demostrar. ♠

geu EV 12 i compareu-ho. S'ha canviat el terme μέγεθος per ἀριθμός. Però ara solament calen DVII 20, EVII 5 i EVII 6.

264. Correspon a EV 16, i s'ha de connectar amb DVII 20 i EVII 10. Formalment, si $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$, aleshores $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$. Per als termes *alternando*, *ex æquali*, etc., vegeu PLA (2018), taula 1.7, p. 50.

EVII 14. *Si tenim dues multituds amb la mateixa quantitat de nombres arbitraris i aquests nombres tenen dos a dos la mateixa raó, aleshores també la tenen via* ex æquali.[265]

Considerem [dues] multituds [amb la mateixa quantitat] de nombres A, B i C, i D, E i F, de manera que els nombres de cada una tinguin, dos a dos, la mateixa raó, [és a dir,] A sigui a B com D a E, i B a C com E a F.

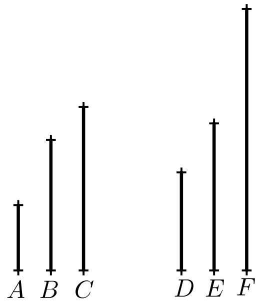


FIGURA EVII 14

Afirmo que, *ex æquali*, A és a C com D a F.

[*Demostració*.] Atès que A és a B com D a E, resulta que, *alternando*, A és a D com B a E. [EVII 13]

Novament, atès que B és a C com E a F, tenim que, *alternando*, B és a E com C a F. [EVII 13]

Però B és a E com A a D.

Per tant, A també és a D com C a F. [Nc 1]

Aleshores, *alternando*, A és a C com D a F. [EVII 13]

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVII 15. *Si la unitat mesura un* [*segon*] *nombre*[266] *i un* [*tercer*] *en mesura un* [*quart*] *el mateix nombre de vegades;*[267] *alternativament, la unitat mesura també el tercer el mateix nombre de vegades que el segon el quart.*

Suposem que A és la unitat que mesura el nombre BC i D un nombre que mesura el EF el mateix nombre de vegades.

Afirmo que, alternativament, la unitat A mesura el nombre D tantes vegades com el nombre BC el EF.

[*Demostració*.] Atès que la unitat A i el nombre D mesuren els nombres BC i EF amb la mateixa mesura, respectivament; BC conté tantes unitats [A] com EF el nombre D. [DVII 20]

265. Siguin $m_1, m_2, m_3; n_1, n_2, n_3$. Si suposem que $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ i $\frac{m_2}{m_3} = \frac{n_2}{n_3}$, aleshores $\frac{m_1}{m_3} = \frac{n_1}{n_3}$.

266. Aquí la unitat té el mateix paper que els altres tres nombres.

267. És a dir, si dos nombres són equimúltiples de la unitat i d'un nombre, respectivament.

Considerem [el nombre] BC dividit en les unitats BG, GH i HC que el constitueixen,
i EF en les [divisions] EK, KL i LF, totes iguals a D.

Aleshores, la multitud [d'unitats] BG, GH i HC és igual a la multitud [de divisions] EK, KL i LF.

I, atès que les unitats BG, GH i HC,
i els nombres EK, KL i LF són iguals entre si, respectivament,
i que la multitud [d'unitats] BG, GH i HC és igual a la de nombres EK, KL i LF;
resulta que la unitat BG és al nombre EK com la GH al nombre KL, i com la HC al nombre LF. [Nc 1][268]

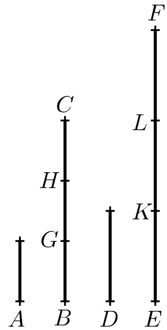


Figura Evii 15

Per tant, cadascuna de les primeres és a un dels segons com [la suma de] totes les unitats és a [la suma de] tots els nombres. [Evii 12]

En definitiva, la unitat BG és al nombre EK com BC a EF, la unitat BG és igual a la unitat A, i el nombre EK ho és al nombre D.

Per tant, la unitat A és al nombre D com BC a EF. [Ev 7, iterat]

Així doncs, la unitat A mesura el nombre D com BC [mesura] el EF. [Dvii 20]

I això és el que volíem demostrar.[269] ♠[270]

Evii 16. *Si dos nombres es multipliquen entre si, els* [*nombres*] *que s'obtenen*[271] *són iguals.*[272]

---

268. De fet, és una ampliació de Nc 1 a les raons: si $m_1 = m_2$ i $n_1 = n_2$, aleshores $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$. Vegeu, tanmateix, Ev 7 i 9, a Pla (2018), p. 51, 277 i 282. Euclides no estableix aquesta propietat en el cas dels nombres. Però després aplica el «principi de substitució» a les seves raons.

269. És un cas especial d'Evii 9.

270. És un «element» per a la propietat «commutativa» del producte de dos nombres naturals.

271. En grec: οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν, és a dir, 'els nombres que es produeixen per si mateixos'.

272. Formalment: $m \times n = n \times m$. És la propietat commutativa de la multiplicació de nombres naturals.

Siguin A i B dos nombres,
i C i D els resultats de multiplicar A per B i B per A, respectivament.

Afirmo que C i D són iguals.

[*Demostració.*] Atès que C és [el resultat] de multiplicar A per B,
B mesura C tantes vegades com unitats té A. [Dvii 15]

Però la unitat E també mesura el nombre A tantes vegades com unitats té A. [Evii 2]

Per tant, la unitat E mesura el nombre A tantes vegades com B [mesura] C. [Nc 1]

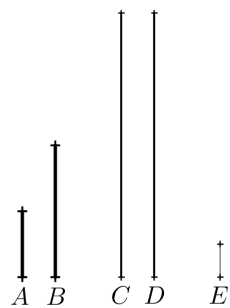


Figura Evii 16

Aleshores, alternativament, la unitat E mesura el nombre B tantes vegades com A [mesura] C. [Evii 15]

Anàlogament, atès que D és [el resultat] de multiplicar B per A,
A mesura D tantes vegades com unitats té B. [Dvii 15]

Però la unitat E també ho mesura. [Dvii 2]

Per tant, la unitat E mesura el nombre B tantes vegades com A [mesura] D. [Nc 1]

I la unitat E mesura el nombre B tantes vegades com A [mesura] C.

En definitiva, la unitat A mesura els nombres C i D el mateix nombre de vegades. [Nc 1 o per substitució]

En conseqüència, C és igual a D. [Nc 2, iterat][273]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evii 17. *Considerem [els nombres] que resulten de multiplicar un nombre per dos nombres. La raó entre els resultats obtinguts és igual a la raó entre els dos nombres [que s'han multiplicat].*[274]

---

273. Si dos nombres es componen de la mateixa quantitat d'unitats, són iguals.

274. Formalment, $\frac{m\times n_1}{m\times n_2} = \frac{n_1}{n_2}$ proporciona una de les propietats més notables de les fraccions: una fracció és igual a altres fraccions i, de retruc, una fracció es pot «simplificar».

És, de fet, la rèplica numèrica de les propietats geomètriques Ei 35 i Ei 36.

Multipliquem el nombre A pels B i C.

Siguin D i E els resultats obtinguts, respectivament.

Afirmo que B és a C com D a E.

[*Demostració.*] Atès que A multiplicat per B dona D,
[el nombre] B mesura D tantes vegades com unitats té A. [DVII 15]

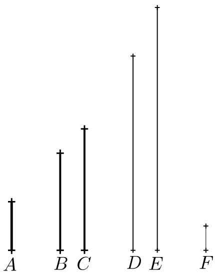


FIGURA EVII 17

Ara bé, la unitat F també mesura el nombre A tantes vegades com unitats té A. [DVII 2]

Així doncs, la unitat F mesura el nombre A tantes vegades com B [mesura] D. [Nc 1]

Aleshores, la unitat F és al nombre A com B a D. [DVII 20]

Pel mateix raonament, la unitat F és al nombre A com C a E. [DVII 20]

En conseqüència, B és a D com C a E. [Nc 1]

I, *alternando*, B és a C com D a E. [EVII 13]

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVII 18. *Si dos nombres són multiplicats per un mateix nombre, els resultats tenen la mateixa raó que els nombres multiplicats.*[275]

Els dos nombres A i B multiplicats pel nombre C donen D i E[, respectivament].

Afirmo que A és a B com D a E.

[*Demostració.*] Atès que hem obtingut D multiplicant A per C,
també l'obtenim multiplicant C per A. [EVII 16]

Pel mateix [raonament], atès que hem obtingut E multiplicant B per C,
també l'obtenim multiplicant C per B. [EVII 16]

Així doncs, els nombres D i E els obtenim multiplicant C per A i B[, respectivament].

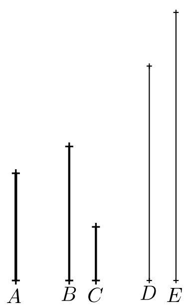


FIGURA EVII 18

En conseqüència, A és a B com D a E. [EVII 17]

I això és el que volíem demostrar. ♠

275. Formalment, $\frac{m_1 \times n}{m_2 \times n} = \frac{m_1}{m_2}$.

EVII 19. *Donats quatre nombres proporcionals,* a*) el nombre que obtenim multiplicant el primer pel quart és igual al nombre que obtenim multiplicant el segon pel tercer. I, recíprocament,* b*) si el producte del primer pel quart és igual al producte del segon pel tercer, aleshores els quatre nombres són proporcionals.*[276]

a) Siguin A, B, C i D quatre nombres proporcionals,
[és a dir,] A és a B com C a D.

I siguin E i F els nombres que obtenim multiplicant A per D i B per C[, respectivament].

Afirmo que E i F són iguals.

[*Demostració.*] Sigui G el [nombre] que resulta multiplicant A per C.

Aleshores, atès que obtenim G multiplicant A per C,
i E, multiplicant A per D,
tenim que G i E són els resultats que obtenim multiplicant A per C i D[, respectivament].

Per tant, C és a D com G a E. [EVII 17]

Però C també és a D com A a B.

Per tant, A és a B com G a E. [NC 1]

De bell nou, atès que multiplicant A per C dona G
i multiplicant B per C dona F;
els nombres A i B multiplicats per C donen G i F[, respectivament].

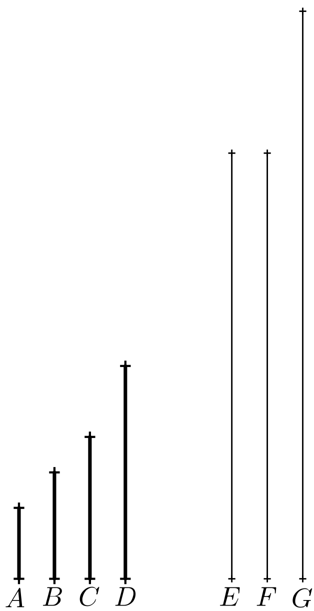


FIGURA EVII 19

Aleshores, A és a B com G a F. [EVII 18]

Però també A és a B com G a E.

I, així, G és a E com G a F. [NC 1]

I, per tant, E i F són iguals. [EV 9][277] ♠

276. $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ si, i només si, $m_1 \times n_2 = m_2 \times n_1$. És la rèplica d'EVI 16, relativa a segments proporcionals.

277. Aquest és un pas curiós. Euclides usa un resultat del llibre V com si les raons numèriques fossin també magnituds. Si això és així, algunes de

b) Ara suposem que E és igual a F.

Afirmo que A és a B com C a D.

[*Demostració.*] Per la mateixa construcció, com que E és igual a F, G és a E com G a F. [Ev 7][278]

Però G és a E com C a D. [Evii 17]

I G és a F com A a B. [Evii 18]

D'això en resulta que A és a B com C a D. [Nc 1, iterat] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evii 20. *Els nombres més petits* [*entre tots els*] *que tenen la mateixa raó mesuren els* [*nombres*] *que tenen la mateixa raó el mateix nombre de vegades, els petits els petits i els grans els grans.*[279]

Siguin CD i EF els nombres més petits dels que tenen la mateixa raó que, per exemple, [els nombres] A i B.

Afirmo que CD mesura A el mateix nombre de vegades que EF [mesura] B.

[*Demostració.*] *a*) Volem veure que CD no és part alíquota de A.

Suposem que ho és.[280]

Aleshores, EF i CD són la mateixa part alíquota de B i A, respectivament. [Dvii 20, Evii 10]

Resulta, doncs, que EF conté tantes parts de B com CD de A.[281]

Suposem que hem dividit CD en les parts de A, CG i GD, i EF en les parts de B, EH i HF.

Així, la multitud de [divisions] CG i GD és igual a la multitud de [divisions] EH i HF.

---

les proposicions precedents són redundants. La pregunta natural és: no seria possible establir demostracions alternatives que fossin totalment independents del llibre v? Vegeu el problema 13 (pàgina 73).

278. Vegeu la nota 277 (pàgina 112).

279. Euclides estableix l'existència d'un representant canònic de cada raó: la raó que hi ha entre l'antecedent i el conseqüent mínims. Formalment, si $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m}{n}$, amb $(m_1, n_1) = 1$ —és a dir, m_1 i n_1 mínims—, aleshores existeix un nombre $k \in \mathbb{N}$, i $m = k \times m_1, n = k \times n_1$.

280. Hipòtesi de l'absurd.

281. Recordem el significat d'aquestes paraules. Hi ha una part k-èsima de A que és alhora part ℓ-èsima de CD, amb $k \neq \ell$. Hi ha, doncs, una part k-èsima de B que és alhora part ℓ-èsima de EF.

I, atès que els nombres CG i GD, i EH i HF són iguals entre si, respectivament,
i el nombre de [divisions] CG, GD és igual al de [divisions] EH, HF,
resulta que CG és a EH com GD a HF.

[Ev 7 o per substitució][282]

Ara bé, cada un dels antecedents és a cada un dels consegüents
com la suma de tots els antecedents és a la suma de tots els consegüents. [Evii 12]

Aleshores, CG és a EH com CD a EF.

En conseqüència, CG i EH tenen la mateixa raó que CD i EF
però són més petits [que CD i EF].

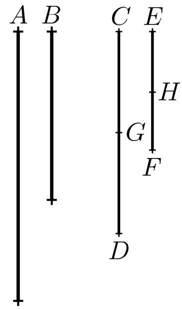


Figura Evii 20

Però això és impossible perquè havíem suposat que CD i EF eren els mínims amb la mateixa raó [que CG i EH].

D'això en resulta que CD no és part alíquota de A. ♠

b) En conseqüència, [CD] és part [de A], [Evii 4]
i EF és la mateixa part de B que CD de A. [Dvii 20 i Evii 13]

En definitiva, CD mesura A la mateixa quantitat de vegades que EF [mesura] B. [Dvii 2]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evii 21. *Els nombres primers entre si són els* [*nombres*] *més petits de tots els que tenen la mateixa raó.*[283]

Siguin A i B dos nombres primers entre si. [Dvii 12]

Afirmo que A i B són els [nombres] més petits amb la raó [de A i B].

[*Demostració*.] Si no és així,[284]
hi ha [dos] nombres més petits que A i B amb la raó de A i B.

En diem C i D.

282. Si $m = m'$ i $n = n'$, aleshores $\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'}$. És un porisma d'Evii 19 i Dvii 15.

283. L'antecedent i el consegüent del representant canònic d'una raó són primers entre si. Si $(m_1, n_1) = 1$, aleshores, per a tot m, n amb $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m}{n}$, $m_1 \leq m$ i $n_1 \leq n$.

284. Hipòtesi de l'absurd.

Atès que els nombres més petits entre totes les [parelles de nombres] amb la mateixa raó mesuren els [nombres de les parelles] que tenen la mateixa raó un nombre igual de vegades,
el gran el gran, i el petit el petit,
és a dir, l'antecedent l'antecedent, i el consegüent el consegüent, respectivament; [EVII 20]
resulta que l'antecedent C mesura A el mateix nombre de vegades que D [mesura] B.

Així, C mesura A tantes vegades com unitats té [un nombre] E.[285]

I D també mesura B tantes vegades com unitats té E. [Nc 1]

I, com que C mesura A segons les unitats de E,
E també mesura A segons les de C. [EVII 15][286]

Pel mateix raonament, E també mesura B segons les unitats de D. [EVII 15]

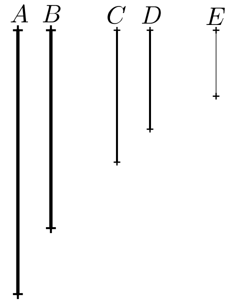


FIGURA EVII 21

Aleshores, E mesura A i B, que són primers entre si. I això és impossible [atès que E no és la unitat]. [DVII 12]

En conseqüència, no hi ha [dos] nombres més petits que A i B que tinguin la mateixa raó que A i B.

En definitiva, A i B són els nombres més petits amb una mateixa raó.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVII 22. *Els nombres mínims de totes [les parelles] amb la mateixa raó són primers entre si.*[287]

Siguin A i B els nombres més petits [de totes les parelles de nombres] amb una mateixa raó —la pròpia.

---

285. S'exclou que A i C siguin iguals. I, per tant, E no és la unitat.

286. VITRAC (1994), nota 102, p. 328.

287. Aquesta proposició estableix el recíproc de l'anterior, o sigui, que el fet que dos nombres siguin primers entre si implica que la seva raó sigui la canònica, mínima i irreductible. «Per a tota parella m, n de nombres amb $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m}{n}$ i $m_1 \leq m, n_1 \leq n$, aleshores $(m_1, n_1) = 1$, i recíprocament», és la propietat que caracteritza els termes del representant canònic d'una raó numèrica.

Afirmo que A i B són primers entre si.

[*Demostració.*] Si no són primers entre si,[288]
hi ha un nombre que els mesura tots dos. [DVII 12]

En diem C.[289]

[El nombre] C mesura A i B tantes vegades com unitats té [un cert nombre] D i [un cert nombre] E, respectivament. [DVII 2]

Atès que C mesura A segons les unitats de D, resulta que multiplicant C per D obtenim A. [DVII 15]

Pel mateix raonament, obtenim B multiplicant C per E. [DVII 15]

Així doncs, els nombres A i B els obtenim multiplicant C per [els dos nombres] D i E[, respectivament].

En conseqüència, D és a E com A a B. [EVII 17]

És a dir, [els nombres] D i E tenen la raó de[ls nombres] A i B.

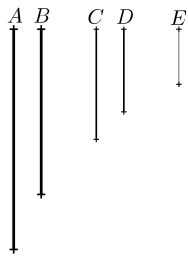


FIGURA EVII 22

I això és impossible, atès que A i B són els més petits.[290]

Resulta, doncs, que no hi cap nombre que mesuri A i B i, per tant, A i B són primers entre si. [DVII 12]

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVII 23. *Considerem dos nombres primers entre si. Si un cert nombre en mesura un,*[291] *aleshores és primer amb l'altre.*[292]

288. Hipòtesi de l'absurd.

289. Òbviament, C és un nombre propi, és a dir, més gran que la unitat.

290. Aquí Euclides usa la propietat «Si m i n són nombres, $m \times n > m$ i $> n$» (pàgina 4).

291. Fixem-nos en el fet que, en dir «un nombre», Euclides exclou la unitat.

292. Formalment, si $(m, n) = 1$ i $p|m$, aleshores $(p, n) = 1$.

Amb aquesta proposició, Euclides inicia la introducció dels «elements» necessaris per a establir el «lema d'Euclides». Si $p|(m \times n)$ i p és primer, aleshores $p|m$ o $p|n$. Vegeu EVII 30.

Recordem que el lema de Gauss diu: «Si $p|(m \times n)$ i $(p, m) = 1$, aleshores $p|m$.»

Siguin A i B dos nombres primers entre si.
Suposem que el nombre C mesura A.
Afirmo que C i B són primers entre si.
[*Demostració.*] Si C i B no ho són,[293]
aleshores [hi ha un] nombre que mesura C i B.
En diem D.
Atès que D mesura C i C mesura A,
D també mesura A. [per transitivitat]
Però [D] també mesura B.
Per tant, D mesura A i B, que són primers entre si. I això és impossible. ♠

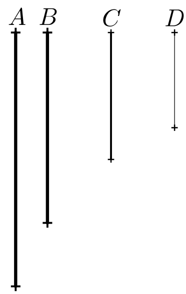


FIGURA EVII 23

Resulta, doncs, que no hi ha cap nombre que mesuri els nombres C i B alhora.
En conseqüència, [els nombres] C i B són primers entre si. [DVII 12]
I això és el que volíem demostrar. ♠

EVII 24. *Si dos nombres són primers amb un [tercer], el nombre obtingut multiplicant aquests dos nombres també ho és.*[294]
Siguin A i B dos nombres primers amb el nombre C,
i D el nombre que obtenim multiplicant A per B.
Afirmo que C i D són primers entre si.
[*Demostració.*] Si C i D no ho són,[295]
hi ha un nombre E que els mesura. [DVII 12]
Atès que C i A són primers entre si
i que un nombre E mesura C,[296]
resulta que A i E també són primers entre si. [EVII 23]
Suposem que E mesura D tantes vegades com unitats té [el nombre] F.
Però F també mesura D segons les unitats de E. [EVII 16]
Per tant, obtenim D multiplicant E per F. [DVII 15]
Però D també l'obtenim multiplicant A per B.

293. Hipòtesi de l'absurd.
294. Si $(m,p)=1, (n,p)=1$, aleshores $(m \times n, p) = 1$.
295. Hipòtesi de l'absurd.
296. E no és la unitat.

En definitiva, el nombre obtingut multiplicant E per F és igual a l'obtingut multiplicant A per B. [Nc 1]

En conseqüència, el producte determinat pels [dos] extrems és igual al [determinat] pels dos mitjans.

Per tant, els quatre nombres són proporcionals. [Evii 19][297]

Així doncs, E és a A com B a F.

Però A i E són primers entre si,
i [els nombres] primers entre si són també els més petits [amb la mateixa raó]. [Evii 21]

I els nombres més petits mesuren els que tenen la mateixa raó el mateix nombre de vegades;
el gran el gran, i el petit el petit,
és a dir, l'antecedent l'antecedent, i el consegüent el consegüent. [Evii 20]

Aleshores, E mesura B[298] i[, per hipòtesi,] també mesura C.

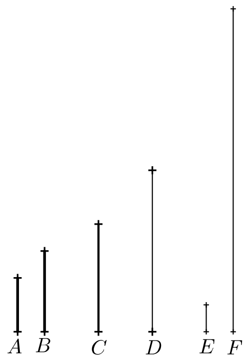


Figura Evii 24

Per tant, E mesura B i C, que són primers entre si. I això és impossible. [Dvii 12] ♠

Resulta que cap nombre no mesura els nombres C i D alhora.

En definitiva, C i D són primers entre si.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evii 25. *Si dos nombres són primers entre si, el quadrat d'un és primer amb l'altre.*[299]

Siguin A i B dos nombres primers entre si,
i C el nombre que obtenim multiplicant A per si mateix.

Afirmo que B i C són primers entre si.

[*Demostració.*] Considerem [el nombre] D igual a A.[300]

---

297. El text grec remet a Evi 15, que fa referència a segments lineals i rectangles, però no ens cal atès que disposem d'Evii 19.

298. Observem que, implícitament, Euclides acaba de demostrar el lema de Gauss: $(E, A) = 1$ i $E|(A \times B)$. Per tant, $A \times B = E \times F$. I d'això en resulta que $\frac{E}{A} = \frac{B}{F}$. I que $E|B$. Vegeu el problema 12 (pàgina 73).

299. Si $(m, n) = 1$, aleshores $(m^2, n) = 1$.

300. Vegeu la nota 255 (pàgina 103).

Atès que A i B són primers entre si,
i A és igual a D;
D i B també són primers entre si.[301]

Aleshores, [cadascun dels nombres] D i A és primer amb B.

D'això en resulta que [el nombre][302] que obtenim multiplicant D per A també és primer amb B, [EVII 24]
i és C.

En definitiva, C i B són primers entre si.
I això és el que volíem demostrar. ♠

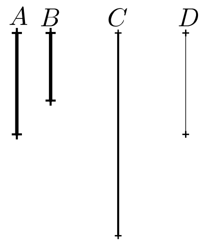


FIGURA EVII 25

EVII 26. *Si dos nombres són primers amb cada un d'uns altres dos, els [productes] obtinguts [multiplicant cada parell] també són primers entre si.*[303]

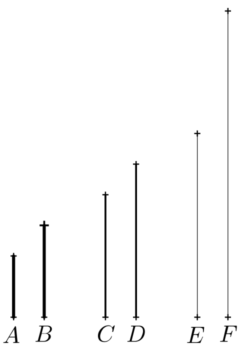


FIGURA EVII 26

Siguin A i B dos nombres, cadascun primer amb cadascun dels nombres C i D,
i E i F els nombres que obtenim multiplicant A per B i C per D, respectivament. [DVII 15]

Afirmo que E i F són primers entre si.

[*Demostració.*] Atès que A i B són primers amb C,
el [nombre] obtingut multiplicant A per B també ho és. [EVII 24]

Però aquest nombre és E.

Per tant, E i C són primers entre si.

Pel mateix [raonament], E i D també ho són.

Així doncs, C i D són primers amb E.

---

301. Si dos nombres són iguals, tenen les mateixes parts. És immediat, per reducció a l'absurd. Vegeu el problema 4 (pàgina 72).

302. Atès que A i D són iguals, C és, alhora, el nombre que obtenim multiplicant A per A i A per D. Efectivament, la raó que hi ha entre A i A és la mateixa que hi ha entre A i D. Apliquem EVII 19.

303. Siguin m_1, m_2 i n_1, n_2 dues parelles de nombres que $(m_1, n_i) = 1$ i $(m_2, n_i) = 1$, amb $i = 1, 2$. Aleshores $(m_1 \times m_2, n_1 \times n_2) = 1$.

Per tant, el [nombre] obtingut multiplicant C per D també ho és. [Evii 24]

Però aquest nombre és F.

En definitiva, resulta que E i F són primers entre si.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evii 27. a*) Si dos nombres són primers entre si, els seus quadrats* [*obtinguts multiplicant cada nombre per si mateix*] *també ho són.* b*) I, si fem els* [*nombres*] *cúbics dels* [*nombres*] *originals, les quartes potències i així successivament, aquests* [*nombres*] *també són primers entre si.*[304]

Siguin A i B dos nombres primers entre si,
i C i D [els nombres] que obtenim multiplicant A per si mateix i per C[, respectivament],
i E i F que els obtenim multiplicant B per si mateix i E per B[, respectivament].

Afirmo que C i E, i D i F són primers entre si.

[*Demostració.*] *a*) Atès que A i B són primers entre si,
i que hem obtingut C multiplicant A per si mateix, C i B també ho són. [Evii 25]

Aleshores, atès que C i B també ho són
i que E és el [nombre] que obtenim multiplicant B per si mateix,
C i E són primers entre si. [Evii 25] ♠

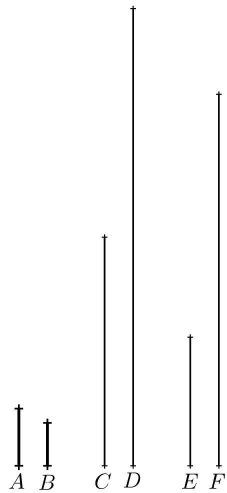


Figura Evii 27

b) De bell nou, com que A i B són primers entre si,
i obtenim E multiplicant B per si mateix,
A i E també ho són. [Evii 25]

Com que els dos nombres A i C són primers amb cadascun dels nombres B i E,
els [nombres respectius] que obtenim multiplicant A per C, i B per E són primers entre si. [Evii 26]

304. Simbòlicament: si $(m, n) = 1$, aleshores $(m^k, n^k) = 1$, per a tot $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$.

I D i F són [els nombres que obtenim multiplicant] A per C i B per E, respectivament.

En definitiva, [els nombres] D i F són primers entre si. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVII 28. a*) Si dos nombres són primers entre si, la seva suma també és primera amb cada un.* b*) I, si la suma [de dos nombres] és primera amb un dels sumands, els sumands també són primers entre si.*[305]

Siguin AB i BC dos nombres primers entre si.

Els ajuntem.[306]

a) Afirmo que la suma AC també és primera amb cadascun dels [nombres] AB i BC.

[*Demostració.*] Si CA i AB no són primers entre si,[307] CA i AB admeten una mesura comuna, D.

Per tant, atès que D mesura CA i AB, també mesura el residu BC. [EVII 1][308]

Però D mesura BA.

En conseqüència, D mesura AB i BC, que són primers entre si. [DVII 12]

I això és impossible.

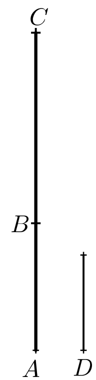


FIGURA EVII 28

Per tant, no hi ha cap nombre que mesuri els nombres CA i AB.

En conseqüència, CA i AB són primers entre si. [DVII 12]

I, pel mateix raonament, AC i CB també ho són.

Per tant, CA és primer amb cadascun dels [nombres] AB i BC.

♠

b) Ara siguin CA i AB primers entre si.

Afirmo que AB i BC també ho són.

[*Demostració.*] Si AB i BC no són primers entre si,[309] hi ha un nombre que mesura AB i BC.

305. Formalment: si $(m_1, m_2) = 1$, aleshores $(m_1 + m_2, m_i) = 1$, $i = 1, 2$. I, si $(m_1 + m_2, m_1) = 1$, aleshores $(m_1, m_2) = 1$.

306. Euclides considera el nombre que té tantes unitats com les conjuntes dels dos nombres.

307. Hipòtesi de l'absurd.

308. Vegeu la nota 220 (pàgina 93).

309. Hipòtesi de l'absurd.

En diem D.

Atès que D mesura AB i BC,
també mesura el total CA. [EVII 5][310]

Però també mesura AB.

Per tant, D mesura CA i AB, que són primers entre si. I això és impossible. [DVII 12]

En definitiva, cap nombre mesura els nombres AB i BC alhora.

Per tant, AB i BC són primers entre si. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVII 29. *Tot nombre primer és primer amb cada un dels nombres que no mesura.*[311]

Sigui A un nombre primer que no mesura B.

Afirmo que B i A són primers entre si.

[*Demostració.*] Si B i A no ho són,[312]
hi ha un nombre que els mesura. [DVII 12]

En diem C.

Atès que C mesura B, i A no mesura B;
C és diferent de A [per l'absurd i per substitució]

Aleshores, atès que C mesura B i A,
resulta que mesura A,
que és primer i diferent de C.
I això és impossible.

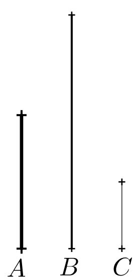


FIGURA EVII 29

Per tant, no hi ha cap nombre que mesuri B i A alhora.

I A i B són primers entre si. [DVII 12]

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVII 30 [Lema d'Euclides.] *Si un nombre primer divideix el producte de dos nombres, mesura un dels dos* [*nombres*] *originals.*[313]

Siguin C el producte dels nombres A i B, [DVII 15]
i D un nombre primer que mesura C.

310. N'és un porisma immediat.

311. Si p és primer i $p \nmid m$, aleshores $(p, m) = 1$.

312. Hipòtesi de l'absurd.

313. Si p és primer i $p|(m \times n)$, aleshores $p|m$ o $p|n$.

Afirmo que D mesura un dels nombres A i B.

[*Demostració.*] *a*) Suposem que [D] no mesura A.

Atès que D és primer,

A i D són primers entre si.[314] [EVII 29]

Però D mesura C tantes vegades com unitats té E.

Per tant, obtenim C multiplicant D per E. [DVII 15]

Però C també l'obtenim multiplicant A per B.

En conseqüència, els [productes] de D per E i de A per B són iguals. [Nc 1]

Resulta, doncs, que D és a A com B a E, [EVII 19]

i que D i A són primers entre si.

Ara bé, els [nombres] primers entre si són els més petits [entre totes les parelles de nombres que tenen la mateixa raó]. [EVII 21]

I sabem que els [nombres] més petits mesuren els [nombres] que tenen la mateixa raó el mateix nombre de vegades; el gran el gran, i el petit el petit; l'antecedent l'antecedent, i el consegüent el consegüent. [EVII 20]

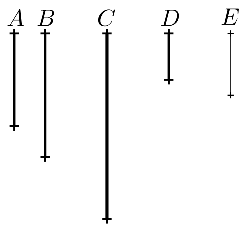


FIGURA EVII 30

En definitiva, D mesura B. ♠

b) De manera anàloga, podem veure també que, si [D] no mesura B, mesura A. ♠

Així doncs, D mesura A o B.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVII 31. *Tot*[315] *nombre compost és mesurat per un nombre primer.*[316]

Sigui A un nombre compost.

314. Observem que, a partir d'aquí, Euclides demostra el lema de Gauss, és a dir, usa: «A i D són primers entre si.» Vegeu la nota 298 (pàgina 118).

315. Recordem que els grecs empren «cada» i no pas «tot».

316. Un ús absolutament elegant del «mètode del descens infinit», amb el supòsit implícit que el descens s'acaba necessàriament. Aquí Euclides inicia el teorema fonamental de l'aritmètica: «Tot nombre compost es descompon en producte de primers.»

Afirmo que A és mesurat per un nombre primer.

[*Demostració.*] Atès que A és compost,
hi ha un nombre que el mesura. [DVII 13]

a) Anomenem B aquest nombre.

a_1) Si B és primer, hem aconseguit el que preteníem. ♠

a_2) Si [B és] compost, hi ha un nombre que el mesura. [DVII 13]

En diem C.

Atès que C mesura B, i B mesura A,
C mesura A. [per transitivitat]

$a_{2.1}$) Si C és primer, hem aconseguit el que preteníem. ♠

$a_{2.2}$) Si [C és] compost, hi ha un nombre que el mesura. [DVII 13]

$a_{2.2.1}$) Per tant, la recerca prossegueix fins que trobem un nombre primer que mesuri A. ♠

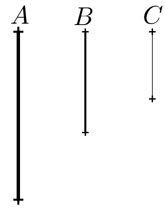


FIGURA EVII 31

b) Si aquest [darrer] nombre primer [que mesura] A no existeix,[317]
tenim una sèrie infinita de nombres,
cada un més petit que el precedent però tots mesurant-lo.
I això és impossible.[318]

Per tant, hi ha un nombre primer que mesura necessàriament el nombre A. ♠

Tot nombre compost és, doncs, mesurat per un nombre primer.
I això és el que volíem demostrar. ♠[319]

---

317. Hipòtesi de l'absurd.

318. Quina elegància! Tenim un nombre compost n, que té un divisor d_1. Si és primer, hem acabat la demostració. Si d_1 no ho és, és compost, per tant, té un divisor d_2. I prosseguim. Obtenim una successió decreixent de divisors $d_1 > d_2 > \cdots > d_k > \cdots$. Poden passar dues coses: que d_k sigui el darrer i, per tant, necessàriament primer; o que la successió decreixent no tingui un darrer terme. Però això no és possible. Com dèiem, Euclides usa la proposició: «No existeix una cadena infinita —il·limitada, si es vol— de nombres més petits que un nombre donat per endavant i successivament més petits.»

319. L'únic «element» de la demostració és DVII 13.

EVII 32. *Tot nombre o és primer o és mesurat per un nombre primer.*[320]

Sigui A un nombre arbitrari.

Afirmo que es dona una d'aquestes dues possibilitats:[321]

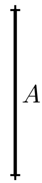


FIGURA EVII 32

a) A és un nombre primer.

b) A és mesurat per un nombre primer.

[*Demostració.*] a) Si és un [nombre] primer, s'acompleix el que volíem. ♠

b) Si, en canvi, és un nombre compost, és mesurat per un nombre primer. [EVII 31] ♠

Així doncs, un nombre [arbitrari] o és primer o és mesurat per un nombre primer.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVII 33. *Volem trobar els* [*nombres*] *més petits que tenen la raó d'una multitud donada de nombres.*[322]

Siguin A, B i C una multitud donada de nombres.

Volem trobar els nombres més petits que tenen una mateixa raó amb A, B i C.

[*Demostració.*] Pot ocórrer que els nombres A, B i C:[323]

a) Siguin primers entre si.

b) No siguin primers entre si.

a) De fet, si A, B i C són primers entre si [dos a dos],

---

320. Amb aquesta proposició, Euclides completa la part «existencial» del teorema fonamental de l'aritmètica: «Tot nombre factoritza en nombres primers.» Li falta establir, però, la «unicitat» de la factorització.

321. Disjunció de casos.

322. Si $m_i, i = 1, \ldots, k$, cerquem els nombres més petits $n_i, i = 1, \ldots, k$ per als quals $\frac{n_i}{m_i} = q$, en què q és una fracció fixa. Són $n_i = m_i|d$, en què $d = (m_1, \ldots, m_k)$. Amb aquesta proposició, Euclides inicia el camí cap a la determinació del «mínim comú múltiple» de dos nombres i de tres. En definitiva, el llibre VII comença amb l'algorisme d'Euclides, que permet determinar el màxim comú divisor, i acaba amb el mètode que serveix per a calcular el mínim comú múltiple.

323. Disjunció de casos.

són els nombres més petits que tenen la mateixa raó [amb els nombres donats]. [EVII 21] ♠

b) Si no són primers entre si,

[*Construcció.*] determinem el màxim comú divisor, D, de A, B i C. [EVII 3]

Aleshores, D mesura A, B i C tantes vegades com unitats tenen[, respectivament, els nombres] E, F i G. ♣

[*Demostració.*] b_1) En conseqüència, E, F i G mesuren A, B i C, respectivament, segons les unitats de D. [DVII 15 i EVII 15]

Per tant, E, F i G mesuren A, B i C[, respectivament,] un nombre de vegades[, en concret, D]. [EVII 16]

Resulta, doncs, que E, F i G tenen la mateixa raó amb A, B i C. [DVII 20] ♠

Afirmo que E, F i G són els mínims [nombres que tenen la mateixa raó amb A, B i C, respectivament].

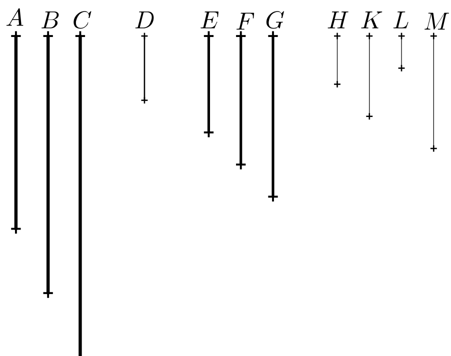


FIGURA EVII 33

b_2) Si E, F i G no són els mínims [nombres] que tenen la mateixa raó amb A, B i C[, respectivament],[324] aleshores hi ha uns nombres més petits que ells que tenen la mateixa raó amb A, B i C[, respectivament].

Siguin [aquests nombres] H, K i L.

Aleshores, H mesura A el mateix nombre de vegades que K i L mesuren B i C, respectivament. [EVII 20]

Suposem que H mesura A tantes vegades com unitats té [el nombre] M.

Aleshores, K i L mesuren B i C segons les unitats de M[, respectivament]. [Nc 1]

Ara bé, atès que H mesura A segons les unitats de M,
M mesura A segons les de H. [DVII 15 i EVII 15]

324. Hipòtesi de l'absurd.

I, pel mateix raonament, M també mesura B i C segons les unitats de K i L, respectivament. [DVII 15 i EVII 15]

En conseqüència, M mesura A, B i C alhora.

Però, atès que H mesura A segons les unitats de M, multiplicant H per M obtenim A. [DVII 15]

I, anàlogament, l'obtenim multiplicant E per D. [DVII 15]

Així doncs, el nombre obtingut [multiplicant] E per D és igual al [nombre] obtingut [multiplicant] H per M. [Nc 1]

D'això en resulta que E és a H com M a D, [EVII 19] i E és més gran que H.

Aleshores, M també ho és que D, [DVII 20 i EVII 13][325] i [M] mesura A, B i C. I això és impossible ja que hem suposat que D és el màxim comú divisor de A, B i C. ♠

Per tant, no és possible que hi hagi nombres més petits que E, F i G que tinguin la mateixa raó amb A, B i C, respectivament.

En conseqüència, E, F i G són els nombres mínims que tenen una mateixa raó amb A, B i C.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVII 34. *Volem trobar el nombre més petit mesurat per dos nombres donats per endavant.*[326]

Siguin A i B els dos nombres donats.

Volem trobar el nombre més petit mesurat per tots dos.

[*Construcció.*] Pot ocórrer que els nombres A i B:[327]

a) Siguin primers entre si.

b) No siguin primers entre si.

a) En primer lloc, suposem que A i B són primers entre si.

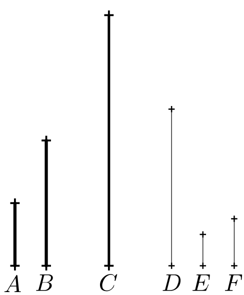


FIGURA EVII 34*a*

325. Aquí podríem recórrer a la definició DV 5.

326. Volem determinar el mínim comú múltiple de dos nombres naturals m i n. De fet, és $M = d \times m_1 \times n_1$, en què $d = (m, n)$, $m = d \times m_1$ i $n = d \times n_1$.

327. Disjunció de casos.

[*Construcció*.] Considerem el nombre C que obtenim multiplicant A per B. ♣

[*Demostració*.] Aleshores, obtenim C multiplicant B per A. [Evii 16]

a_1) Per tant, tant A com B mesuren C. ♠

Afirmo que [C] és el [nombre] més petit [que els mesura tots dos].

a_2) Perquè, si no és així,[328]

A i B són mesurats per un nombre més petit que C.

Sigui D [aquest nombre més petit que C mesurat per A i B].

Tenim que A mesura D tantes vegades com unitats té [el nombre] E [Dvii 5]

i que B mesura D tantes vegades com unitats té F. [Dvii 5]

D'això en resulta que obtenim D multiplicant A per E,

i B per F. [Dvii 15]

Aleshores, el producte obtingut multiplicant A per E és igual a l'obtingut multiplicant B per F. [Nc 1]

En conseqüència, A és a B com F a E. [Evii 19]

Però A i B són primers entre si.

Per tant, són els nombres més petits que tenen la mateixa raó. [Evii 21]

I els [nombres] més petits mesuren els [nombres] que tenen la mateixa raó [que ells] un nombre igual de vegades;

el gran el gran, i el petit el petit. [Evii 20]

Aleshores, B mesura E com el consegüent mesura el consegüent.

I, com que A multiplicat per B i E dona C i D, respectivament,

tenim que B és a E com C a D. [Evii 17]

Però B mesura E.

Per tant, C mesura D. [Dvii 20]

O sigui, el gran [mesura] el petit. I això és impossible.

Resulta, doncs, que A i B no mesuren cap nombre més petit que C.

Per tant, C és el [nombre] més petit mesurat tant per A com per B. ♠

328. Hipòtesi de l'absurd.

b) Ara suposem que A i B no són primers entre si.

[*Construcció*.] Considerem els dos nombres mínims F i E que tenen la raó de A i B. [EVII 33]

Aleshores, el nombre que obtenim multiplicant A per E és igual al que obtenim multiplicant B per F. [EVII 19]

Sigui C aquest nombre. ♣

b_1) D'això en resulta que C també és el nombre que obtenim multiplicant B per F. [Nc 1]

Aleshores, tant A com B mesuren C. ♠

Afirmo que [C] també és el [nombre] més petit [que és mesurat pels dos].

b_2) Perquè, si no ho és,[329] A i B són mesurats per un nombre més petit que C.

En diem D.

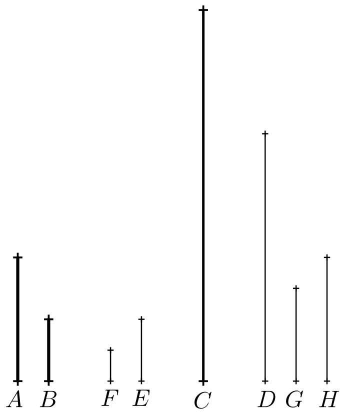


FIGURA EVII 34*b*

Aleshores, A i B mesuren D tantes vegades com unitats tenen uns certs nombres G i H, respectivament. [DVII 3]

Per tant, A multiplicat per G, i B multiplicat per H donen D. [DVII 15]

En conseqüència, A multiplicat per G és igual a B multiplicat per H. [Nc 1]

D'això en resulta que A és a B com H a G. [EVII 19]

Però A és a B com F a E.

I F és a E com H a G, [Nc 1]
en què F i E són [els nombres] mínims [amb la raó de H i G].

I els nombres mínims que tenen la mateixa raó [d'uns altres dos] els mesuren el mateix nombre de vegades;
el gran el gran, i el petit el petit. [DVII 20]

Per tant, E mesura G.

329. Hipòtesi de l'absurd.

I, com que A multiplicat per E i G dona C i D[, respectivament], resulta que E és a G com C a D. [EVII 17]

Però E mesura G.

Per tant, C mesura D. [DVII 20] ♠

I això és impossible.

En definitiva, A i B no són mesurats per cap nombre més petit que C.

Per tant, C és el nombre mínim mesurat per A i B.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVII 35. *Si dos nombres mesuren un nombre, el [nombre] més petit mesurat per tots dos també el mesura.*[330]

Siguin A i B dos nombres que mesuren un nombre CD, i E el nombre més petit [mesurat per A i B alhora].

Afirmo que E també mesura CD.

[*Demostració.*] Si E no mesura CD,[331] sostraiem [el nombre] DF, mesurat per E, que produeix un residu CF més petit que E.[332]

Atès que A i B mesuren E, i E mesura DF; A i B també mesuren DF. [per transitivitat]

Però [A i B] mesuren tot CD.

En conseqüència, tots dos mesuren el residu CF, [per compatibilitat] que és més petit que E. I això és impossible.

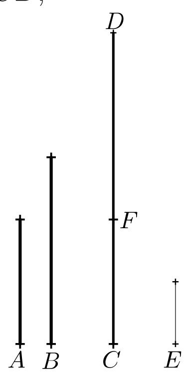


FIGURA EVII 35

Per tant, no pot ser que E no mesuri CD.

En definitiva, E mesura CD.

I això és el que volíem demostrar. ♠[333]

EVII 36. *Volem trobar el nombre més petit mesurat per tres nombres donats.*[334]

Siguin A, B i C tres nombres donats.

330. Si $m|p$ i $n|p$, aleshores $\mu|p$, en què $\mu = \text{mcm}\,(m,n) = [m,n]$.
331. Hipòtesi de l'absurd.
332. Usem l'antifèresi, que és el mètode d'EVII 1 i EVII 2.
333. La demostració es basa només en la divisió entera per defecte.
334. Donats $m,n,p \in \mathbb{N}$, existeix $M = \text{mcm}\,(m,n,p) = [m,n,p]$.

Volem determinar el més petit dels nombres mesurats per A, B i C.
[*Construcció.*] Sigui D el [nombre] més petit mesurat per [els dos nombres] A i B. [Evii 34]

Es pot donar una d'aquestes dues possibilitats:[335]

a) C mesura D.

b) C no mesura D.

a) En primer lloc, suposem que [C] mesura [D]. ♣

[*Demostració.*] a_1) A més, A i B també el mesura.

Resulta, doncs, que [tots tres] A, B i C mesuren D. ♠

Afirmo que [D] és el [nombre] més petit [mesurat per A, B i C].

[*Demostració.*] a_2) Si no és així,[336]
A, B i C mesuren [un] nombre
—que en diem E— més petit que D.

Atès que [els tres nombres] A, B i C mesuren E, també ho fan A i B.

En conseqüència, el nombre més petit mesurat per A i B mesura E. [Evii 35]

Però D és el [nombre] més petit mesurat per A i B;
per tant, D també mesura E, [Evii 35]
és a dir, el gran mesura el petit. I això és impossible.

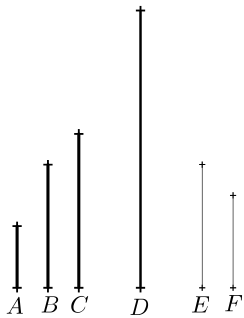


Figura Evii 36

Aleshores, [els tres nombres] A, B i C no mesuren cap nombre més petit que D.

D és, doncs, el nombre més petit mesurat per A, B i C. ♠

b) Suposem, en canvi, que C no mesura D.

[*Construcció.*] Considerem el nombre més petit E mesurat per C i D. [Evii 34] ♣

b_1) Atès que A i B mesuren D, i D mesura E,
tenim que A i B mesuren E. [per transitivitat]

Però C també el mesura.

Per tant, A, B i C mesuren E. ♠

Afirmo que [E] és el [nombre] més petit [mesurat per A, B i C].

335. Disjunció de casos.

336. Hipòtesi de l'absurd.

b_2) Si no ho és,[337]
[els tres nombres] A, B i C mesuren un [nombre]
—que en diem F— més petit que E.

Atès que [els tres nombres] A, B i C mesuren F, A i B també el mesuren.

Aleshores, el [nombre] més petit mesurat per A i B també mesura F. [EVII 35]

Però D és el [nombre] més petit mesurat per A i B,
per tant, D mesura F, i C també ho fa.

En definitiva, [els dos nombres] D i C mesuren F.

En conseqüència, el [nombre] més petit mesurat per D i C també el mesura. [EVII 35]

Però E és el [nombre] més petit mesurat per C i D.

Per tant, E mesura F, el gran [mesura] el petit. I això és impossible.

Resulta, doncs, que [els tres nombres] A, B i C no mesuren cap nombre més petit que E.

En conseqüència, E és el [nombre] més petit que és mesurat pe[ls tres nombres] A, B i C. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVII 37. *Si un nombre és mesurat per un nombre, el* [*nombre*] *mesurat comparteix una part homònima —amb el mateix nom—*[338] *amb el* [*nombre*] *que el mesura.*[339]

Siguin A i B [dos nombres] i suposem que A és mesurat per B.

Afirmo que A admet una part que té el mateix nom que B.

---

337. Hipòtesi de l'absurd.

338. El text grec diu: ὁμώνυμος, 'amb el mateix nom', 'homònim'.

339. Si m divideix n, aleshores $n = m + \cdots + m = k \times m$, ($k$ sumands) i $k = \frac{n}{m} := \frac{1}{m} n$ és un enter. De fet, doncs, amb aquesta manera d'expressar-se, Euclides fa referència als «inversos dels nombres naturals» —a la part m-èsima de n— com a multiplicadors, és a dir, parla de la m-èsima part de n. D'ací que els dos factors m i k siguin homònims. Atès que $1 = \frac{m}{m} = \frac{1}{m} m$, resulta que $1, m$ i m, n satisfan EVII 15. La proposició, doncs, la podia haver establert molt abans; però ho fa ara perquè, de fet, és un element d'EVII 39, que fa referència a la determinació del mínim comú denominador de tres fraccions unitàries. És una forma alternativa de la proposició EVII 37. Vegeu ZEUTHEN (1910).

[*Demostració.*] B mesura A tantes vegades com unitats té C.

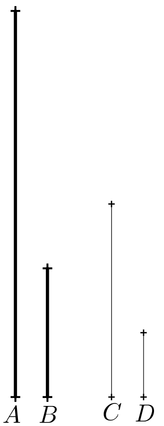


Figura Evii 37

Atès que B mesura A segons les unitats de C, i la unitat D també mesura C segons les seves pròpies unitats; [Dvii 2]

la unitat D mesura el nombre C tantes vegades com B [mesura] A. [Nc 1]

Alternativament, la unitat D mesura el nombre B tantes vegades com C [mesura] A. [Evii 15]

Aleshores, la part que la unitat D és del nombre B, C l'és del nombre A. [Nc 1]

Però la unitat D és una part del nombre B tantes vegades com indica B [és a dir, la B-èsima part].

En definitiva, C també és part de A tantes vegades com indica B [és a dir, C és la B-èsima part de A].

A admet una part C tantes vegades com indica B [és a dir, C és una B-èsima part de A i, per tant, A n'admet una B-èsima part].

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evii 38. *Si un nombre té una part, serà mesurat per un nombre homònim que indica el nombre de cops que la part n'és part.*[340]

Suposem que el nombre A té una part B.

Sigui C el [nombre] que designa quina part és B [de A, és a dir, B és la C-èsima part de A]. [Nc 1]

Afirmo que C mesura A.

[*Demostració.*] Atès que B és una part de A, anomenem C la mena de part que és.

Sigui D la unitat.

[La unitat] D també és part de[l nombre] C i el mesura tantes vegades com indica [és a dir, D és la C-èsima part de C].

Per tant, aquella part que la unitat D és del nombre C, B l'és de A.

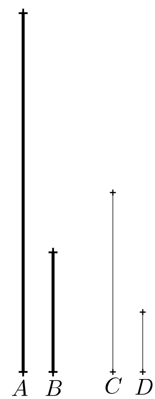


Figura Evii 38

340. És la proposició recíproca de l'anterior. Si $k = \frac{1}{m}\,n$, aleshores m és part de n.

Així doncs, la unitat D mesura el nombre C tantes vegades com B [mesura] A. [Dvii 20]

I, alternativament, la unitat D mesura el nombre B tantes vegades com C [mesura] A. [Evii 15]

En conseqüència, C mesura A.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Evii 39. *Volem trobar el nombre més petit que té com a part certes fraccions donades per endavant.*[341]

Siguin A, B i C les parts homònimes donades.

Volem determinar el nombre més petit que admet les parts A, B i C[, és a dir, que en sigui alhora A, B i C-èsima part].

[*Construcció.*] Siguin D, E i F els nombres homònims pel que fa a les parts A, B i C [, respectivament].[342]

Considerem el nombre més petit, G, mesurat per D, E i F. [Evii 36] ♣

[*Demostració.*] *a*) Aleshores, G té les parts homònimes D, E i F. [Evii 37]

I A, B i C són les parts de nom D, E i F[, respectivament].

Per tant, G té A, B i C com a parts. ♠

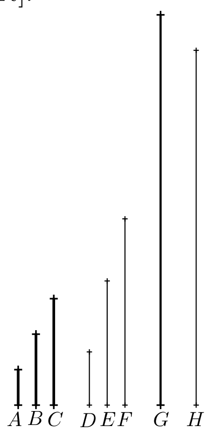


Figura Evii 39

Afirmo que [G] també és el nombre més petit [que accepta A, B i C com a parts].

[*Demostració.*] *b*) Si no és així,[343]
hi ha un nombre més petit que G —que en diem H— que admet A, B i C com a parts.

Atès que H admet A, B i C com a parts,
resulta que H també és mesurat pels nombres dels quals A, B i C són parts, respectivament. [Evii 38]

341. De fet, dona les fraccions $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$ i $\frac{1}{p}$, i demana el mínim nombre M de manera que cada part homònima sigui un nombre natural. Es tracta, doncs, de determinar el mcm (m, n, p).

342. Aquí, en lloc d'agafar les fraccions de numerador la unitat, agafa els denominadors corresponents m, n i p.

343. Hipòtesi de l'absurd.

Però D, E i F són els nombres dels quals A, B i C són parts[, respectivament].

Aleshores, H és mesurat per D, E i F.

Però [H] és més petit que G. I això és impossible.

En definitiva, no hi ha cap nombre més petit que G que admeti [els nombres] A, B i C com a part.

I això és el que volíem demostrar. ♠

A.1.2 Llibre vuitè: Eviii

Comentari. Aquest llibre, eminentment pitagòric, analitza algunes de les propietats dels nombres naturals que formen una progressió geomètrica, és a dir, que determinen raons successives contínues. Com al llibre anterior, les figures resulten absolutament ideals —són segments rectilinis però fan referència a nombres naturals. I també, com al llibre anterior, no respecten les raons que haurien de complir.[344] p. 12

[Text del llibre viii]

A.1.2*a* Les definicions p. 12

[No en conté cap.]

A.1.2*b* Les proposicions p. 12

[*Els nombres naturals en proporció contínua*]

Eviii 1. *En una multitud arbitrària de nombres en proporció contínua,*[345] *amb els* [*termes*] *extrems primers entre si, aquests* [*nombres*] *són els més petits possibles amb aquesta raó.*

Siguin A, B, C i D una multitud arbitrària de nombres en proporció contínua.

344. L'exemplar parcial de Vera (1970), volum i, p. 842-848, omet les figures de les poques proposicions que demostra.

345. El text grec diu: ἑξῆς ἀνάλογον. S'entén que $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{k-2}, m_{k-1}, m_k$ són nombres en «proporció contínua» si, i només si, satis-

I suposem que els extrems, A i D, són primers entre si.

Afirmo que A, B, C i D són els [nombres] més petits amb la mateixa raó.

[*Demostració.*] Si no és així,[346]
existeixen E, F, G i H, més petits que A, B, C i D[, respectivament], amb la mateixa raó.

Atès que A, B, C i D tenen la raó de E, F, G i H,
i les multituds [A, B, C i D, i E, F, G i H] el mateix [nombre de termes];

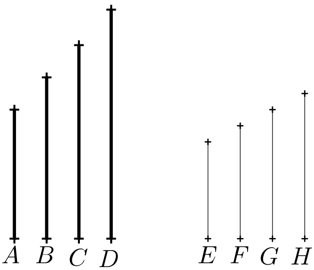


Figura Eviii 1

resulta que, *ex æquali*, A és a D com E a H. [Evii 14]

Però A i D són primers entre si,
i els [nombres] primers entre si són també els més petits dels [nombres amb la mateixa raó]. [Evii 21]

I els nombres més petits mesuren aquells [nombres] que tenen la mateixa raó [que ells] un nombre igual de vegades,
—el gran el gran, i el petit el petit—
és a dir, l'antecedent l'antecedent, i el consegüent el consegüent.
[Evii 20]

Resulta, doncs, que A mesura E, el gran el petit.
I això és impossible.

En definitiva, E, F, G i H, atès que són més petits que A, B, C i D, no poden tenir la mateixa raó que ells.

En conseqüència, A, B, C i D són els [nombres] més petits que tenen la mateixa raó.
I això és el que volíem demostrar. ♠

fan $\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_2}{m_3} = \cdots = \frac{m_{k-2}}{m_{k-1}} = \frac{m_{k-1}}{m_k}$. Si fem $\frac{m_{i-1}}{m_i} = q, 1 < i \leq k$ (racional), aleshores $m_{i+1} = m_1\, q^i$. És a dir, són nombres naturals en progressió geomètrica de raó $q = \frac{m_1}{m_2}$. Observem que, si volem que m_1 i m_2 siguin primers entre si, han de ser una mateixa potència de nombres primers entre si. Vegeu el problema 15 (pàgina 74).

Aconsellem també fer-ne una lectura més formalitzada. Vegeu la nota 211 (pàgina 91).

346. Hipòtesi de l'absurd.

EVIII 2. *Volem trobar els nombres més petits, tants com es requereixin, [que estan] en proporció contínua amb una raó donada.*[347]

Siguin A i B els nombres més petits que expressen la raó donada.

Volem determinar tants nombres com es demanin que tinguin la raó que hi ha entre A i B.

[*Construcció.*] Suposem que s'han requerit [tres o] quatre nombres.

Siguin C, D i E els nombres que obtenim multiplicant A per si mateix, A per B i B per si mateix, respectivament.[348]

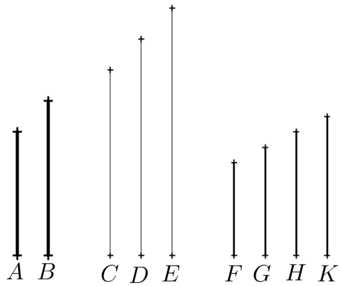


FIGURA EVIII 2

I siguin F, G, H i K els nombres que obtenim multiplicant C, D i E per A, respectivament, i B per E.[349] ♣

[*Demostració.*] *a*) Atès que C és el quadrat de A
i que obtenim D multiplicant A per B,
resulta que A és a B com C a D. [EVII 17]

Novament, atès que obtenim D i E multiplicant A per B i B per si mateix,
resulta que D i E els obtenim multiplicant A i B per B.

Per tant, A és a B com D a E. [EVII 18]

Ara bé, com que A és a B com C a D,
C és a D com D a E. [Nc 1]

I, atès que F i G els obtenim multiplicant A per C i D,
C és a D com F a G. [EVII 17]

Però C és a D com A a B.

Per tant, A és a B com F a G. [Nc 1]

---

347. Es tracta d'una mena de recíproc de l'anterior.

348. Siguin m, n dos nombres amb $(m, n) = 1$. Agafem $m^2, m \times n$ i n^2.

349. Calculem $m^k, m^{k-1} \times n, m^{k-2} \times n^2, \ldots, m \times n^{k-1}$, n^k. Òbviament, aquests nombres satisfan $\frac{m^k}{m^{k-1}\times n} = \frac{m^{k-1}\times n}{m^{k-2}\times n^2} = \cdots = \frac{m^2\times n^{k-2}}{m\times n^{k-1}} = \frac{m\times n^{k-1}}{n^k} := \frac{m}{n}$. De fet, com veiem en el porisma que segueix la proposició, s'ha generalitzat el resultat pitagòric que vam comentar a PLA (2016*a*), textos B 7*d*, p. 488-489.

Novament, atès que G i H els obtenim multiplicant D i E per A, resulta que D és a E com G a H. [Evii 17]

Però D és a E com A a B.

Per tant, A és a B com G a H. [Nc 1]

I, a més, atès que H i K els obtenim multiplicant A i B per E, A és a B com H a K. [Evii 18]

Però A és a B com F a G, i G a H.

En conseqüència, F és a G com G a H, i H a K. [Nc 1, iterat]

En definitiva, els nombres C, D, E i F, G, H, K són contínuament proporcionals i tenen la [mateixa] raó que hi ha entre A i B. ♠

[*Demostració.*] *b*) Atès que A i B són els [nombres] més petits que tenen la mateixa raó,
i que els [nombres] més petits que tenen una mateixa raó són primers entre si, [Evii 22]
A i B ho són.

Però C i E són els quadrats respectius de A i B,
i [A] multiplicat per C, i [B] multiplicat per E proporcionen F i K.

En conseqüència, C i E, i F i K són primers entre si, respectivament. [Evii 27]

I qualsevol multitud de nombres en proporció contínua que tingui els extrems primers entre si
està formada pels [nombres] més petits que tenen la mateixa raó. [Eviii 1]

En definitiva, C, D i E i F, G, H i K són els més petits [dels nombres en proporció contínua] que tenen la raó de A i B.

♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eviii 2, porisma. *Si tres nombres en proporció contínua són els més petits amb aquesta raó, els extrems són quadrats, i, si n'hi ha quatre, són cúbics.*

Eviii 3. *En una multitud arbitrària de nombres en proporció contínua [que siguin] els nombres més petits que tenen la mateixa raó, els [termes dels] extrems són primers entre si.*[350]

350. És el recíproc d'Eviii 1.

Siguin A, B, C i D una multitud arbitrària de nombres en proporció contínua [que són] els [nombres] més petits que tenen la mateixa raó.

Afirmo que els extrems, A i D, són primers entre si.

[*Demostració.*] Agafem els dos [nombres] mínims E, F [que tenen] la raó de A, B, C i D. [Evii 33]

I[, seguidament,] els tres [nombres] G, H i K amb la mateixa propietat.

I així successivament fins a assolir una multitud de [nombres] que sigui igual a la multitud dels [nombres] A, B, C i D. [Eviii 2]

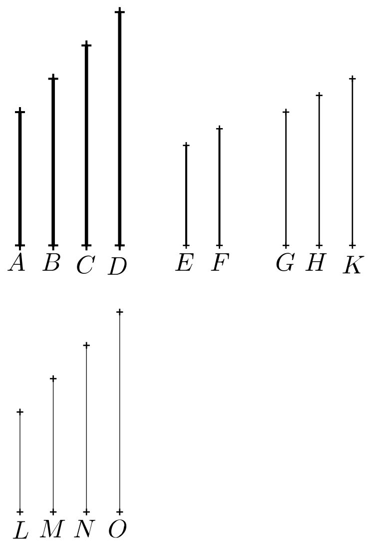


Figura Eviii 3

Es consideren determinats.

Siguin L, M, N i O.

Atès que E i F són [nombres] els més petits que tenen la mateixa raó,
resulta que són primers entre si. [Evii 22]

I, atès que els quadrats E i F han proporcionat G i K, respectivament,
i que hem aconseguit L i O multiplicant E i F per G i K, respectivament, [Eviii 2, porisma]
resulta que G i K, i L i O, també són primers entre si. [Evii 27]

Atès que A, B, C i D són els [nombres] més petits que tenen la mateixa raó [amb si mateixos], L, M, N i O són també els nombres més petits que tenen la raó de A, B, C i D.

I, a més, com que totes dues multituds [de nombres] A, B, C i D, i L, M, N i O tenen el mateix nombre [de membres],
resulta que A, B, C i D són iguals a L, M, N i O, respectivament.

En conseqüència, A és igual a L, i D a O.

Però L i O són primers entre si.

En definitiva, A i D també ho són. [per substitució][351]

351. Vegeu la nota 254 (pàgina 103).

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVIII 4. *Per a una multitud arbitrària de raons donades, [expressades] amb els nombres més petits, volem trobar els nombres més petits en proporció contínua*[352] *que tinguin les mateixes raons [que les donades].*[353]

Siguin les raons donades A amb B, C amb D, i E amb F [expressades] amb els nombres més petits. [EVII 33]

Volem trobar els nombres més petits en proporció contínua[354] amb les raons de A amb B, C amb D, i E amb F.

[*Construcció.*] Considerem el nombre més petit, G, mesurat [tant] per B [com] per C. [EVII 34]

A mesura [un cert nombre] H tantes vegades com B mesura G.[355]

---

352. Atenció! Aquesta expressió, que es repeteix cinc vegades en la demostració, no fa referència a la concatenació de raons iguals en les quals el consegüent d'una és igual a l'antecedent de la següent. Fa referència a raons en les quals el consegüent d'una és igual a l'antecedent de la següent. Però, en aquest cas, les raons no són iguals entre si. Són iguals a raons donades per endavant que necessàriament no són iguals, si bé ho podrien ser. Vegeu el problema 14 (pàgina 74).

353. El raonament euclidià, extraordinàriament llarg, es redueix, de fet, a això. Disposem de dues col·leccions de nombres, m_1, m_2, m_3 i n_1, n_2, n_3 amb els nombres associats primers entre si, és a dir, $(m_i, n_i) = 1, i = 1, 2, 3$. Considera les raons $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}$ i $\frac{m_3}{n_3}$, que no són necessàriament iguals. Volem trobar quatre nombres naturals mínims p_1, p_2, p_3 i p_4, de manera que $\frac{m_1}{n_1} = \frac{p_1}{p_2}, \frac{m_2}{n_2} = \frac{p_2}{p_3}$ i $\frac{m_3}{n_3} = \frac{p_3}{p_4}$. Vegeu la nota anterior per entendre per què Euclides diu que «p_1, p_2, p_3 i p_4 són nombres en proporció contínua».

A fi de lligar n_1 amb m_2, Euclides considera $M_1 = [n_1, m_2]$. Aleshores, $M_1 = \kappa \times n_1 = \lambda \times m_2$ i pot treballar amb $n_1' = \kappa \times n_1$ i $m_2' = \lambda \times m_2$. Ara ha de lligar m_2' amb n_3. Considera $M_2 = [\lambda \times n_2, m_3]$. Aleshores, $M_2 = \mu \times \lambda \times n_2 = \nu \times m_3$. D'això en resulta que $\frac{\kappa \times m_1}{\kappa \times n_1} = \frac{m_1}{n_1}, \frac{\lambda \times m_2}{\lambda \times n_2} = \frac{m_2}{n_2}, \frac{\mu \times \kappa \times m_1}{\mu \times \kappa \times n_1} = \frac{m_1}{n_1}, \frac{\mu \times \lambda \times m_2}{\mu \times \lambda \times n_2} = \frac{m_2}{n_2}$ i $\frac{\nu \times m_3}{\nu \times n_3} = \frac{m_3}{n_3}$. Finalment, $p_1 = \mu \times \kappa \times m_1$, $p_2 = \mu \times \kappa \times n_1, p_3 = \mu \times \lambda \times n_2 = \nu \times m_3$ i $p_4 = \mu \times \lambda \times n_2 = \nu \times n_3$. Vegeu el problema 14 (pàgina 74).

354. Vegeu la nota 352 (pàgina 140).

355. Siguin m, n i p tres nombres. Si n mesura m, podem determinar un nombre q que sigui mesurat per p tantes vegades com n mesura m. De fet, és el nombre $q = \frac{m}{n} \times p$.

I D mesura K tantes vegades com C mesura G.[356]

Aleshores, es dona una d'aquestes dues possibilitats:[357]

a) E mesura K.

b) E no mesura K.

a) En primer lloc,

[*Demostració.*] a_1) [Suposem que] E mesura K.

F mesura [un cert nombre] L tantes vegades com E mesura K.[356]

Atès que A mesura H el mateix nombre de vegades que B [mesura] G, A és a B com H a G. [Dvii 20, Evii 13]

Per les mateixes [raons], C és a D com G a K, i E a F com K a L.

Així doncs, H, G, K i L són [quatre nombres] en proporció contínua[358] i amb les raons respectives de A amb B, C amb D, i E amb F.

♣

Afirmo que [també] són els [nombres] més petits [en proporció contínua[358] amb aquestes raons].

[*Demostració.*] a_2) Si H, G, K i L no són els nombres més petits en proporció contínua amb les raons de A amb B, C amb D, i E amb F,[359]

tenim [nombres més petits, com ara] N, O, M i P.

I, atès que A és a B com N a O,

i A i B són els [nombres] més petits que tenen la mateixa raó,

resulta que els [nombres] més petits mesuren els [nombres] que tenen la mateixa raó [que hi ha entre ells] un nombre igual de vegades,

—el gran el gran, i el petit el petit,

és a dir, l'antecedent [mesura] l'antecedent, i el conseqüent el conseqüent. [Evii 20]

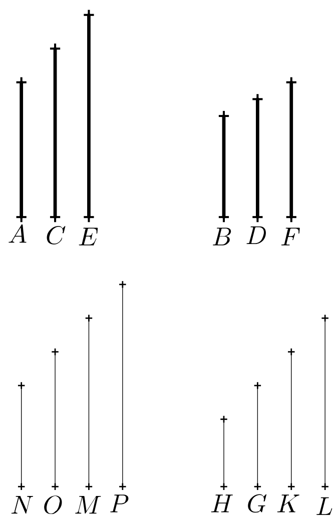


Figura Eviii 4*a*

356. Vegeu la nota 355 (pàgina 140).

357. Disjunció de casos.

358. Vegeu la nota 352 (pàgina 140).

359. Hipòtesi de l'absurd.

Per tant, B mesura O.

Pel mateix [raonament], C també el mesura.

D'això en resulta que [tant] B com C mesuren O.

Per tant, el nombre més petit mesurat alhora per B i C també mesura O. [Evii 35]

I G és el nombre més petit mesurat [tant] per B [com per] C.

En conseqüència, G mesura O, el gran [mesura] el petit. I això és impossible.

En definitiva, no hi ha nombres més petits que H, G, K i L en proporció contínua[360] amb les raons de A amb B, C amb D, i E amb F. ♠

b) Suposem que E no mesura K.

[*Construcció i demostració.*] Sigui M el nombre més petit mesurat [tant] per E com per K. [Evii 34]

H i G mesuren N i O, respectivament, tantes vegades com K mesura M.[361]

I F mesura P tantes vegades com E mesura M.[361]

Atès que H mesura N el mateix nombre de vegades que G [mesura] O,
resulta que H és a G com N a O. [Dvii 20 i Evii 13]

A més, H és a G com A a B.

I A és a B com N a O. [Nc 1]

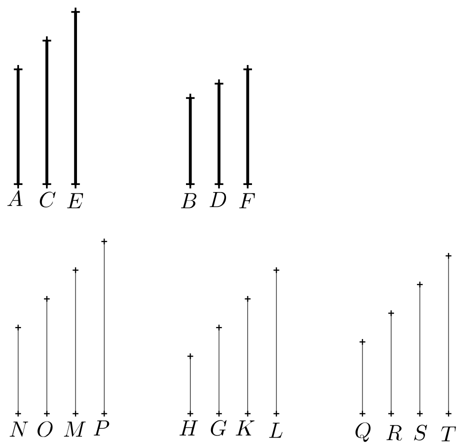


Figura Eviii 4*b*

Per les mateixes [raons], C és a D com O a M.

De bell nou, atès que E mesura M el mateix nombre de vegades que F [mesura] P,
resulta que E és a F com M a P. [Dvii 20 i Evii 13]

360. Vegeu la nota 352 (pàgina 140).
361. Vegeu la nota 355 (pàgina 140).

Aleshores, N, O, M i P són [quatre nombres] en proporció contínua[362] amb la raó que hi ha entre A i B, C i D, i E i F. ♠ ♣

Afirmo que [són,] a més, els [nombres] més petits amb les raons entre A i B, C i D, i E i F.

[*Demostració.*] Si no és així,[363]
hi ha [quatre] nombres Q, R, S i T, més petits que N, O, M i P, en proporció contínua[362] i amb les raons entre A i B, C i D, i E i F.

I, com que Q és a R com A a B,
A i B són els [nombres] més petits [amb la mateixa raó],
i els [nombres] més petits mesuren aquells [nombres] que tenen la mateixa raó [que hi ha entre ells] un nombre igual de vegades;
resulta que l'antecedent [mesura] l'antecedent, i el consegüent el consegüent. [EVII 20]

Per tant, B mesura R.

Per les mateixes raons, C el mesura.

Així doncs, tant B com C mesuren R.

D'això en resulta que el [nombre] més petit mesurat per B i C també mesura R. [EVII 35]

I G és el nombre més petit mesurat per B i C.

En definitiva, G mesura R. [EVII 13]

I G és a R com K a S.

Per tant, K també mesura S. [DVII 20]

Però E també el mesura. [EVII 20]

Aleshores, tant E com K mesuren S.

Per tant, el [nombre] més petit mesurat per E i K també mesura S. [EVII 35]

Però M és el [nombre] més petit mesurat per E i K.

Per tant, M mesura S; el gran el petit. I això és impossible.

Aleshores, no hi ha [quatre] nombres més petits que N, O, M i P en proporció contínua[362] amb les raons entre A i B, C i D, i E i F.

En definitiva, N, O, M i P són els [nombres] més petits en proporció contínua[362] amb les raons entre A i B, C i D i E i F. ♠

362. Vegeu la nota 352 (pàgina 140).
363. Hipòtesi de l'absurd.

I això és el que volíem demostrar. ♠[364]

EVIII 5. *La raó entre [dos] nombres plans és la raó composta de les que hi ha entre els seus costats.*

Siguin A i B nombres plans,
i els nombres C, D, i E, F els costats de A i B, respectivament.

Afirmo que la raó entre A i B és la raó composta de les [raons] entre els costats.

[*Demostració.*] Per a les raons entre C i E, i D i F, considerem els nombres més petits G, H i K en proporció contínua[365] i amb les raons entre C i E, i D i F. [EVII 33 i EVIII 4][366]

Així, C és a E com G a H, i D és a F com H a K. [EVIII 4]

Sigui L el [nombre] que resulta de multiplicar D per E. [DVII 15]

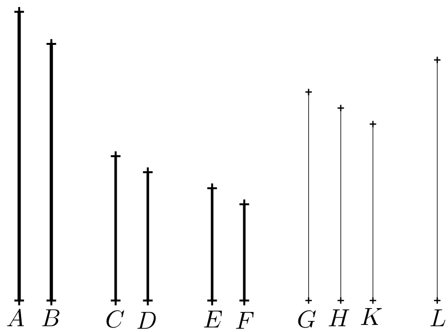


FIGURA EVIII 5

Aleshores, atès que [el nombre] D multiplicat per C dona A,
i que hem obtingut L multiplicant [D] per E,
resulta que C és a E com A a L. [EVII 17]

I C és a E com G a H.

Per tant, G és a H com A a L. [Nc 1]

Novament, atès que hem obtingut L multiplicant E per D, [DVII 15]
i també multiplicant F per B, [DVII 15]
resulta que D és a F com L a B. [EVII 17]

364. Aquesta demostració és un ade per a justificar el que dèiem a la nota 345 (página 135). Vegeu també la nota 353 (pàgina 140), tantes vegades esmentada, i el problema 14 (pàgina 74) associat.

365. Vegeu la nota 352 (pàgina 140).

366. Per tal de poder aplicar el mètode descrit en la proposició precedent, cal partir de la representació canònica —la que té els termes irreductibles— de les raons $\frac{C}{E}$ i $\frac{D}{F}$. I la garantia que puguem usar aquesta representació la proporciona la proposició EVII 33.

Però D és a F com H a K.

Per tant, H és a K com L a B. [Nc 1]

Però hem vist que G és a H com A a L.

Per tant, *ex æquali*, G és a K com A a B. [Evii 14]

I la raó entre G i K és la raó composta [de les raons] dels [nombres plans] A i B. [Dv 9][367]

En conseqüència, la raó entre A i B també és la raó composta de les raons que hi ha entre els costats [dels nombres plans, A i B].

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eviii 6. *Considerem una multitud arbitrària de nombres en proporció contínua.*[368] *Si el primer* [*nombre*] *no mesura el segon, cap altre* [*nombre*] *no en mesura cap altre.*

Siguin A, B, C, D i E una multitud arbitrària de nombres en proporció contínua.

Suposem que A no mesura B.

Afirmo que aquests nombres no es mesuren els uns als altres ordenadament.

[*Demostració.*] Atès que A no mesura B, és obvi que cap dels [nombres] A, B, C, D i E no mesura el següent. [Dvii 20]

Afirmo que cap nombre no en mesura un altre.

Suposem que A mesura C.[369]

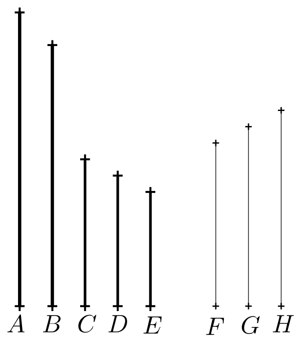


Figura Eviii 6

Considerem la mateixa quantitat de nombres F, G i H que A, B i C, mínims amb les mateixes raons que A, B i C. [Evii 33 i Eviii 2][370]

367. Usa la definició Dv 9, que és vàlida entre magnituds, però l'aplica a nombres: «La raó que hi ha entre G i K és la raó doble —composta— de les raons que hi ha entre G i H, i H i K.»

368. Aquí recuperem el significat autèntic d'aquesta expressió. Vegeu la nota 345 (pàgina 135).

369. Hipòtesi de l'absurd.

370. Recordem que, a Eviii 2, no s'exclou la possibilitat que les raons formin una proporció contínua en el sentit propi del terme. Vegeu la nota 352 (pàgina 140).

Aleshores, com que F, G i H tenen [successivament] les mateixes raons que [tenen successivament] A, B i C,
i que la multitud A, B i C és igual a la F, G i H;
resulta que, *ex æquali*, A és a C com F a H. [EVII 14]

I, atès que A és a B com F a G,
i[, per hipòtesi,] A no mesura B,
F tampoc no mesura G. [DVII 20]

Per tant, F no és la unitat perquè la unitat mesura tots els nombres. [DVII 1 i 2]

A més, sabem que F i H són primers entre si [EVIII 3]
i que[, en conseqüència,] F no mesura H. [DVII 12]

I, com que F és a H com A a C,
A tampoc no mesura C. [DVII 20]

Anàlogament, podem veurem que cap [nombre] no mesura cap [nombre].
I això és el que volíem demostrar. ♠

EVIII 7. *Considerem una multitud arbitrària de nombres en proporció* [*contínua*] *en la qual el primer mesura el darrer. Aleshores,* [*el primer*] *també mesura el segon.*

Siguin A, B, C i D nombres arbitraris en proporció contínua.

Suposem que A mesura D.

Afirmo que A també mesura B.

[*Demostració.*] Si A no mesura B,[371]
cap [nombre] no mesura cap [nombre]. [EVIII 6]

Però A mesura D. I això és impossible.

En conseqüència, A també mesura B.
I això és el que volíem demostrar. ♠

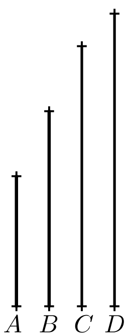


FIGURA EVIII 7

EVIII 8. *Si entre*[372] *dos nombres existeixen altres nombres en proporció contínua, aleshores entre els nombres que tinguin la mateixa raó*

371. Hipòtesi de l'absurd.
372. Usa la paraula ἐμπιπτειν.

[*que hi ha entre ells dos*] *també existeix la mateixa quantitat de nombres en proporció contínua.*[373]

Siguin C i D [els nombres] en proporció contínua que hi ha entre A i B.

Considerem que A és a B com E a F.

Afirmo que entre E i F hi podem col·locar la mateixa quantitat de nombres en proporció contínua que hi ha entre A i B.

[*Demostració.*] Sabem que existeix la mateixa quantitat de termes mínims G, H, K i L que [termes té] la multitud A, B, C i D, i que tenen la mateixa raó que aquests. [EVII 33 i EVIII 2]

I també que els extrems, G i L, són primers entre si. [EVIII 3]

I, atès que [les col·leccions de nombres] A, B, C i D, i G, H, K i L tenen les mateixes raons i la mateixa multitud [de termes], resulta que, *ex æquali*, A és a B com G a L. [EVII 14]

I A és a B com E a F.

Per tant, G és a L com E a F. [Nc 1]

Però G i L són primers entre si, i els [nombres] primers entre si també són els més petits [amb la mateixa raó]. [EVII 21]

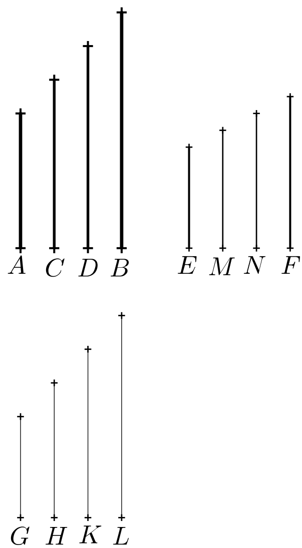


FIGURA EVIII 8

I els nombres més petits mesuren els [nombres] amb la mateixa raó el mateix nombre de vegades;

---

373. Si $\frac{m_1}{m_k} = \frac{n_1}{n_k}$ i entre m_1 i m_2 hi ha els nombres $m_2, \ldots, m_{k-1}$ i $m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}, m_k$ estan en proporció contínua; aleshores entre n_1 i n_k hi ha $n_2, \ldots, n_{k-1}$, i $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_k$ que també estan en proporció contínua.

Només cal considerar els $p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}, p_k$ mínims que mantinguin les mateixes relacions. Aleshores, p_1 i p_k seran primers entre si, amb $\frac{p_1}{p_k} = \frac{m_1}{m_k} = \frac{n_1}{n_k}$. Tenim, doncs, que $n_1 = \ell \times p_1$ i $n_k = \ell \times p_k$. Els nombres són $\ell \times p_1, \ell \times p_2, \ldots, \ell \times p_{k-1}, \ell \times p_k$.

el gran el gran, i el petit el petit;
l'antecedent l'antecedent, i el consegüent el consegüent. [EVII 20]

Així doncs, G mesura E el mateix nombre de vegades que L [mesura] F.

Resulta, doncs, que G mesura E tantes vegades com H i K mesuren M i N, respectivament.

Per tant, G, H, K i L mesuren E, M, N i F el mateix nombre de vegades[, respectivament].

En conseqüència, entre G, H, K i L hi ha les mateixes raons que entre E, M, N i F. [DVII 20]

Però entre G, H, K i L també hi ha les mateixes raons que entre A, C, D i B.

Per tant, entre A, C, D i B hi ha les mateixes raons que entre E, M, N i F; [Nc 1]
i estan en proporció contínua.

Aleshores, E, M, N i F també ho estan.

És a dir, hi ha tants nombres en proporció contínua entre A i B com nombres hi ha també en proporció contínua entre E i F.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVIII 9. *Si dos nombres es troben entre nombres primers entre si en proporció contínua,*[374] *existeixen dos grups amb el mateix nombre de termes, també en proporció contínua, entre la unitat i cada un dels dos nombres.*

Siguin A i B dos nombres primers entre si,
i C i D [dos nombres] en proporció contínua.

Considerem la unitat E.

Afirmo que, entre cada un dels nombres A i B i la unitat E,
hi ha tants termes en proporció contínua com termes en proporció contínua hi ha entre A i B.

Considerem els dos nombres més petits F i G, que tenen la raó que hi ha entre A, C, D i B. [EVII 33]

374. Recordem que els dos nombres primers entre si són la mateixa potència de dos nombres primers entre si. Vegeu la nota 345 (pàgina 135).

I tenint en compte els tres [nombres mínims] H, K i L amb la mateixa propietat,
els augmentem d'un en un successivament fins a aconseguir la multitud de [nombres mínims] igual a la multitud A, C, D i B. [Eviii 2]

Siguin M, N, O i P.

Aleshores, és clar que obtenim H i M multiplicant F per si mateix i per H, respectivament. [Eviii 2, porisma]

I[, anàlogament,] obtenim L i P multiplicant G per si mateix i per L, respectivament. [Eviii 2, porisma]

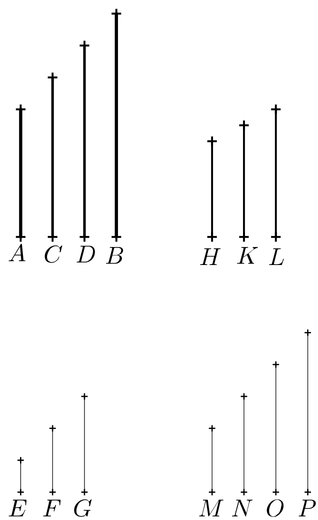


Figura Eviii 9

Atès que M, N, O i P són els [nombres] més petits amb la raó que hi ha entre F i G,
que A, C, D i B són els [nombres] mínims amb aquesta raó, [Eviii 1]
i que la multitud M, N, O i P és igual a la multitud A, C, D i B;
resulta que [els nombres] M, N, O i P són iguals a[ls nombres] A, C, D i B, respectivament. [Evii 20][375]

En conseqüència, M és igual a A, i P a B.

Però, com que hem obtingut H multiplicant F per si mateix,
F mesura H segons les unitats de F. [Dvii 15]

Però la unitat E també mesura F segons les unitats de F. [Dvii 2]

Aleshores, la unitat E mesura el nombre F tantes vegades com F [mesura] H.

En conseqüència, la unitat E és al nombre F com F a H. [Dvii 20]

De bell nou, atès que hem obtingut M multiplicant F per H,
tenim que H mesura M d'acord amb les unitats de F. [Dvii 15]

I la unitat E també mesura el nombre F d'acord amb les unitats de F. [Dvii 2]

375. De fet, és un porisma immediat d'Evii 20.

Així, la unitat E mesura el nombre F tantes vegades com H [mesura] M.

Aleshores, la unitat E és al nombre F com H a M. [Dvii 20]

Però hem vist que [la unitat] E és al nombre F com F a H.

Per tant, [la unitat] E és al nombre F com F a H, i H a M.[Nc 1]

I M és igual a A.

Per tant, la unitat E és al nombre F com F a H, i H a A.
[per substitució o Ev 7]

Per les mateixes [raons], la unitat E és al nombre G com G a L, i L a B.

En definitiva, entre cada un de[ls nombres] A i B i la unitat E hi ha tants nombres en proporció contínua com n'hi ha entre A i B.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eviii 10. *Si [una certa quantitat de] nombres cau en proporció contínua entre dos nombres i la unitat,*[376] *entre aquests dos nombres n'hi ha tants en proporció contínua com entre ells i la unitat.*[377]

Siguin D i E, i F i G els nombres en proporció contínua que hi ha entre la unitat C, i A i B[, respectivament].

Afirmo que, entre els nombres A i B, hi ha tants nombres en proporció contínua com n'hi ha entre cada un d'ells i la unitat C.

[*Demostració.*] Considerem [el nombre] H obtingut multiplicant D per F, [Dvii 15]

i [els nombres] K i L obtinguts multiplicant D i F per H, respectivament. [Dvii 15]

Atès que la unitat C és al nombre D com D a E,

resulta que la unitat C mesura el nombre D tantes vegades com D [mesura] E, [Dvii 20]

---

376. Entre cada un dels nombres i la unitat hi ha la mateixa quantitat de nombres.

377. És la proposició recíproca de l'anterior. Suposem que entre m i n, amb $(m, n) = 1$, hi ha k termes en progressió geomètrica, $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Els termes de la progressió $m := n_0, n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_k, n_{k+1} := n$ els volem identificar amb els termes $p^{k+1}, p^k\, q, \ldots, p\, q^k, q^{k+1}$, amb $p, q \in \mathbb{N}$, de manera que, si tenim $m = p^{k+1}$ i $n = q^{k+1}$, resulta que $\frac{1}{p} = \frac{p}{p^2} = \frac{p^2}{p^3} = \cdots = \frac{p^k}{p^{k+1}}$ i $\frac{1}{q} = \frac{q}{q^2} = \frac{q^2}{q^3} = \cdots = \frac{q^k}{q^{k+1}}$.

i que el mesura segons les unitats de D. [Dvii 2]

Per tant, el nombre D també mesura E d'acord amb les unitats de D. [Nc 1 o per substitució]

Aleshores, obtenim E multiplicant D per si mateix. [Dvii 15]

Novament, atès que la [unitat] C és al nombre D com E a A, [Nc 1]
resulta que la unitat C mesura el nombre D tantes vegades com E [mesura] A, [Dvii 20]
i la unitat C mesura el nombre D d'acord amb les unitats de D. [Dvii 2]

Aleshores, [el nombre] E també mesura A segons les unitats de D. [Dvii 2 i 20]

Per tant, obtenim A multiplicant D per E. [Dvii 15]

I, per les mateixes [raons], obtenim G i B multiplicant F per si mateix i per G[, respectivament].

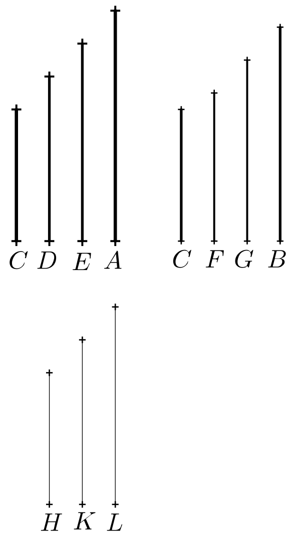


Figura Eviii 10

Així doncs, atès que obtenim E i H multiplicant D per si mateix i per F,
resulta que D és a F com E a H. [Evii 17]

Per les mateixes raons, D és a F com H a G. [Evii 18]

I, aleshores, E és a H com H a G. [Nc 1]

De bell nou, obtenim A i K multiplicant D per E i per H, respectivament.

Aleshores, E és a H com A a K. [Evii 17]

Però E és a H com D a F.

Per tant, D és a F com A a K. [Nc 1]

De bell nou, atès que obtenim K i L multiplicant D i F per H,
resulta que D és a F com K a L. [Evii 18]

Però D és a F com A a K.

Per tant, A és a K com K a L. [Nc 1]

I, a més, atès que obtenim L i B multiplicant H i G per F, respectivament,
resulta que H és a G com L a B. [EVII 17]

I H és a G com D a F.

Per tant, D és a F com L a B. [Nc 1]

Però hem vist que D és a F com A a K, i K a L.

En conseqüència, A és a K com K a L, i L a B. [Nc 1, iterat]

En definitiva, A, K, L i B estan en proporció contínua, successivament.

De tot això en resulta que hi ha tants nombres en proporció contínua entre A i B com entre [cada un dels nombres] A i B, i la unitat. I això és el que volíem demostrar. ♠

EVIII 11. a) *Existeix [un nombre que és] la mitjana proporcional*[378] *de dos [nombres] quadrats donats.* b) *I [un nombre] quadrat és a [un altre nombre] quadrat com la raó doble*[379] *dels costats del primer quadrat i del segon.*[380]

Siguin A i B [dos] nombres quadrats,
i C i D els costats de A i B, respectivament.

Afirmo que hi ha un nombre [que és la] mitjana proporcional de A i B,
i que entre A i B hi ha la raó quadrada de la que hi ha entre C i D.

[*Construcció.*] Sigui E el nombre que obtenim multiplicant C per D. [DVII 15] ♣

[*Demostració.*] *a*) Atès que A és un quadrat
i C n'és el costat,
resulta que obtenim A multiplicant C per si mateix. [DVII 18]

Per les mateixes [raons], obtenim B multiplicant D per si mateix. [DVII 18]

Com que obtenim A i E multiplicant C per C i D, respectivament, resulta que C és a D com A a E. [EVII 17]

---

378. En proporció contínua.

379. La raó composta d'una raó amb si mateixa o el quadrat de la raó.

380. Hi trobem la proposició platònica que vam comentar a PLA (2016*b*), nota 199, p. 144.

Pel mateix [raonament], C és a D com E a B. [Evii 18]

Per tant, A és a E com E a B. [Nc 1]

En definitiva, hi ha un nombre[, en concret E,] que és la mitjana proporcional entre A i B. ♠

Ara afirmo que la raó entre A i B és el quadrat de la raó que hi ha entre C i D.

[*Demostració.*] *b*) Atès que A, E i B són tres nombres en proporció contínua,

resulta que la raó entre A i B és el quadrat de la raó entre A i E. [Dv 9][381]

Però A és a E com C a D. [Evii 17]

En definitiva, la raó entre A i B és el quadrat de la raó entre el costat C i el costat D.

[Nc 1 o per substitució]

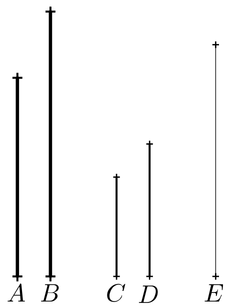


Figura Eviii 11

I això és el que volíem demostrar. ♠[382]

Eviii 12. a*) Entre dos [nombres] cúbics hi ha dues mitjanes proporcionals.* b*) I la raó entre dos [nombres] cúbics és igual a la raó triple [de la que hi ha] entre els seus costats.*[383]

Siguin A i B [dos nombres] cúbics,

i C i D els costats respectius.

Afirmo que existeixen dues mitjanes proporcionals entre A i B,[384] i que la raó que hi ha entre ells és la raó triple[, la raó cúbica,] de la que hi ha entre els [costats][385] C i D.

---

381. Com ja hem dit a la nota 367 (pàgina 145), Euclides aplica, als nombres, unes definicions que ha establert per a les magnituds.

382. En símbols: $\frac{m^2}{m \times n} = \frac{m \times n}{n^2}$.

383. La raó entre els seus costats al cub. És, en tot, una generalització de l'anterior. En símbols: $\frac{m^3}{m^2 \times n} = \frac{m^2 \times n}{m \times n^2} = \frac{m\, n^2}{n^3}$. Vegeu la nota 380 (pàgina 152).

384. Entre dos [nombres] cúbics sempre hi podem interposar dues mitjanes proporcionals. Recordem que la determinació de dues mitjanes proporcionals entre dos segments prové del problema de la duplicació del cub. Vegeu Pla (2016*b*), ítem 3, p. 239 i següents.

385. Són nombres.

[*Construcció.*] Sigui E el quadrat de C, i F el que obtenim multiplicant C per D. [Dvii 15 i 18]

Anàlogament, G és el quadrat de D,
i H i K els [nombres] que obtenim multiplicant C i D per F, respectivament. ♣

[*Demostració.*] *a*) Atès que A és [el nombre] cúbic de costat [el nombre] C
i E és el quadrat de C,
resulta que C i E multiplicats per C donen E i A, respectivament. [Dvii 17 i 18]

Per les mateixes [raons], D al quadrat dona G, però multiplicat per G dona B. [Dvii 17 i 18]

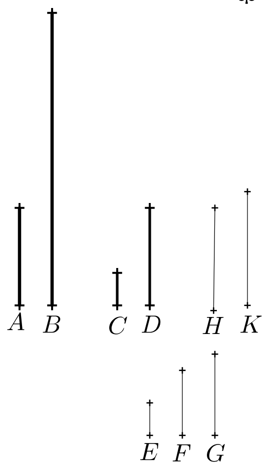


Figura Eviii 12

Atès que C multiplicat per C i D dona E i F, respectivament,
tenim que C és a D com E a F. [Evii 17]

Per les mateixes [raons], C és a D com F a G. [Evii 18]

Novament, atès que obtenim A i H multiplicant C per E i F, respectivament,
resulta que E és a F com A a H. [Evii 17]

Però E és a F com C a D.

Per tant, C és a D com A a H. [Nc 1]

Novament, atès que C i D multiplicats per F donen H i K, respectivament,
tenim que C és a D com H a K. [Evii 18]

I, a més, novament, atès que F i G, multiplicats per D, donen K i B,
tenim que F és a G com K a B. [Evii 17]

I F és a G com C a D.

I, a més, C és a D com A a H, H a K, i K a B. [Nc 1, iterat]

Així doncs, H i K són dos [nombres] mitjanes proporcionals entre A i B. ♠

Afirmo que la raó entre A i B és la raó triple de la que hi ha entre C i D.

[*Demostració.*] *b*) Atès que A, H, K i B són quatre nombres en proporció contínua,

resulta que la raó entre A i B és la raó triple de la que hi ha entre A i H. [Dv 10]

I A és a H com C a D.

En definitiva, la raó entre A i B és la raó triple de la que hi ha entre C i D. [Nc 1 o per substitució] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠[386]

Eviii 13. *Considerem una multitud arbitrària de nombres en proporció contínua. Generem el quadrat i el cub de cadascun. Aleshores, tant els nombres quadrats com els cúbics obtinguts formen una proporció contínua.*[387]

Siguin A, B i C una quantitat arbitrària de nombres en proporció contínua,

[o sigui,] A és a B com B a C.

[*Construcció.*] Considerem els quadrats D, E i F,

i els [nombres] cúbics G, H i K de A, B i C, respectivament.[388] ♣

Afirmo que D, E i F, i G, H i K són nombres en proporció contínua.

[*Demostració.*] Sigui L el resultat de multiplicar A per B, [Dvii 15]

---

386. Aquest és un cas molt adequat per a veure que tot és més clar si s'escriu amb un llenguatge més àgil. Fem $A := m \times (m \times m), B := n \times (n \times n), C := m, D := n, E := m \times m, F := m \times n, G := n \times n, H := (m \times m) \times n$ i $K := m \times (n \times n)$. Tenim que $\frac{E}{F} := \frac{m \times m}{m \times n}$ i $\frac{F}{G} := \frac{m \times n}{n \times n}$. I $\frac{A}{H} = \frac{E}{F} := \frac{m \times (m \times m)}{m \times (m \times n)} = \frac{m}{n} := \frac{C}{D}$ i $\frac{H}{K} := \frac{(m \times m) \times n}{(m \times n) \times n} = \frac{m}{n} := \frac{C}{D}$. I, finalment, $\frac{K}{B} := \frac{m \times (n \times n)}{n \times (n \times n)} := \frac{C}{D}$. Aquí s'usen la propietat associativa de la multiplicació i la noció comuna Nc 1 iterada.

387. Si $\frac{m}{n} = \frac{n}{p} = \frac{p}{q}$, aleshores $\frac{m^2}{m \times n} = \frac{m \times n}{n^2}$ i $\frac{n^2}{n \times p} = \frac{n \times p}{p^2}$. Òbviament, podem concatenar: $\frac{m}{n} = \frac{m \times n}{n^2} = \frac{n^2}{n \times p} = \frac{n}{p}$. I, *ex æquali*, $\frac{m^2}{n^2} = \frac{n^2}{p^2}$. Anàlogament, ho podem fer en el cas dels [nombres] cúbics.

388. Els nombres que obtenim multiplicant un nombre per si mateix i multiplicant un altre cop els productes obtinguts pel nombre.

i M i N [els nombres] que obtenim multiplicant A i B per L, respectivament. [DVII 15]

I, de bell nou, sigui O el nombre que obtenim multiplicant B per C, [DVII 15]
i P i Q que s'aconsegueixen multiplicant B i C per O, respectivament. [DVII 15]

De manera anàloga a la que hem fet servir abans,
podem veure que D, L i E, i G, M, N i H són [nombres] en proporció contínua amb la raó que hi ha entre A i B,
i també [que] E, O i F, i H, P, Q i K són [nombres] en proporció contínua amb la raó [que hi ha] entre B i C. [EVIII 10]

I, atès que A és a B com B a C, resulta que la raó entre D, L i E és la mateixa que entre E, O i F. [Nc 1]

I, a més, entre G, M, N i H hi ha les mateixes raons que entre H, P, Q i K. [Nc 1]

La quantitat [de termes de] D, L i E és la mateixa que [la de] E, O i F,
i la de G, M, N i H és la mateixa que [la de] H, P, Q i K.

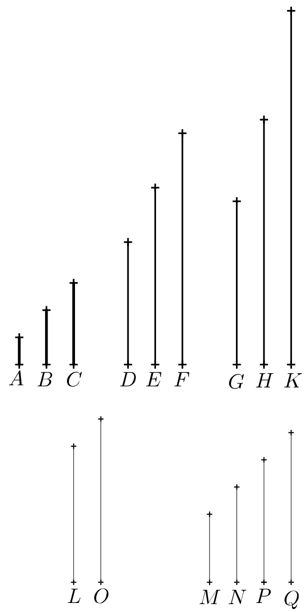


FIGURA EVIII 13

En definitiva, *ex æquali*, D és a E com E a F,
i G és a H com H a K. [EVII 14]

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVIII 14. a*) Si un* [*nombre*] *quadrat en mesura un altre, el costat* [*del primer*] *també mesura el del segon.*[389] b*) I, si el costat* [*d'un nombre quadrat*] *mesura el d'un altre* [*nombre quadrat*], *el* [*primer*] *quadrat mesura el segon.*[390]

389. Usem l'expressió «costat»; però no és un costat geomètric, és un nombre.

390. Aquesta proposició té, com a porisma, que «dos nombres quadrats

a) Siguin A i B [dos] nombres quadrats, i C i D els seus costats [respectius].

Suposem que A mesura B.

Afirmo que C també mesura D.

[*Demostració.*] Sigui E el nombre que resulta de multiplicar C per D.

Aleshores, A, E i B són en proporció contínua amb la raó [que hi ha] entre C i D. [EVIII 11]

I, atès que A, E i B són [tres nombres] en proporció contínua,
i A mesura B,
resulta que A també mesura E. [EVIII 7]

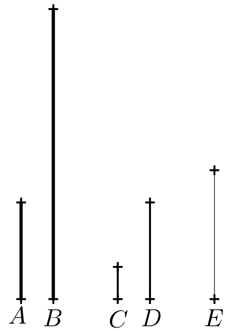


FIGURA EVIII 14

Però A és a E com C a D. [EVII 17]

Per tant, C també mesura D. [DVII 20] ♠

b) Ara suposem que C mesura D.

Afirmo que A també mesura B.

[*Demostració.*] Anàlogament, i amb la mateixa construcció, podem establir que A, E i B són [tres nombres] en proporció contínua amb la raó [que hi ha] entre C i D.

I, atès que C és a D com A a E, [EVII 17]
i que C mesura D,
resulta que A també mesura E. [DVII 20]

Ara bé, [els tres nombres] A, E i B estan en proporció contínua.

En conseqüència, A també mesura B. [DVII 20] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVIII 15. a*) Si un nombre cúbic en mesura un [altre], el costat [del primer] també mesura el costat [del segon].* b*) I, si el costat [d'un nombre cúbic] mesura el costat [d'un altre nombre cúbic], el [primer] també mesura el segon.*[391]

---

són iguals si, i només si, són quadrats de nombres iguals». Tanmateix, Euclides no estableix aquest resultat per als quadrats geomètrics, com ja vam indicar a PLA (2018), nota 496, p. 148-149.

391. Vegeu la nota anterior i apliqueu-la als [nombres] cúbics de costats iguals.

a) Suposem que el nombre cúbic A mesura el [nombre] cúbic B, i que C i D són els costats respectius de A i B.

Afirmo que C mesura D.

[*Demostració.*] Sigui E el [nombre] quadrat de C i G el de D. [Dvii 18]

Siguin F el [nombre que obtenim] multiplicant C per D, i H i K els que obtenim multiplicant C i D per F, respectivament. [Dvii 15]

Aleshores, és evident que els nombres E, F i G, i A, H, K i B estan en proporció contínua i entre ells hi ha la raó de C i D. [Eviii 11 i 12]

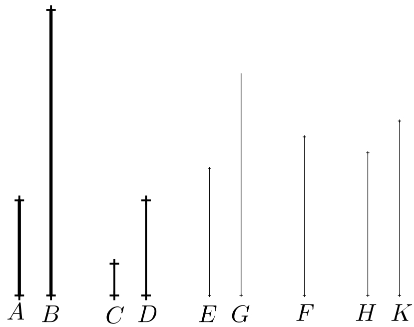


Figura Eviii 15

Atès que A, H, K i B estan en proporció contínua, i A mesura B, resulta que [A] també mesura H. [Eviii 7]

I A és a H com C a D.

En conseqüència, C també mesura D. [Dvii 20] ♠

b) Ara suposem que C mesura D.

Afirmo que A mesura B.

[*Demostració.*] De manera anàloga i amb la mateixa construcció, podem establir que A, H, K i B estan en proporció contínua i entre ells hi ha la raó de C i D.

I, atès que C mesura D, i C és a D com A a H, resulta que A també mesura H. [Dvii 20]

En conseqüència, A també mesura B. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eviii 16. a*) Si un nombre quadrat no en mesura un* [*altre*]*, el costat* [*del primer*] *tampoc no mesura el costat* [*del segon*]*.* b*) I, si el costat* [*d'un nombre quadrat*] *no mesura el costat* [*d'un altre nombre quadrat*]*, el* [*primer nombre*] *quadrat tampoc no mesura el* [*segon nombre*] *quadrat.*[392]

392. És un porisma trivial d'Eviii 14 que es dedueix per l'absurd. Pel que fa referència a la nomenclatura, vegeu la nota 389 (pàgina 156).

a) Siguin A i B [dos] nombres quadrats de costats [respectius] C i D. Suposem que A no mesura B.

Afirmo que C tampoc no mesura D.

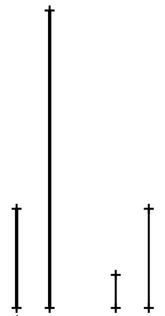


FIGURA EVIII 16

[*Demostració.*] Si C mesura D,[393]
A també mesura B. [EVIII 14]
Però A no mesura B.
Per tant, C tampoc no mesura D. ♠

b) Suposem ara que C no mesura D.
Afirmo que A tampoc no mesura B.
[*Demostració.*] Perquè, si A mesura B,[393]
C també mesura D. [EVIII 14]
Però C no mesura D.
Per tant, A tampoc no mesura B. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVIII 17. a*) Si un nombre cúbic no en mesura un altre, el costat* [*del primer*] *tampoc no mesura el costat* [*del segon*]*.* b*) I, si el costat* [*d'un nombre cúbic*] *no mesura el costat* [*d'un altre nombre cúbic*]*, el primer tampoc no mesura el segon.*[394]

a) Suposem que el nombre cúbic A no mesura el nombre cúbic B,
i que C i D són els costats respectius de A i B.
Afirmo que C no mesura D.
[*Demostració.*] Si C mesura D,[393]
A també mesura B. [EVIII 15]
Però A no mesura B.
Per tant, C tampoc no mesura D. ♠

b) Suposem ara que C no mesura D.
Afirmo que A tampoc no mesura B.
[*Demostració.*] Si A mesura B,[393]
C també mesura D. [EVIII 15]

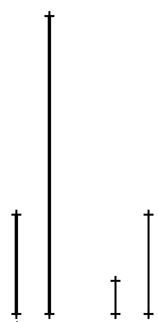


FIGURA EVIII 17

393. Hipòtesi de l'absurd.
394. És un porisma trivial d'EVIII 15 que es dedueix per l'absurd.

Però C no mesura D.

Per tant, A tampoc no mesura B. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVIII 18. a) *Entre dos nombres plans semblants hi ha un nombre en mitjana proporcional.* b) *I la raó que hi ha entre dos nombres plans semblants és la raó al quadrat dels costats corresponents.*

Siguin A i B dos nombres plans semblants, i C i D, i E i F els costats respectius de A i B.

Atès que els nombres semblants són els que tenen costats proporcionals,[DVII 21] resulta que C és a D com E a F.

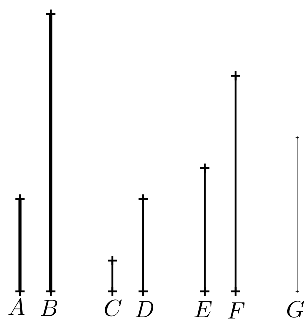


FIGURA EVIII 18

Afirmo que:

a) Entre A i B hi ha un nombre que és mitjana proporcional.

b) La raó entre A i B és la raó quadrada[395] de la [que hi ha] entre C i E, o entre D i F,

és a dir, [el quadrat de la raó] d'un costat amb el corresponent [respecte de la semblança].

[*Demostració.*] *a*) Atès que C és a D com E a F,

tenim que, *alternando*, C és a E com D a F. [EVII 13]

I, atès que A és pla, i C i D en són els costats,

resulta que obtenim A multiplicant D per C. [DVII 16]

Pel mateix [raonament], aconseguim B multiplicant E per F. [DVII 16]

Sigui G [el nombre] que obtenim multiplicant D per E. [DVII 15]

Aleshores, aconseguim A i G multiplicant D per C i E, respectivament.

Per tant, C és a E com A a G. [EVII 17]

Però C és a E [com] D a F.

395. Recordem que el text grec diu: *doble* (διπλασὅονα λόγος).

En conseqüència, D és a F com A a G. [Nc 1]

De bell nou, obtenim G i B multiplicant E per D i per F, respectivament.

Per tant, D és a F com G a B. [Evii 17]

Però hem vist que D és a F com A a G.

En conseqüència, A és a G com G a B. [Nc 1]

En definitiva, A, G i B són [tres nombres] en proporció contínua.

Existeix, doncs, un nombre mitjana proporcional entre A i B,
[i és G]. ♠

Ara afirmo, a més, que la raó entre A i B és el quadrat de la que hi ha entre els costats corresponents,
és a dir, la de C amb E, o la de D amb F.

[*Demostració.*] *b*) Atès que [els tres nombres] A, G i B són tres nombres en proporció contínua,
la raó que hi ha entre A i B és la raó quadrada de A i G. [Ev 9][396]

I, atès que A és a G com C a E, i D a F,
resulta que la raó entre A i B és el quadrat de la que hi ha entre C i E, o D i F. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eviii 19. a*) Entre dos nombres sòlids semblants, hi podem intercalar dues mitjanes proporcionals.* b*) I la raó entre dos nombres sòlids semblants és el cub*[397] *de la que hi ha entre els costats corresponents.*[398]

Siguin A i B dos nombres sòlids semblants,
i C, D i E, i F, G i H els costats respectius de A i B.

Atès que els [nombres] sòlids semblants tenen els costats proporcionals, [Dvii 21]
resulta que C és a D com F a G,
i D a E com G a H.

Afirmo que:

396. Novament, Euclides recorre al llibre v.

397. La raó triple.

398. Per simplificar, direm simplement «els costats». Vegeu la nota 389 (pàgina 156).

a) Entre A i B, hi podem col·locar [dues] mitjanes proporcionals.
b) La raó entre A i B és el cub de la raó que hi ha entre els dos costats corresponents,
és a dir, [la raó al cub de la] que hi ha entre C i F, o D i G, o E i H.

[*Demostració.*] *a*) Siguin K i L els nombres que obtenim multiplicant C per D i F per G, respectivament. [Dvii 15]

Atès que la raó entre C i D és la de F i G,
i que[, com dèiem,] K i L són els [nombres generats multiplicant] C per D, i F per G, respectivament,
resulta que K i L són nombres plans semblants. [Dvii 21]

Aleshores, hi ha un nombre que és la mitjana proporcional de K i L. [Eviii 18]

En diem M.

D'això en resulta que M és [el nombre que obtenim multiplicant] D per F,
com hem vist en la proposició precedent. [Eviii 18]

I, atès que aconseguim K i M multiplicant D per C i F, respectivament,
resulta que C és a F com K a M. [Evii 17]

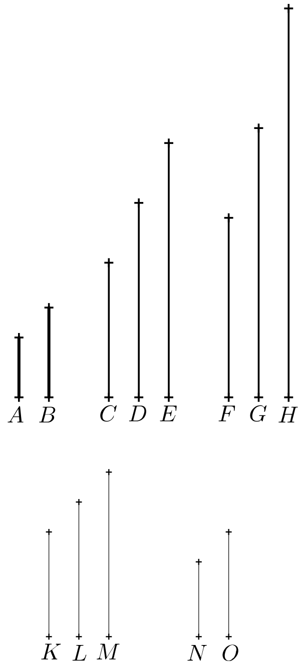


Figura Eviii 19

Però K és a M com M a L.

En conseqüència, K, M i L són [tres nombres] en proporció contínua amb la raó de C i F. [Nc 1]

I, atès que C és a D com F a G,
alternando, resulta que C és a F com D a G. [Evii 13]

Igualment, D és a G com E a H.

En conseqüència, K, M i L [són tres nombres] en proporció contínua amb la raó de C i F, [Nc 1]
D i G, i E i H.

Ara considerem [els nombres] N, O que obtenim multiplicant E i H per M, respectivament. [DVII 15]

Aleshores, atès que A és [un nombre] sòlid de costats C, D i E,
que obtenim A multiplicant E pel resultat de multiplicar C per D,
i que K és el [nombre obtingut multiplicant] C per D,
tenim que obtenim A multiplicant E per K. [per substitució]

Igualment, obtenim B multiplicant H per L.

I, atès que obtenim A i N multiplicant E per K i M, respectivament,
resulta que K és a M com A a N. [EVII 17]

I K és a M com C a F, D a G, i E a H.

Per tant, C és a F, D a G, i E a H com A a N. [Nc 1]

De bell nou, atès que obtenim N i O multiplicant E i H per M, respectivament,
resulta que E és a H com N a O. [EVII 18]

Però E és a H com C a F, i D a G.

Per tant, C és a F, D a G, i E a H com A a N, i N a O. [Nc 1]

De bell nou, atès que obtenim O i B multiplicant H per M i L,
resulta que M és a L com O a B. [EVII 17]

Però M és a L com C a F, D a G, i E a H.

Aleshores, C és a F, D a G, i E a H,
i no només com O és a B, sinó també com A és a N, i N a O. [Nc 1]

En definitiva, doncs, A, N, O i B són [quatre nombres] en proporció contínua amb l'esmentada raó dels costats. ♠

b) Ara també afirmo que la raó entre A i B és el cub de la raó entre els costats corresponents,
és a dir, la que hi ha entre C i F, D i G, i E i H.

Atès que A, N, O i B són quatre nombres en proporció contínua,
resulta que la raó entre A i B és la raó al cub de A i N.[399] [DV 10]
Però també, com hem vist, A és a N com C a F, D a G, i E a H.

En definitiva, la raó entre A i B és la raó al cub dels costats corresponents, [Nc 1]
és a dir, la que hi ha entre el nombre C i [el nombre] F, entre D amb G, i entre E amb H. ♠

399. Vegeu la nota 391 (pàgina 157).

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVIII 20. *Si entre dos nombres intercalem una mitjana proporcional, [aquests] nombres són plans semblants.*[400]

Sigui C la mitjana proporcional de dos nombres A i B.

Afirmo que A i B són nombres plans semblants.

[*Demostració.*] *a*) Prenem els nombres més petits, D i E, que tenen la mateixa raó que [hi ha] entre A i C. [EVII 33]

Aleshores, D mesura A tantes vegades com E [mesura] C. [EVII 20]

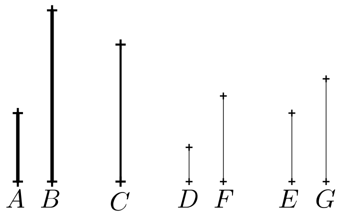


FIGURA EVIII 20

Així, D mesura A tantes vegades com unitats té [un cert nombre] F. [DVII 3]

En conseqüència, obtenim A multiplicant F per D. [DVII 15]

D'això en resulta que A és pla, i té els costats D i F. [DVII 16]

De bell nou, atès que D i E són els [nombres] més petits amb la mateixa raó que [hi ha] entre C i B,

tenim que D mesura C tantes vegades com E [mesura] B. [EVII 20].

Així, E mesura B tantes vegades com unitats té [un cert nombre] G. [DVII 3]

En conseqüència, obtenim B multiplicant G per E. [DVII 15]

D'això en resulta que B és pla, i té els costats E i G. [DVII 16]

En definitiva, A i B són plans. ♠

Afirmo que A i B també són semblants.

[*Demostració.*] *b*) Obtenim A i C multiplicant F i E per D, respectivament.

Per tant, D és a E com A a C, és a dir, com C a B. [EVII 17][401]

De bell nou, atès que obtenim C i B multiplicant E per F i G, respectivament,

tenim que F és a G com C a B. [EVIII 17]

I C és a B com D a E.

400. És el recíproc d'EVIII 18.

401. Aquesta part no està ben justificada perquè no ha dit, malgrat que és cert, que $F \times E = C$. A més, no és necessari veure que $\frac{D}{E} = \frac{A}{C}$, atès que això és cert per haver triat la raó $\frac{D}{E}$.

Per tant, D és a E com F a G. [Nc 1]

I, *alternando*, D és a F com E a G. [EVIII 13]

En conseqüència, A i B són nombres plans semblants atès que els seus costats respectius són proporcionals. [DVIII 21]

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVIII 21. *Si, entre dos nombres, se n'hi poden intercalar dos en mitjana proporcional, aquells* [*dos nombres*] *són sòlids semblants.*

Siguin C i D dos nombres intercalats entre els nombres A i B en mitjana proporcional.

Afirmo que A i B són [nombres] sòlids.

[*Demostració.*] *a*) Considerem els tres nombres mínims E, F i G que tenen la raó que [hi ha] entre A, C i D. [EVII 33 o EVIII 2]

Aleshores, els extrems E i G són primers entre si. [EVIII 3]

I, atès que entre E i G hi ha una mitjana proporcional F,

resulta que E i G són nombres plans semblants. [EVIII 20]

Siguin H i K els costats de E, i L i M els de G.

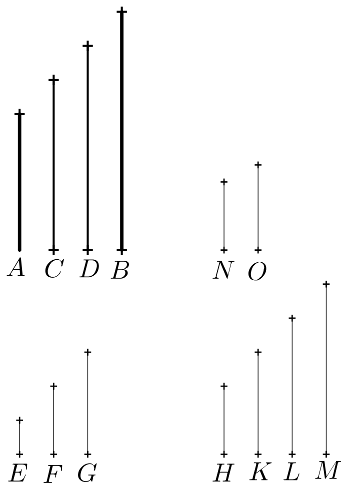


FIGURA EVIII 21

Aleshores, [per la proposició anterior] resulta que E, F i G estan en proporció contínua amb la raó que [hi ha] entre H i L,
i entre K i M.

I, atès que E, F i G són els [nombres] mínims que tenen la raó que [hi ha] entre [els nombres] A, C i D,
i que la quantitat [de nombres] E, F i G és igual a la quantitat [de nombres] A, C i D,
resulta que, *ex æquali*, E és a G com A a D. [EVII 14]

Per tant, E i G són primers entre si,
els [nombres] primers són també els més petits [dels nombres que tenen la mateixa raó], [EVII 21]

i els [nombres] més petits mesuren els que tenen la mateixa raó un nombre igual de vegades;
el gran el gran, i el petit el petit,
és a dir, l'antecedent l'antecedent, i el consegüent el consegüent.

[EVII 20]

Resulta, per tant, que E mesura A el mateix nombre de vegades que G [mesura] D.

Així doncs, E mesura A tantes vegades com unitats té [un cert nombre] N. [DVII 3]

Per tant, obtenim A multiplicant N per E. [DVII 15]

I [hem suposat que] obtenim E [multiplicant] H per K. [DVII 16]

En conseqüència, aconseguim A multiplicant N pel nombre [obtingut multiplicant] H per K. [per substitució]

Així doncs, A és [un nombre] sòlid de costats H, K i N. [DVII 17]

De bell nou, atès que E, F i G són els [nombres] més petits amb la raó que [hi ha] entre [els nombres] C, D i B,
resulta que E mesura C el mateix nombre de vegades que G [mesura] B. [EVII 20]

Així doncs, E mesura C tantes vegades com unitats té O. [DVII 3]

Per tant, G mesura B d'acord amb les unitats d'[un cert nombre] O. [Nc 1]

D'això en resulta que obtenim B multiplicant O per G. [DVII 15]

I G és el [nombre] obtingut multiplicant L per M. [DVII 15]

Per tant, aconseguim B multiplicant O pel [nombre obtingut multiplicant] L i M. [per substitució]

En conseqüència, B és [un nombre] sòlid de costats L, M i O. [DVII 17]

En definitiva, doncs, [els nombres] A i B són sòlids. ♠

Ara afirmo també que són semblants.

[*Demostració.*] *b*) Atès que obtenim A i C multiplicant N i O per E;
N és a O com A a C, és a dir, com E a F. [EVII 18]

Però E és a F com H a L, i K a M.

Aleshores, H és a L com K a M, i N a O. [Nc 1]

Ara bé, H, K i N, i L, M i O són els costats de A i B, respectivament.[402]

Per tant, A i B són nombres sòlids semblants. [DVII 21] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVIII 22. *Si tres nombres estan en proporció contínua i el primer [terme] és un quadrat, el tercer també ho és.*

Siguin A, B i C tres nombres en proporció contínua.

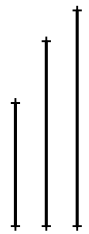


FIGURA EVIII 22

Suposem que el primer [terme] A és un quadrat.

Afirmo que el tercer [terme] C també ho és.

[*Demostració.*] Atès que el nombre B és mitjana proporcional de A i C,

A i C són [nombres] plans semblants, [EVIII 20]

i A és un quadrat.

Per tant, C també ho és. [DVII 21]

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVIII 23. *Si quatre nombres estan en proporció contínua i el primer [terme] és cúbic, el quart també ho és.*

Siguin A, B, C i D quatre nombres en proporció contínua.

Suposem que el primer [terme] A és cúbic.

Afirmo que el quart [terme] D també ho és.

[*Demostració.*] Atès que els nombres B i C són mitjanes proporcionals de A i D,

A i D són [nombres] sòlids semblants. [EVIII 21]

I A és cúbic.

Per tant, D també ho és. [DVII 21]

I això és el que volíem demostrar. ♠

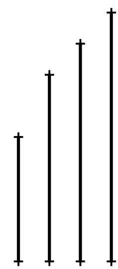


FIGURA EVIII 23

EVIII 24. *Si la raó entre dos nombres és la mateixa que hi ha entre dos nombres quadrats i el primer és un quadrat, el segon també ho és.*

Siguin A i B dos nombres amb la raó del nombre quadrat C i el nombre quadrat D.

402. Al text grec hi ha un error en la terna O, L, M.

Suposem que A és un quadrat.

Afirmo que B també ho és.

Atès que C i D són [nombres] quadrats,
C i D són [nombres] plans semblants. [DVII 21]

D'això en resulta que podem col·locar un nombre en mitjana proporcional [entre] C i D. [EVIII 18]

I, atès que C és a D com A a B,
podem situar un nombre en mitjana proporcional entre A i B. [EVIII 8]

Però A és un quadrat.

En conseqüència, B també ho és. [EVIII 22]

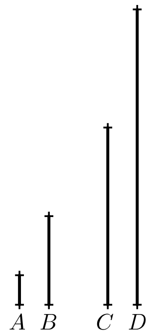


FIGURA EVIII 24

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVIII 25. *Si la raó [que hi ha] entre dos nombres és la mateixa que [hi ha] entre dos nombres cúbics i el primer és cúbic, el segon també ho és.*

Siguin A i B dos nombres que tenen entre si la raó que [hi ha] entre els nombres cúbics C i D.

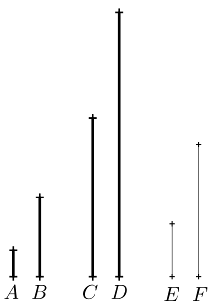


FIGURA EVIII 25

Suposem que [el nombre] A és cúbic.

Afirmo que B també ho és.

[*Demostració.*] Atès que C i D són [nombres] cúbics,
C i D són [nombres] sòlids semblants. [DVII 21]

Per tant, hi ha dues mitjanes proporcionals [entre] C i D. [EVIII 19]

I, entre C i D, hi ha tants [nombres] en proporció contínua com [nombres en proporció contínua] hi ha entre els [nombres] que tenen la mateixa raó. [EVIII 8]

Per tant, [entre] A i B hi ha dues mitjanes proporcionals.

Siguin E i F [aquestes mitjanes].

Atès que els quatre nombres A, E, F i B estan en proporció contínua, i que A és [un nombre] cúbic,
resulta que B també ho és. [EVIII 23]

I això és el que volíem demostrar. ♠

EVIII 26. *Dos nombres semblants plans tenen entre si la raó que [hi ha] entre dos nombres quadrats.*

Siguin A i B dos nombres plans.

Afirmo que la raó que hi ha entre A i B és la de dos nombres quadrats.

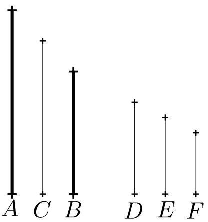


FIGURA EVIII 26

[*Demostració.*] Atès que A i B són [dos] nombres plans semblants, [DVII 21]
existeix [una] mitjana proporcional entre A i B. [EVIII 18]

Anomenem C [aquest nombre].

Considerem els nombres més petits, D, E i F, que tenen la raó que [hi ha] entre A, C i B. [EVII 33 o EVIII 2]

Aleshores, els extrems D i F són quadrats. [EVIII 2, porisma]

Per tant, atès que D és a F com A a B,
i D i F són [nombres] quadrats;
la raó entre A i B és la de dos nombres quadrats.
I això és el que volíem demostrar. ♠

EVIII 27. *La raó entre [dos] nombres sòlids semblants és la de dos nombres cúbics.*

Siguin A i B [dos] nombres sòlids semblants.

Afirmo que la raó que hi ha entre A i B és la de dos nombres cúbics.

[*Demostració.*] Atès que A i B són [dos nombres] sòlids semblants, [DVII 21]
hi ha dues mitjanes proporcionals entre A i B. [EVIII 19]

Suposem que són [els nombres] C i D.

Considerem, ara, els nombres més petits, E, F, G i H,
que tenen la raó que [hi ha] entre A, C, D i B,
amb la mateixa quantitat [de termes]. [EVII 33 o EVIII 2]

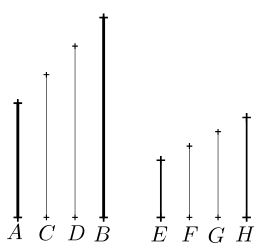


FIGURA EVIII 27

Per tant, els extrems, E i H són [nombres] cúbics, [EVIII 2, porisma] i E és a H com A a B.

En conseqüència, la raó [que hi ha] entre A i B és la raó [que hi ha] entre [un cert] nombre cúbic i [un altre] nombre cúbic.

I això és el que volíem demostrar. ♠

A.1.3 Llibre novè: EIX

p. 14 **Comentari.** Aquest llibre, eminentment pitagòric, analitza algunes de les propietats dels nombres naturals d'una progressió geomètrica en relació amb la divisibilitat. Conté proposicions molt rellevants: l'aproximació, molt discutida, al teorema fonamental de l'aritmètica i la prova de l'existència d'una col·lecció «infinita en potència» de nombres primers. Analitza el comportament dels nombres parells i senars davant la suma, la resta, el producte i les parts. Comença de manera molt elemental la teoria de la divisibilitat. I, finalment, dona una condició suficient perquè un nombre (parell) sigui perfecte. Malgrat que les primeres proposicions que ofereix poden semblar molt senzilles i d'un interès discutible, el llibre és realment important.[403]

A.1.3*a* Les definicions

p. 14 [No en conté cap.]

A.1.3*b* Les proposicions

p. 14 EIX 1. *El nombre que resulta de multiplicar dos nombres plans semblants és un [nombre] quadrat.*

Siguin A i B dos nombres plans semblants,
i C el nombre [que obtenim] multiplicant A per B. [DVII 15]

403. Indiquem que algunes proposicions depenen solament dels llibres VII i VIII; d'altres, en canvi, de resultats establerts prèviament al llibre IX. La raó d'aquest fet és mantenir la unitat de les proposicions que s'hi estableixen.

Afirmo que C és un quadrat.

[*Demostració.*] Sigui D el nombre que obtenim multiplicant A per si mateix. [Dvii 15]

Aleshores, D és un quadrat. [Dvii 18]

Atès que obtenim D i C multiplicant A per si mateix, i [A] per B,
resulta que A és a B com D a C. [Evii 17]

I, com que A i B són nombres plans semblants, tenen una mitjana proporcional. [Eviii 18]

I, si intercalem [alguns] nombres entre dos en proporció contínua,
aleshores els nombres [en proporció contínua] que tenen la raó que [hi ha] entre ells tenen tants nombres en proporció contínua com ells. [Eviii 8]

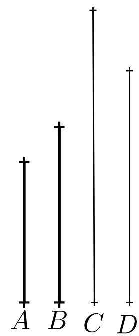


Figura Eix 1

Per tant, hi ha un nombre mitjana proporcional entre D i C.

Però D és un quadrat.

En definitiva, C també ho és. [Eviii 22]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eix 2. *Si la multiplicació de dos nombres proporciona un quadrat, aquests dos nombres són plans semblants.*[404]

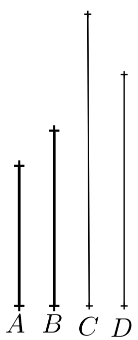


Figura Eix 2

Siguin A i B dos nombres.

Suposem que, quan multipliquem A per B, obtenim un quadrat C. [Dvii 18]

Afirmo que A i B són nombres plans semblants. [Dvii 21]

[*Demostració.*] Suposem que A multiplicat per si mateix dona D.

Aleshores, D és un quadrat. [Dvii 18]

Atès que, quan multipliquem A per si mateix i per B, obtenim [els nombres] D i C, respectivament,
resulta que A és a B com D a C. [Evii 17]

I, atès que D i C són quadrats,
també són nombres plans semblants. [Dvii 16 i Dvii 21]

404. És la proposició recíproca de l'anterior.

Aleshores, D i C tenen una mitjana proporcional. [EVIII 18]

Però D és a C com A a B.

Per tant, A i B també en tenen. [EVIII 8]

I, si [entre] dos nombres hi ha una mitjana proporcional, [els] nombres són plans semblants. [EVIII 20]

Així doncs, A i B són [nombres] plans semblants.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIX 3. *Quan multipliquem un nombre cúbic per si mateix n'obtenim un altre de cúbic.*

Sigui B el nombre cúbic que obtenim multiplicant el nombre cúbic A per si mateix.

Afirmo que B és [un nombre] cúbic.

[*Demostració.*] Considerem el costat C de A.

I sigui D el nombre que obtenim multiplicant C per si mateix. [DVII 15]

És clar que, multiplicant C per D, obtenim A. [DVII 19]

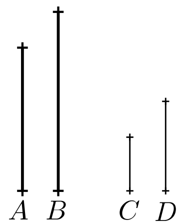


FIGURA EIX 3

I, atès que obtenim D multiplicant C per si mateix, C mesura D segons les seves pròpies unitats. [DVII 15]

Però la unitat també mesura C d'acord amb les pròpies unitats [de C]. [DVII 2]

Per tant, la unitat és a C com C a D. [DVII 20]

Novament, atès que obtenim A multiplicant C per D, D mesura A d'acord amb les unitats de C.

Però la unitat també mesura C d'acord amb les seves pròpies unitats [de C]. [DVII 2]

Per tant, la unitat és a C com D a A. [DVII 20]

Però la unitat és a C com C a D.

De tot això en resulta que la unitat és a C com C a D, i D a A. [Nc 1]

En conseqüència, entre la unitat i A hi ha dos nombres, C i D, en proporció contínua.

De bell nou, com que obtenim B multiplicant A per si mateix, A mesura B d'acord amb les pròpies unitats [de A]. [DVII 15]

I la unitat també mesura A segons les pròpies unitats [de A].[DVII 2]
Per tant, la unitat és a A com A a B. [DVII 20]
Però, entre la unitat i A hi ha dos nombres en proporció contínua.
Aleshores, A i B tenen dues mitjanes proporcionals. [EVIII 8]
I, si entre dos nombres hi ha dues mitjanes proporcionals i el primer és cúbic, el segon també ho és. [EVIII 23]
I A és cúbic.
Per tant, B també ho és.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIX 4. *Si un nombre cúbic es multiplica per un altre, el producte també és cúbic.*

Sigui C el nombre que resulta de multiplicar un nombre cúbic A per un nombre cúbic B.

Afirmo que C és [un nombre] cúbic.

[*Demostració.*] Sigui D el resultat de multiplicar A per si mateix. [DVII 15]
Aleshores, D és cúbic. [EIX 3]
I, atès que obtenim D i C multiplicant A per si mateix i per B, respectivament;
A és a B com D a C. [EVII 17]
I, com que A i B són [nombres] cúbics,
A i B són [nombres] sòlids semblants. [DVII 21]

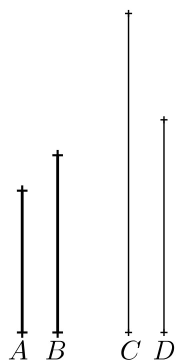


FIGURA EIX 4

Hi ha, doncs, dues mitjanes proporcionals entre A i B. [EVIII 19]
En conseqüència, també n'hi ha dues [entre] D i C, [EVIII 8]
i D és [un nombre] cúbic.
Per tant, C també ho és. [EVIII 23]

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIX 5. *Si un nombre cúbic multiplicat per un altre nombre en proporciona un de cúbic, el nombre multiplicat també ho és.*

Sigui C el nombre cúbic que obtenim multiplicant el [nombre] cúbic A per un nombre B.

Afirmo que B és [un nombre] cúbic.

[*Demostració.*] Sigui D el nombre que obtenim multiplicant A per si mateix. [DVII 15]

[*Demostració.*] Sigui D el nombre que obtenim multiplicant A per si mateix. [DVII 15]

Aleshores, D és [un nombre] cúbic. [EIX 3]

I, atès que obtenim D i C multiplicant A per si mateix, i per B, respectivament,
resulta que A és a B com D a C. [EVII 17]

I, atès que tant D com C són [nombres] cúbics, també són semblants. [DVII 21]

Per tant, hi ha dues mitjanes proporcionals [entre] D i C, [EVIII 19]
i D és a C com A a B.

Aleshores, també hi ha dues mitjanes proporcionals [entre] A i B. [EVIII 8]

I A és [un nombre] cúbic.

Per tant, B també ho és. [EVIII 23]

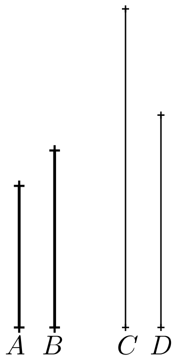


FIGURA EIX 5

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIX 6. *Si el resultat de multiplicar un nombre per si mateix és [un nombre] cúbic, ell també ho és.*

Sigui B el [nombre] cúbic que obtenim multiplicant A per si mateix.

Afirmo que A també ho és.

[*Demostració.*] Sigui C el nombre que obtenim multiplicant A per B. [DVII 15]

Aleshores, com que multiplicant A per si mateix i per B, obtenim B i C, respectivament;
C és un [nombre] cúbic. [DVII 19]

I, atès que multiplicant A per si mateix obtenim B, A mesura B d'acord amb les unitats [de A]. [DVII 15]

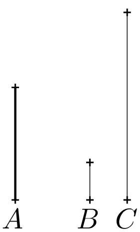


FIGURA EIX 6

I la unitat mesura A d'acord amb les pròpies unitats [de A]. [DVII 2]

Així doncs, la unitat és a A com A a B. [DVII 20]

I, atès que, multiplicant A per B, obtenim C,
resulta que B mesura C d'acord amb les unitats de A. [DVII 15]

Però la unitat també mesura A segons les unitats [de A]. [DVII 2]

Per tant, la unitat és a A com B a C. [DVII 20]

Però[, alhora,] la unitat és a A com A a B.

Per tant, A és a B com B a C. [Nc 1]

I, atès que B i C són [nombres] cúbics,
també són [nombres] sòlids semblants. [Dvii 21]

Per tant, hi ha dues mitjanes proporcionals [entre] B i C. [Eviii 19]

I B és a C com A a B.

En conseqüència, hi ha dues mitjanes proporcionals [entre] A i B, [Eviii 8]
i B és [un nombre] cúbic.

I, en definitiva, A també ho és. [Eviii 23]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eix 7. *El nombre que obtenim multiplicant un nombre compost per un altre* [*nombre*] *és sòlid.*

Sigui C el nombre que obtenim multiplicant el nombre compost A pel nombre B.

Afirmo que C és [un nombre] sòlid.

[*Demostració.*] Atès que A és [un nombre] compost,
el podem mesurar amb un nombre. [Dvii 13]

Sigui D el nombre amb el qual el mesurem.

Aleshores, D mesura A tantes vegades com unitats té [un cert nombre] E. [Dvii 3]

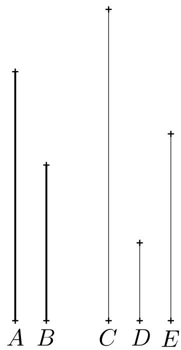


Figura Eix 7

Per tant, obtenim A multiplicant E per D,
ja que D mesura A segons les unitats de E. [Dvii 15]

I, atès que obtenim C multiplicant A per B,
i A [multiplicant] D per E,
resulta que el producte de D per E i per B dona C. [per substitució]

Per tant, C és un [nombre] sòlid de costats D, E i B. [Dvii 17]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eix 8. *Si una quantitat arbitrària de nombres està en proporció contínua* [*començant*] *des de la unitat, aleshores* a) *el tercer* [*terme*] *des de la unitat és un quadrat, i també ho són* [*tots*] *els nombres següents* [*que es troben*] *a* [*la distància d'*]*un interval* b) *el quart* [*terme*] *és* [*un nombre*] *cúbic, i també ho són tots* [*els nombres següents que es troben*] *a* [*la distància d'*]*un interval de dos* [*nombres*], *i* c) *el setè ter-*

[*me*] *és cúbic i quadrat alhora, i també ho són tots* [*els que es troben*] *a* [*la distància d'*]*un interval de cinc* [*nombres*].

Considerem una multitud arbitrària de nombres, A, B, C, D, E i F, en proporció contínua [començant] per la unitat.[405]

Afirmo que:

a) [el nombre] B, el tercer des de la unitat, és [un nombre] quadrat, i també ho són tots [els nombres següents que es troben] a [la distància d']un interval d'un [nombre],

b) el [nombre] C, el quart [des de la unitat], [és un nombre] cúbic, i també ho són tots [els nombres següents que es troben] a [la distància d']un interval de dos [nombres], i

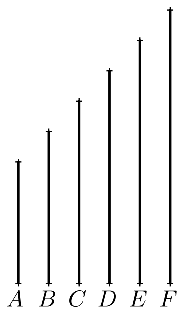


FIGURA EIX 8

c) el [nombre] F, el setè [des de la unitat], [és un nombre] cúbic i quadrat alhora, i també ho són tots [els nombres següents que es troben] a [la distància d']un interval de cinc [nombres].

[*Demostració.*] *a*) Atès que la unitat és a A com A a B,
resulta que la unitat mesura el nombre A el mateix nombre de vegades que A [mesura] B, [DVII 20]
i mesura el nombre A segons les pròpies unitats de A. [DVII 2]

En conseqüència, A també mesura B segons les unitats de A. [Nc 1]

Per tant, A multiplicat per si mateix dona [el nombre] B, [DVII 15]
i B és un quadrat. [DVII 18][406]

I, atès que B, C i D són [tres nombres] en proporció contínua
i que B és un quadrat,
D també ho és. [EVIII 22]

405. Fixem-nos que, com que la unitat no és un nombre, no està representada gràficament. A és el segon terme; B, el tercer, etc.

406. Aquí Euclides inicia l'anàlisi de les fraccions contínues que comencen amb la unitat. És curiós el circumloqui que fa per obtenir la conclusió $B = A \times A$, atès que té $\frac{unitat}{A} = \frac{A}{B}$ i disposa d'EVII 19. Sembla que eviti usar l'expressió *unitat* $\times B$ que li permetria establir *unitat* $\times B = B = A \times A$, que no vulgui considerar la unitat com un nombre més. Però, en canvi, sí que l'accepta com a antecedent en la proporció contínua. Amb aquest raonament, Euclides complica moltíssim la comprensió de les demostracions.

Pel mateix [raonament], F també és [un nombre] quadrat.

De manera semblant, podem provar que tots els nombres [següents que es troben] a [la distància d']un interval d'un nombre són quadrats. ♠

b) També afirmo que el quart [nombre] des de la unitat, C,
és [un nombre] cúbic,
i que també ho són tots [els nombres següents que es troben] a [la distància d']un interval de dos [nombres].

Atès que la unitat és a A com B a C,
la unitat mesura el nombre A el mateix nombre de vegades que B [mesura] C, [Dvii 20]
i la unitat mesura el nombre A segons aquestes unitats. [Dvii 2]

Per tant, B mesura C segons les unitats de A. [Dvii 20]

Obtenim el [nombre] C, doncs, multiplicant A per B.[407] [Dvii 15]

Per consegüent, atès que B i C són el resultat de multiplicar A per si mateix i per B[, respectivament],
C és un [nombre] cúbic. [per substitució i Dvii 19][408] ♠

c) Atès que C, D, E i F són [nombres] en proporció contínua,
i C és [un nombre] cúbic,
F també ho és. [Eviii 23]

Però hem vist també que és [un nombre] quadrat.

Per tant, el setè [nombre] des de la unitat és cúbic i quadrat [alhora].

De manera semblant, podem provar que tots [els que es troben] a un interval de cinc [nombres] són cúbics i quadrats [alhora].

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eix 9. *Considerem una multitud arbitrària de nombres en proporció contínua* [*començant*] *des de la unitat i amb el* [*nombre*] *següent a la unitat quadrat. Aleshores,* a*) tots els altres també ho són; i* b*) si el* [*nombre*] *després de la unitat és cúbic, tots els altres també ho són.*

407. Vegeu la nota 406, que ja no tornarem a esmentar.

408. No fa referència als nombres que es troben a la distància d'un interval de dos nombres.

Considerem una multitud arbitrària de nombres A, B, C, D, E i F en proporció contínua [començant] des de la unitat.

a) Suposem que el [nombre] A que segueix el primer és quadrat.

Afirmo que tots [els nombres] són quadrats.

[*Demostració.*] a_1) Hem establert que [el nombre] B, el tercer [nombre] des de la unitat, és un quadrat,
i també ho són tots [els nombres següents que es troben] a [la distància d']un interval d'un [nombre]. [EIX 8] ♠

Afirmo que tots els altres també són quadrats.

a_2) Atès que A, B i C són [tres nombres] en proporció contínua,
i A [és un nombre] quadrat,
resulta que C també ho és. [EVIII 22]

Novament, atès que B, C i D són [tres nombres] en proporció contínua, i B és un quadrat,
resulta que D també ho és. [EVIII 22]

De manera semblant, podem provar que els altres [nombres] també ho són. ♠

b) Ara suposem que A és [un nombre] cúbic.

Afirmo que tots els altres [nombres] també ho són.

[*Demostració.*] b_1) Hem vist que [el nombre] C,
el quart des de la unitat,
és un [nombre] cúbic. [EIX 8] ♠

Afirmo que tots els altres també ho són.

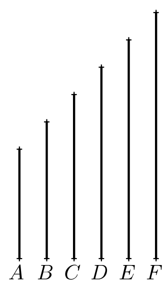


FIGURA EIX 9

b_2) Atès que la unitat és a A com A a B,
la unitat mesura A el mateix nombre de vegades que A [mesura] B, [DVII 20]
i la unitat mesura A segons les unitats [de A]. [DVII 2]

Aleshores, A també mesura B segons aquestes unitats. [NC 1]

Per tant, obtenim B multiplicant A per si mateix, [DVII 15]
i A és un [nombre] cúbic. [DVIII 19]

Però, si multipliquem un nombre cúbic per si mateix,
el que s'obté [també] ho és. [EIX 3]

Aleshores, B també és cúbic. [DVIII 19]

I, atès que els quatre nombres A, B, C i D són contínuament proporcionals,
i A és cúbic, [DVIII 19]
resulta que [el nombre] D també ho és. [EVIII 23] ♠

Pel mateix [raonament], E també és cúbic,
i tots els altres [nombres] també. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIX 10. *Considerem una multitud arbitrària de nombres en proporció contínua [començant] des de la unitat. Suposem que*: a*) el nombre que segueix la unitat no és un [nombre] quadrat. Aleshores cap altre [nombre] ho és, a part del tercer des de la unitat i de tots els altres [nombres següents] separats per l'interval d'un [nombre]. I suposem que*: b*) el [nombre] que segueix la unitat no és un [nombre] cúbic. Aleshores tampoc cap altre [nombre] no ho és, a part del quart des de la unitat i de tots [els nombres següents] separats per un interval de dos [nombres].*

a) Siguin A, B, C, D, E i F una multitud arbitrària de nombres en proporció contínua [començant] des de la unitat.

Suposem que el [nombre] A, que segueix la unitat, no és [un nombre] quadrat.

Afirmo que els altres nombres tampoc no ho són, a part del tercer des de la unitat i [tots] aquells separats d'ell per un interval d'un [nombre].

[*Demostració*.] *a*) Si C és un quadrat,[409]
B també ho és. [EIX 8]

D'això en resulta que la raó entre B i C és la de dos nombres quadrats,
i B és a C com A a B.

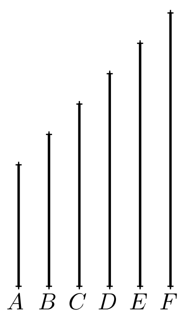


FIGURA EIX 10

Per tant, la raó entre A i B és la mateixa que [hi ha] entre dos [nombres] quadrats. [Nc 1 i per substitució]

En conseqüència, A i B són [nombres] plans semblants, i B és un quadrat. [EVIII 26, recíproc][410]

409. Hipòtesi de l'absurd.

410. EVIII 26, recíproc, és una referència sospitosa. Es pot suprimir i

Per tant, A també és un quadrat.

I això és contrari al que havíem suposat.

Així doncs, C no és un quadrat.

Anàlogament, podem veure que cap altre [nombre] no és un quadrat a part del tercer des de la unitat
i de [tots] aquells [nombres següents que es troben] a [la distància d']un interval d'un [nombre]. ♠

b) Ara suposem que A no és cúbic.

Afirmo que cap altre [nombre] no ho és,
a part del quart des de la unitat,
i de [tots] aquells [nombres següents que es troben a la distància d']un interval de dos [nombres].

[*Demostració.*] Suposem que D és cúbic,[411]
i C també ho és ja que C és el quart [nombre] des de la unitat. [EIX 8]

A més, C és a D com B a C.

I, aleshores, la raó entre B i C és la raó entre dos [nombres] cúbics, i C és [un nombre] cúbic.

Per tant, B també ho és. [VIII 25]

I, atès que la unitat és a A com A a B,
i la unitat mesura A d'acord amb les unitats [de A], [DVII 2]
resulta que A també mesura B segons aquestes unitats. [DVII 20]

Per tant, A multiplicat per si mateix dona el [nombre] cúbic B. [DVII 19]

I, si un nombre multiplicat per si mateix dona un [nombre] cúbic, ell mateix també ho és. [EIX 6]

En conseqüència, A també ho és, en contra del que hem suposat.

Per tant, D no és cúbic.

De manera semblant, podem provar que cap altre [nombre] no és cúbic, a part del quart des de la unitat,
i de [tots] els [següents] que es troben a [la distància d']un interval de dos [nombres].

---

aplicar simplement EVIII 24. Vegeu VITRAC (1994), nota 9, p. 422.

411. Hipòtesi de l'absurd.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eix 11. *Si una multitud arbitrària de nombres és contínuament proporcional* [*començant*] *des de la unitat, el* [*nombre*] *més petit mesura el més gran d'acord amb algun* [*dels nombres*] *que hi ha entre els proporcionals.*[412]

Siguin [A],[413] B, C, D i E una multitud arbitrària de nombres en proporció contínua [començant] des de la unitat A.

Afirmo que B, el més petit dels nombres B, C, D i E, mesura E, el més gran dels nombres d'acord amb un dels nombres C o D.[414]

[*Demostració.*] Atès que la unitat A és a B com D a E, la unitat A mesura el nombre B el mateix nombre de vegades que D [mesura] E. [Dvii 20]

Aleshores, *alternando*, la unitat A també mesura D el mateix nombre de vegades, [Evii 15] i la unitat A mesura D d'acord amb les unitats [de D]. [Dvii 2]

En conseqüència, B també mesura E aquestes unitats. [per substitució]

I, així, el [nombre] petit B mesura el gran E d'acord amb un nombre que hi ha entre els nombres

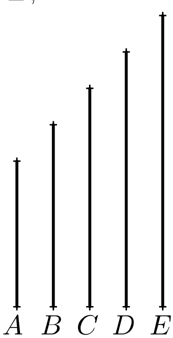


Figura Eix 11

Eix 11, porisma. *El lloc que ocupa el* [*nombre*] *que mesura el darrer terme, comptant des de la unitat, és el mateix que ocupa el* [*nombre*] *amb el qual és mesurat* [*el darrer terme*] *en la direcció del nombre precedent*[*, és a dir, en la direcció del darrer terme*].[415]

I això és el que volíem demostrar. ♠

412. De fet, «d'acord amb cadascun dels [...]». Textualment: Si $\frac{1}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \cdots = \frac{a_{k-1}}{a_k} = \frac{1}{\rho}$, aleshores $a_1 = \rho, a_2 = \rho^2, \ldots, a_k = \rho^k$ i, òbviament, $\rho^2, \ldots, \rho^{k-1}$ divideixen $a_k := \rho^k$. Breument: en tota progressió geomètrica $1, a_1, \ldots, a_r, \ldots, a_n$: $a_r | a_n$.

413. Aquí, a diferència del que passa en les tres proposicions anteriors, A és la unitat i B el terme més petit de la proporció contínua.

414. De fet, segons el penúltim, D.

415. El text diu: Si $1, a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n$ és una progres-

EIX 12. *En tota multitud arbitrària de nombres contínuament proporcionals [que comença] amb la unitat, els nombres primers que divideixen el darrer [terme] també mesuren el primer.*[416]

Considerem una multitud arbitrària de nombres, A, B, C i D, [contínuament] proporcionals [començant] des de la unitat.[417]

Afirmo que els nombres primers que mesuren D també mesuren A.

[*Demostració.*] Suposem que el nombre primer E mesura D.

Afirmo que E mesura A.

Si no és així,[418]

atès que E és primer,

i cada nombre primer és primer amb cada nombre que no mesura, [EVII 29]

resulta que E i A són primers entre si.[419]

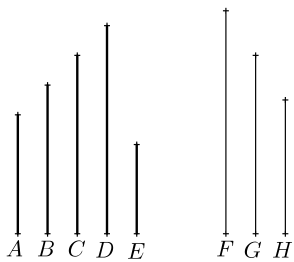


FIGURA EIX 12

I, com que E mesura D, el mesura segons [un nombre] F. [DVII 3]

Per tant, obtenim D multiplicant E per F. [DVII 15]

---

sió geomètrica, aleshores $a_n = a_r \times a_{n-r}$. És a dir, els factors a_r i a_{n-r} disten el mateix de 1 que de a_n, respectivament.

De fet, amb un enunciat més clar i actual, diu que $a^m \times a^n = a^{m+n}$. La demostració és simple. Considerem $\frac{1}{a_1} = \frac{a_r}{a_{r+1}}, \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_{r+1}}{a_{r+2}}, \ldots, \frac{a_{n-(r+1)}}{a_{n-r}} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$. La raó composta de totes és $\frac{1}{a_{n-r}} = \frac{a_r}{a_n}$. Per tant, $a_n = a_r \times a_{n-r}$.

Aquest porisma el podem relacionar amb una proposició de l'*Arenari* (Ψαμμίτης) d'Arquimedes: el producte de dos termes d'una progressió geomètrica que comença amb la unitat és un altre terme de la progressió, i el lloc que ocupa a partir del factor més gran és igual al que ocupa el factor petit des de la unitat. Però aquest producte dista de la unitat un lloc menys que la suma dels factors a partir de la unitat. És a dir, ρ^r, ρ^s, amb $r < s$, i ρ^{r+s}, disten de la unitat $r+1, s+1$ i $r+s+1 = (r+1)+(s+1)-1$, respectivament. A més, ρ^{r+s} dista de ρ^s $r+1$ llocs. Vegeu PLA (2020*b*).

416. Si p és un nombre primer i $p|a^n$, aleshores $p|a$. És un porisma immediat del lema d'Euclides (EVII 30, pàgina 122), si bé ara el demostra recorrent a la progressió geomètrica $1, a^2, \ldots .a^{n-1}, a^n$.

417. A és el primer terme diferent de la unitat.

418. Hipòtesi de l'absurd.

419. A partir d'aquí, Euclides usa el fet que «E i A són primers entre si».

Novament, atès que A mesura D segons les unitats de C, [EIX 11, porisma]
obtenim D multiplicant A per C. [DVII 15]

Però, com hem vist, també l'obtenim multiplicant E per F.

Aleshores, [el nombre que obtenim multiplicant] A per C és igual a[l que obtenim multiplicant] E per F. [Nc 1]

En conseqüència, A és a E com F a C, [EVII 19]
A i E són primers entre si,
[els nombres] primers entre si són els més petits [dels que tenen una mateixa raó], [EVII 21];
i els [nombres] més petits mesuren els que tenen la mateixa raó un nombre igual de vegades,
l'antecedent l'antecedent, i el consegüent el consegüent. [EVII 20]

Aleshores, E mesura C d'acord amb [el nombre] G. [DVII 2]

Per tant, obtenim C multiplicant E per G. [DVII 15]

Però, segons la [proposició] anterior, també obtenim C multiplicant A per B. [EIX 11, porisma]

En conseqüència, el [nombre que obtenim] multiplicant A per B és igual al que obtenim [multiplicant] E per G. [Nc 1]

Per tant, A és a E com G a B. [EVII 19]

Però A i E són primers entre si,
[els nombres] primers entre si són també els més petits [dels nombres que tenen una mateixa raó], [EVII 21]
i els [nombres] més petits mesuren els que tenen la mateixa raó un nombre igual de vegades,
l'antecedent l'antecedent, i el consegüent el consegüent. [EVII 20]

Aleshores, E mesura B d'acord amb [el nombre] H. [DVII 3]

Per tant, obtenim B multiplicant E per H. [DVII 15]

Però, de fet, també obtenim B multiplicant A per si mateix. [EIX 8]

Aleshores, el [nombre obtingut multiplicant] E per H és igual al [quadrat] de A. [Nc 1]

En conseqüència, E és a A com A a H, [EVII 19]
A i E són primers entre si,

els [nombres] primers entre si també són els més petits [dels nombres que tenen la mateixa raó], [EVII 21]
i els [nombres] més petits mesuren els [nombres] que tenen la mateixa raó un nombre igual de vegades,
l'antecedent l'antecedent, i el consegüent el consegüent. [EVII 20]

Per tant, E mesura A com l'antecedent l'antecedent. [DVII 3]

Però, de fet, [E] no mesura [A]. I això no és possible.

En definitiva, E i A no són primers entre si.

Per tant, són [nombres] compostos entre si. [DVII 13 i 14]

I els [nombres] compostos [entre si] són mesurats per un nombre. [DVII 14]

Però hem suposat que E és primer,
i [sabem que] un [nombre] primer no és mesurat per cap altre nombre [diferent d'ell]. [DVII 11]

Per tant, E mesura A i E.

O sigui que E mesura A, i [hem suposat que] també D.

Així doncs, E mesura A i D.

De manera anàloga, podem veure que qualsevol altre nombre primer que mesura D també mesura A.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIX 13. *Si una multitud arbitrària de nombres és contínuament proporcional* [*començant*] *des de la unitat i el* [*terme*] *que segueix la unitat és primer, aleshores el darrer* [*terme*] *només és mesurat pels nombres que formen la proporció contínua.*[420]

---

420. Els únics nombres que divideixen p^n, en què p és primer, són $1, p, p^2, \ldots, p^{n-1}$. Recordem que el tot no és una part [Nc 5].

La demostració és un poc llarga i complicada. Es basa en quatre fets: la transitivitat de la divisibilitat, EVII 19, EIX 11 i EIX 12. Per comprendre-la millor, vegem els primers passos: si A és primer, D només és mesurat per A, B i C. En efecte, suposem que $E|D$ i $E \neq A, B$ i C. E no és primer perquè, si és primer i $E|D$, aleshores [EIX 12] $E|A$, però $E \neq A$. Impossible! Però, si E no és primer, és compost i, per tant, divisible per un nombre primer. Aquest nombre primer només pot ser A. Suposem que no ho és, que $E_1 \neq A$ és un nombre primer, i que $E_1|E$ i $E|D$. Aleshores, [per transitivitat] $E_1|D$, per tant, [EIX 12], $E_1|A$ i $E_1 \neq A$. Impossible! Tenim, doncs, que $A|E$, $E|D$ i $A|D$. Però $D = E \times F$ per a un cert nombre F.

Considerem una multitud arbitrària de nombres A, B, C i D contínuament proporcionals [començant] des de la unitat.

Suposem que A, el nombre que segueix la unitat, és primer.

Afirmo que els únics nombres que mesuren el terme més gran D[, el darrer,] són A, B i C.

[*Demostració.*] Si no és així,[421] D és mesurat per [un nombre] E diferent de A, B i C.

a) És clar que E no és primer, ja que, si ho és[421] també mesura A. [EIX 12]

Però A és primer i diferent de E.

I això és impossible. [DVII 11] ♠

Així doncs, E no és primer.

Per tant, és compost. [DVII 12 i 13]

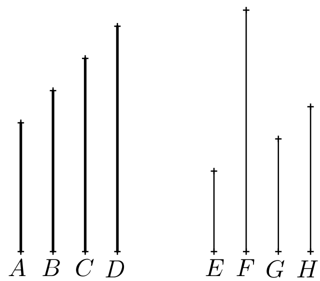


FIGURA EIX 13

En conseqüència, E és mesurat per un nombre primer. [EVII 31]

b) Afirmo que l'únic nombre primer que mesura [E] és A.

Si E és mesurat per un altre [nombre primer],[421] i E mesura D, resulta que [el nombre primer] també mesura D. [per transitivitat]

Per tant, també mesura A. [EIX 12]

Però A és [un nombre] primer. I això és impossible.

[DVII 11] ♠

Aleshores, A mesura E i, atès que E mesura D, el mesura d'acord amb F. [per transitivitat]

c) Afirmo que F no és cap dels nombres A, B i C.

Tenim que $F \neq A, B$ i C. Suposem que $F = A, B$ o C, i $D = E \times F$; aleshores $D = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{array} \right\} \times E$. Però tenim que [EIX 11] $D = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{array} \right\}$ i, per tant, $E = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{array} \right\}$. Impossible! Per tant, $F \neq A, B$ i C. Etc.

421. Hipòtesi de l'absurd.

c_1) Ja que, si ho és[422]i mesura D d'acord amb E,
un d'ells també mesura D d'acord amb E.

Però només un d'ells, A, B o C, mesura D d'acord
amb [un] d'ells. [EIX 11]

Per tant, E és un dels [termes] A, B o C.

I això s'oposa al que havíem suposat.

Per tant, F no és cap dels nombres A, B o C. ♠

c_2) De manera semblant, establint que F no és primer,
veiem que F és mesurat per A.

$c_{2.1}$) Si [F és primer][422]
i mesura D,
aleshores [F] també mesura A, [EIX 12]
[malgrat] que [A] és primer [i] diferent [de F].

I això és impossible. [DVII 11]

Per tant, F no és primer.

És a dir, és compost.

I tot nombre compost és mesurat per un nombre primer. [EVII 31]

En conseqüència, F és mesurat per un nombre primer. ♠

$c_{2.2}$) Afirmo que [F] només és mesurat pel nombre primer A.

Si algun altre [nombre] primer mesura F[422]
i F mesura D,
aquest [nombre primer] també mesura D. [per transitivitat]

Per tant, també mesura A, [EIX 12]
[malgrat que A] és [un nombre] primer [i] diferent d'ell.
I això és impossible.

En conseqüència, A mesura F. ♠

d) I, atès que E mesura D d'acord amb F,
obtenim D multiplicant E per F. [DVII 15]

Però també ho fem multiplicant A per D. [EIX 11, porisma]

D'això en resulta que [el nombre obtingut multiplicant] A per C
és igual [a l'obtingut multiplicant] E per F. [Nc 1]

Aleshores, tenim la proporció: A és a E com F a C. [EVII 19]

Però A mesura E.

---

422. Hipòtesi de l'absurd.

Per tant, F també mesura C. [DVII 20]

I el mesura d'acord amb G.

De manera semblant, podem veure que G no és ni A ni B i que és mesurat per A.

I, atès que F mesura C d'acord amb G, resulta que obtenim C multiplicant F per G. [DVII 15]

Però també ho fem multiplicant A per B. [EIX 11, porisma]

Per tant, el [nombre obtingut multiplicant] A per B és igual a [l'obtingut multiplicant] F per G. [Nc 1]

Tenim, doncs, la proporció: A és a F com G a B. [EVII 19]

I que A mesura F.

Per tant, G també mesura B. [DVII 20]

I el mesura d'acord amb H.

De manera semblant, podem veure que H no és A.

I, atès que G mesura B d'acord amb H, obtenim B multiplicant G per H. [DVII 15]

Però A multiplicat per si mateix també dona B. [EIX 8]

Aleshores, el [nombre obtingut multiplicant] H per G és igual al quadrat de A. [Nc 1]

Per tant, H és a A com A a G. [EVII 19]

I A mesura G.

Aleshores, H també mesura A [DVII 20]
malgrat que A és un nombre primer diferent. [DVII 11]
I això és impossible. ♠

En definitiva, [el nombre] més gran D només pot ser mesurat per [un dels nombres] A, B o C.

I això és el que volíem demostrar. ♠[423]

423. Aquesta demostració procedeix iterant el procés i això fa que sigui tan llarga. Ras i curt: sigui $1, p(:= a_1), a_2, \ldots, a_n$ una progressió geomètrica amb p primer. Òbviament, si $d|a_n$, amb $d \neq p$, necessàriament $d := a_i$, amb $i = 1, 2 \ldots, n-1$. [Hipòtesi de l'absurd.] Suposem que d no és cap d'aquests valors. Fàcilment es veu que d no pot ser primer. Per tant, d és compost i és mesurat per un primer p' que mesura a_n. I, de retruc, $p'|p$. Per tant, solament p mesura d. Ara tenim que $a_n := d \times d_1$. Tampoc no pot ser que d_1 sigui un dels valors de la progressió geomètrica, ja que si ho fos d també ho seria [EIX 12]. Fixem-nos que Euclides analitza ca-

EIX 14. [Teorema fonamental de l'aritmètica(?)] *El menor nombre mesurat per nombres primers no és mesurat per cap altre nombre primer diferent d'ells.*[424]

Sigui A el nombre més petit que és mesurat pels nombres primers B, C i D.[425]

Afirmo que A no és mesurat per cap altre nombre primer llevat [dels nombres] B, C i D.[426]

[*Demostració.*] Suposem que és mesurat pel nombre primer E,

i que E no és cap dels nombres primers B, C i D.[427]

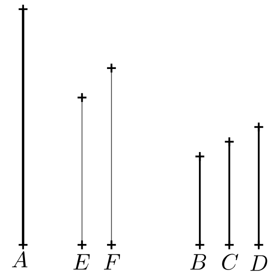


FIGURA EIX 14

dascun dels factors, per separat, com si el comportament no fos necessàriament anàleg. Com abans, veiem que d_1 no és primer i que solament és divisible pel nombre primer p [EIX 12]. I comença la iteració: $a_n = a_1 \times a_{n-1} = d \times d_1$. Per tant, $\frac{a_1}{d} = \frac{d_1}{a_{n-1}} := \frac{1}{m}$. En definitiva, $a_{n-1} = m \times d_1$. Iterem: d_1 mesura a_{n-2}, etc., d_1 mesura p, amb p primer. Impossible!

424. Com ja hem dit (pàgina 15), aquesta proposició s'interpreta d'una manera o d'una altra segons que s'accepti o no la possibilitat que els nombres primers que mesuren el nombre donat puguin repetir-se o no. La demostració solament fa un pas i, al nostre entendre, no aclareix la qüestió. Agafa q, primer, diferent dels [nombres primers] $p_1, p_2, \ldots, p_n$, però no sabem si, necessàriament, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ són diferents entre si.

Tanmateix, no pot ser que Euclides no sabés que, si tenim $\frac{1}{A} = \frac{A}{B} = \cdots = \frac{D}{E} = \frac{E}{F}$, aleshores $B := A \times A, C := B \times A = (A \times A) \times A$, etc. I que, si A és primer, B, C, etc. tenen un divisor primer repetit.

De fet, ho podia haver establert al llibre VII.

425. Tot rau a considerar si, per Euclides, són necessàriament diferents, o si accepta, per exemple, que $A = B$. El número 12, posem per cas, el podem pensar mesurat només per 2 i per 3, però aleshores no és el més petit dels nombres mesurats per 2 i per 3. En canvi, podem suposar que és mesurat per 2, i per 2 i per 3. Si acceptem aquesta darrera accepció de l'enunciat euclidià, aleshores ell ha introduït el que nosaltres indiquem amb l'exponent en la descomposició $12 = 2^2 \times 3$. En tot cas, la demostració no ho precisa. Segons com ho interpretem, tenim la unicitat de la descomposició o un cas particular. Si acceptem el cas general i EVII 31, arribem al teorema fonamental de l'aritmètica.

426. Creiem que acceptar la possibilitat de la repetició de nombres primers no altera la demostració.

427. Hipòtesi de l'absurd.

Aleshores, atès que E mesura A, ho fa d'acord amb F. [DVII 3]

I, per tant, obtenim A multiplicant E [per] F. [DVII 15]

Però A és mesurat pels nombres primers B, C i D.

I, si multipliquem dos nombres, i un nombre primer mesura el producte que obtenim,
[el nombre primer] també mesura un dels [factors] originals. [EVII 30]

Per tant, B, C i D mesuren un dels [factors] E o F.

Però no mesuren E,
ja que és un [nombre primer] diferent d'ells. [DVII 11]

En conseqüència, [tots] mesuren F,
que és [un nombre] més petit que A.

I això és impossible perquè hem suposat que A és el [nombre] més petit mesurat per B, C i D.

En definitiva, cap nombre primer mesura A llevat [un dels nombres] B, C i D.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIX 15. *Si tres nombres en proporció contínua són els més petits amb la mateixa raó, dos [qualssevol] junts donen un [nombre] primer amb l'altre.*[428]

Siguin A, B i C tres nombres en proporció contínua [que, a més, són] els [nombres] més petits que tenen la mateixa raó.

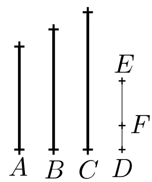


FIGURA EIX 15

Afirmo que dos [qualssevol] dels [nombres] A, B i C junts [donen un nombre que] és primer amb l'altre.

És a dir, el nombre que correspon a A i B junts és primer amb C, a B i C [junts] ho és amb A, i a A i C [junts] ho és amb B.

[*Demostració.*] *a*) Considerem els nombres DE i EF,

428. Si tres nombres m, n i p formen una progressió geomètrica i són els mínims que tenen la raó $\frac{M}{N}$, essent M i N primers entre si, la progressió és necessàriament $M^2, M \times N, N^2$. Ara bé, la suma $M + N$ és un nombre primer amb M i amb N. Per tant, el producte $(M + N) \times M = M^2 + M \times N$ és primer amb N i també amb N^2. D'això en resulta que la suma $m + n$ és un nombre primer amb p i, anàlogament, la suma $M \times N + N^2$ ho és amb M^2. Per tant, $n + p$ ho és amb m, i $m + p$ amb n.

els més petits que tenen la raó de A, B i C. [EVIII 2]

És clar que obtenim A i B multiplicant DE per si mateix i per EF, respectivament,
i que obtenim C multiplicant EF per si mateix. [DVII 21]

I, atès que DE i EF són els nombres més petits [que tenen la mateixa raó que ells], són primers entre si. [EVII 22]

I, si dos nombres són primers entre si,
la [seva] suma també és [un nombre] primer amb cadascun. [EVII 28]

Aleshores, DF també és primer amb cadascun de[ls nombres] DE i EF.

Però, de fet, DE també és primer amb EF.

Per tant, tant DF com DE són primers amb EF. ♠

b) I, si dos nombres són primers amb un [mateix] nombre,
el [nombre] que obtenim multiplicant-los també ho és. [EVII 24]

En conseqüència, el [nombre] obtingut multiplicant FD per DE és primer amb EF.

A més, [el nombre obtingut multiplicant] FD per DE també és primer amb el quadrat de EF. [EVII 25][429]

[I, a més, si dos nombres són primers entre si, el nombre obtingut quadrant-ne un és primer amb l'altre. [EVII 27]]

Però [el nombre obtingut multiplicant] FD per DE és [igual] al quadrat de DE més [el nombre obtingut multiplicant] DE per EF. [EII 3][430]

Així doncs, el quadrat de DE més [el nombre obtingut multiplicant] DE per EF és primer amb el quadrat de EF,
i el quadrat de DE és A.

I [el nombre obtingut multiplicant] DE per EF és B,
i el quadrat de EF és C.

Aleshores, [el nombre] A i B junts és primer amb C.

De manera semblant, podem veure que B i C junts també és un nombre primer amb A. ♠

Afirmo que [el nombre] A i C [junts] també és primer amb B.

---

429. Recordem que, si dos nombres són primers entre si, el nombre obtingut quadrant-ne un és primer amb l'altre. EVII 25.

430. Novament, Euclides aplica als nombres naturals propietats que ha establert per als segments rectilinis.

c) Per tant, atès que DF és primer amb DE i amb EF,
tenim que el quadrat de DF també és primer amb [el nombre obtingut multiplicant] DE per EF. [EVII 24 i EVII 25]

Però la suma dels quadrats de DE i EF més el doble de[l producte de] DE per EF és igual al quadrat de DF. [EII 4][431]

Així doncs, la suma dels quadrats de DE i EF més dues vegades DE per EF és primer amb DE per EF. [per substitució]

Per tant, si sostraiem [DE per EF],
el resultat de la suma dels quadrats de DE i EF més una vegada DE per EF és primer amb DE i EF.[432]

De bell nou, si sostraiem [DE per EF],
el resultat de la suma dels quadrats de DE i EF és primer amb DE per EF.

Però el quadrat de DE és A, DE per EF és B i el quadrat de costat EF és C.

Aleshores, [el nombre] A i C junts és primer amb B.
I això és el que volíem demostrar. ♠

EIX 16. *Si dos nombres són primers entre si, no hi ha cap nombre que sigui al segon com ho és el primer.*[433]

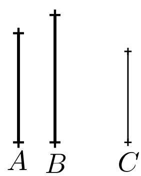


FIGURA EIX 16

Siguin A i B dos nombres primers entre si.

Afirmo que B no té amb cap nombre [C] la mateixa raó que hi ha entre A i B.

[*Demostració*.] Suposem que A és a B com B a C.[434]

Però A i B són primers entre si
i els [nombres] primers entre si també són els més petits [amb la mateixa raó]. [EVII 21]

I els nombres més petits mesuren els [nombres] que tenen la mateixa raó [que hi ha entre ells] un nombre igual de vegades,
l'antecedent l'antecedent, i el consegüent el consegüent. [EVII 20]

431. Vegeu la nota 430 (pàgina 190).

432. Ras i curt, si $m \times n$ mesura $m^2 + n^2 + 2m \times n$, aleshores $m \times n$ mesura $m^2 + n^2 + m \times n$, i viceversa.

433. Entre dos nombres m i n, amb $(m, n) = 1$, no hi ha cap tercera proporcional.

434. Hipòtesi de l'absurd.

Aleshores, A mesura B com l'antecedent [mesura] l'antecedent.

Però [A] també es mesura a si mateix. [DVII 2]

Per tant, A mesura A i B, que són primers entre si. I això és impossible.

En definitiva, no hi ha cap nombre C que compleixi que A és a B com B a C.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIX 17. *Si una multitud arbitrària de nombres és contínuament proporcional i els seus extrems són primers entre si, no hi ha cap nombre que hi tingui una raó com la que hi ha entre el primer i el segon.*

Siguin A, B, C i D una multitud arbitrària de nombres contínuament proporcionals.

Suposem que els [termes] extrems A i D són primers entre si.

Afirmo que D no té amb cap nombre [E] la raó de A i B.

[*Demostració.*] Suposem que A és a B com D [a un cert nombre] E.[435]

Alternando, A és a D com B a E. [EVII 13]

Però A i D són [dos nombres] primers entre si.

Sabem que els [nombres] primers entre si són també els més petits [amb la mateixa raó], [EVII 21] i els nombres més petits mesuren els que tenen la mateixa raó [que ells] un nombre igual de vegades, l'antecedent l'antecedent, i el consegüent el consegüent. [EVII 20]

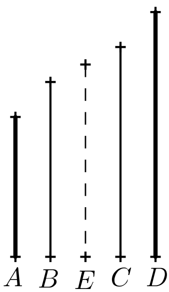


FIGURA EIX 17

Així doncs, A mesura B, i A és a B com B a C.

Per tant, B mesura C i, [DVII 20]
consegüentment, A també el mesura. [per transitivitat]

Aleshores, atès que B és a C com C a D, i B mesura C; tenim que C també mesura D. [DVII 20]

Però hem establert que A mesura C.

Per tant, també mesura D.

I també es mesura a si mateix. [DVII 2 i DVII 3]

435. Hipòtesi de l'absurd.

En conseqüència, A mesura A i D,
que són [dos nombres] primers entre si. [DVII 12]
I això és impossible.

En definitiva, D no té amb cap altre nombre la raó de A i B.
I això és el que volíem demostrar. ♠

EIX 18. *Volem investigar si és possible trobar un nombre que sigui tercera proporcional de dos més.*

Siguin A i B dos nombres donats per endavant.

Volem saber si és possible trobar-ne un tercer [que sigui] proporcional amb tots dos.

Es dona una d'aquestes dues possibilitats:[436]

a) A i B són primers entre si.
b) A i B no són primers entre si.

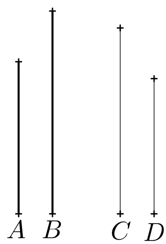


FIGURA EIX 18

[*Demostració.*] a) Si A i B són primers entre si, és impossible trobar un [nombre] que sigui tercera proporcional amb ells. [EIX 16] ♠

b) Si A i B no són primers entre si, considerem [el nombre] C que obtenim multiplicant B per si mateix.

Aleshores, es dona una d'aquestes dues possibilitats:[436]

b_1) A mesura C.

b_2) A no mesura C.

b_1) En primer lloc, suposem que A mesura C d'acord amb D. [DVII 3]

Aleshores, obtenim C multiplicant A per D. [DVII 15]

Però, de fet, C també l'obtenim multiplicant B per si mateix.

En conseqüència, [el nombre obtingut multiplicant] A per D és igual al quadrat de B. [Nc 1]

I, per tant, A és a B com B a D. [EVII 19]

En definitiva, hem determinat un nombre tercera proporcional de A i B[, concretament, D]. ♠

b_2) En segon lloc, suposem que A no mesura C.

436. Disjunció de casos.

Afirmo que, en aquest cas, és impossible trobar un [nombre] tercera proporcional de A i B.

Suposem que podem determinar-lo i [que és] D.[437]

Aleshores, [el nombre obtingut multiplicant] A per D és igual al quadrat de B, [EVII 19]

i el quadrat de B és C.

Així doncs, [el nombre] A per D és igual a C. [Nc 1]

Per tant, obtenim C multiplicant A per D.

En definitiva, A mesura C d'acord amb D. [DVII 3 i 15]

Però hem suposat que [A] no mesura [C]. I això és impossible.

En definitiva, quan A no mesura C, no és possible trobar un nombre tercera proporcional de A i B. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIX 19. *Volem investigar si és possible trobar un nombre que sigui la quarta proporcional de tres més.*

Siguin A, B i C els tres nombres donats per endavant.

Volem saber quan és possible trobar un [nombre que sigui] quarta proporcional amb ells.

[*Demostració.*] De fet, [els nombres A, B i C] poden respondre a una d'aquestes quatre possibilitats:[438]

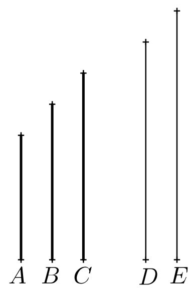


FIGURA EIX 19

a) No són contínuament proporcionals i els seus extrems són primers entre si.

b) Són contínuament proporcionals i els seus extrems no són primers entre si.

c) Ni són contínuament proporcionals ni els seus extrems són primers entre si.

d) Són contínuament proporcionals i els seus extrems són primers entre si.[439]

437. Hipòtesi de l'absurd.

438. Disjunció de casos.

439. Sorprèn aquesta presentació desordenada. Si α i β abreugen «contínuament proporcionals» i «els seus extrems són primers entre si», els enunciats anteriors són: *a*) $\neg\alpha \wedge \beta$, *b*) $\alpha \wedge \neg\beta$, *c*) $\neg\alpha \wedge \neg\beta$ i, finalment, *d*) $\alpha \wedge \beta$. Curiosament, però, la demostració la fa en l'ordre: *d*), *a*), *b*) i *c*).

d) Si A, B i C són contínuament proporcionals, i els seus extrems A i C són primers entre si,
hem vist que és impossible trobar un [nombre que sigui] quarta proporcional amb ells. [E IX 17] ♠[440]

a) Suposem que A, B i C no són contínuament proporcionals
però que els seus extrems són, de bell nou, primers entre si.

Afirmo que, en aquest cas, també és impossible trobar un [nombre que en sigui] quarta proporcional.

Si és possible,[441]
considerem que és D.

Aleshores, A és a B com C a D.

I, a més, B és a C com D a E.[442]

Atès que A és a B com C a D, i B és a C com D a E;
tenim que, *ex æquali*, A és a C com C a E. [E VII 14]

Però A i C són primers [entre si, per hipòtesi],
els [nombres] primers entre si són els [nombres] més petits [amb la mateixa raó], [E VII 21]
i els [nombres] més petits mesuren els nombres que tenen la mateixa raó [el mateix nombre de vegades],

---

Ara bé, la demostració de la proposició és incorrecta. De fet, només hi ha dos casos possibles. O bé A, B i C són contínuament proporcionals, i A i C són primers entre si $(\alpha \wedge \neg\beta)$, o no ho són $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$. En el primer cas, és impossible trobar el nombre [que és] quarta proporcional. En el segon cas, en canvi, és possible trobar un [nombre que és] quarta proporcional sempre que A mesuri C d'acord amb B. Dels quatre casos que considera Euclides, la prova del primer és incorrecta ja que solament estableix que, si hi ha una quarta proporcional D, és a dir $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, no és possible trobar un nombre E, de manera que $\frac{B}{C} = \frac{D}{E}$. Les proves donades en els tres altres casos són, en canvi, correctes. Vegeu el problema 18 (pàgina 74).

440. Absolutament erroni, com mostren els nombres $4, 6$ i 9. Vegeu la nota anterior i el problema 18 (pàgina 74).

441. Hipòtesi de l'absurd.

442. És a dir, existeix la quarta proporcional de tres nombres, cosa que Euclides ha establert per a segments i que, en el cas dels nombres enters positius, pot no donar-se. Però, en aquest cas, sí que ho fa ja que $\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$ i $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, amb $(A, B) = 1$, impliquen $A \times C = B \times B$ i $B = \lambda \times A, C = \lambda \times B$ i $C = \mu \times A, D = \mu \times B$. Per tant, $(\lambda \times \mu) \times B \times B = (\lambda \times \mu) \times A \times C$. Agafem $E = \mu \times C$. Tenim que $\frac{B}{C} = \frac{D}{E}$ ja que $B \times E = C \times D$.

l'antecedent l'antecedent, i el consegüent el consegüent. [EVII 20]

Aleshores, A mesura C [com] l'antecedent [mesura] l'antecedent, però també es mesura a si mateix.

Per tant, A mesura A i C, que són primers entre si. I això és impossible.

Així doncs, no és possible trobar un [nombre que sigui] quarta proporcional de A, B i C. ♠

b) Siguin A, B i C contínuament proporcionals.

Suposem que A i C no són primers entre si.

Afirmo que és possible trobar-ne la quarta proporcional.

Sigui D el nombre que obtenim multiplicant B per C. [DVII 15]

Aleshores, es dona una d'aquestes dues possibilitats:[443]

b_1) A mesura D.

b_2) A no mesura D.

b_1) De primer, suposem que A el mesura d'acord amb E. [DVII 3]

Aleshores, obtenim D multiplicant A per E. [DVII 15]

Però, de fet, també obtenim D multiplicant B per C.

En conseqüència, [els nombres] A per E i B per C són iguals. [Nc 1]

Per tant, A és a B com C a E. [EVII 19]

Hem aconseguit, doncs, la quarta proporcional, E, de[ls nombres] A, B i C. ♠

b_2) Si A no mesura D,

afirmo que és impossible trobar la quarta proporcional de A, B i C.

Si és possible,[444] considerem que sigui E.

Aleshores, [els nombres] A per E i B per C són iguals. [EVII 19]

Però el [nombre] B per C és D.

Per tant, el [nombre] A per E és igual a D. [Nc 1]

I, aleshores, A mesura D d'acord amb E. [DVII 15]

Per tant, A mesura D i, alhora, no el mesura. I això és impossible.

De tot això en resulta que no és possible trobar una quarta proporcional de A, B i C quan A no mesura D. ♠

---

443. Disjunció de casos.

444. Hipòtesi de l'absurd.

c) Finalment, suposem que A, B i C no són contínuament proporcionals,

i que els seus extrems no són primers entre si.

Sigui D el nombre obtingut multiplicant B per C. [Dvii 15]

Aleshores, de manera semblant, podem establir que:[445]

c_1) Si A mesura D,

és possible trobar una quarta proporcional [de A, B i C].

c_2) Si A no mesura D,

és impossible trobar-ne cap. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eix 20. [Teorema de l'existència d'infinits nombres primers.] *Sempre hi ha més nombres primers que qualsevol quantitat [finita] d'ells.*[446]

Siguin A, B i C nombres primers fixats per endavant.

Afirmo que [la col·lecció dels] nombres primers és més nombrosa que [la col·lecció] A, B i C.

[*Demostració*.] Sigui DE el mínim nombre mesurat per A, B i C.[447] [Evii 36]

Hi afegim la unitat. [Obtenim EF.][448]

Es pot donar una d'aquestes dues opcions:[445]

a) El nombre EF és primer.

b) El nombre EF no és primer.

a) D'entrada, suposem que EF és primer.

Aleshores, la col·lecció de nombres primers A, B, C i EF

és més nombrosa que [la col·lecció] A, B i C,[449]

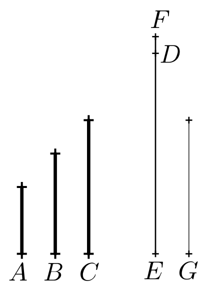


Figura Eix 20

445. Disjunció de casos.

446. Heus ací un pas de gegant: el teorema de l'existència d'infinits nombres primers. La demostració d'Euclides és la mateixa que es fa actualment a les aules i que contenen els manuals. Euclides, però, la fa evitant l'«infinit en acte» i estableix que hi ha una «infinitat en potència» de nombres primers.

447. És a dir, $DE := A \times B \times C$, atès que tots són [nombres] primers.

448. Per tant, $EF := A \times B \times C + 1$. Novament, la unitat —que no és nombre— aquí fa el paper de nombre.

449. Òbviament, EF és diferent de A, B i C.

i hem establert [el que volíem establir]. ♠

b) Suposem que EF no és primer.

Aleshores, és mesurat per un nombre primer. [Evii 31]

En diem G.

Afirmo que G no és cap dels [nombres de la col·lecció] A, B i C.

Si no és així,[450] n'és un.

I, atès que tots els [nombres] A, B i C mesuren DE, G també ho fa.

Però[, per construcció, atès que G és un dels nombres A, B o C,] mesura EF.

En conseqüència, [el nombre] G, malgrat ser un nombre,[451] mesura el residu, que és la unitat DF. [Evii 28]

I això és impossible. ♠

Així doncs, G no és cap dels [nombres de la col·lecció] A, B i C.

Però hem suposat que és primer.

Per tant, queda establert que la col·lecció de nombres primers A, B, C i G és més nombrosa que la col·lecció de [nombres primers] A, B i C. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eix 21. *Si sumem una multitud arbitrària de nombres parells, el* [*nombre*] *resultant és parell.*[452]

Ajuntem una multitud de nombres parells, AB, BC, CD i DE.

Afirmo que el nombre [total] AE és parell.

[*Demostració.*] Atès que cadascun dels [nombres] AB, BC, CD i DE és parell; té meitat, [Dvii 6] i el total AE també.[453]

I, un nombre parell el podem dimidiar. [Dvii 6]

Per tant, AE és [un nombre] parell.

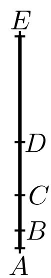


Figura Eix 21

I això és el que volíem demostrar. ♠

450. Hipòtesi de l'absurd.

451. Recordem que, si és un nombre, no és la unitat [Dvii 1 i 2]. I això és essencial en la demostració.

452. Si $n_1, \dots, n_k$ són parells, $n_1 + \cdots + n_k$ és parell.

453. La suma de les meitats és la meitat de la suma ja que, usant la commutativa, el doble de totes dues és el nombre inicial [Nc 5′].

Eix 22. *Si sumem una multitud parella arbitrària de nombres senars, el* [*nombre*] *resultant és parell.*[454]

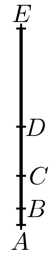


Figura Eix 22

Ajuntem una multitud parella arbitrària de nombres parells, AB, BC, CD i DE.

Afirmo que el [nombre] total AE és parell.

[*Demostració.*] Atès que cadascun dels [nombres] AB, BC, CD i DE és senar,
resulta que, si sostraiem de cadascun la unitat, els residus són parells. [Dvii 7]

Per tant, la suma de tots és [un nombre] parell. [Eix 21]

Però la multitud d'unitats [sostretes] també ho és.[455]

En conseqüència, el total AE també és [un nombre] parell. [Eix 21]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eix 23. *Si sumem una multitud senar arbitrària de nombres senars, el* [*nombre*] *resultant és senar.*[456]

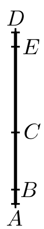


Figura Eix 23

Ajuntem una multitud senar arbitrària de nombres senars, AB, BC i CD.

Afirmo que el [nombre] total AD també és senar.

[*Demostració.*] Si sostraiem la unitat DE del [nombre] CD,
el residu CE és [un nombre] parell. [Dvii 7]

Però CA també ho és. [Eix 22]

Aleshores, el total AE és parell [Eix 21]
i DE és la unitat.

Per tant, AD és senar. [Dvii 7]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eix 24. *Si sostraiem d'un* [*nombre*] *parell un nombre parell, el residu és parell.*[457]

454. Si $n_1, \ldots, n_k$ són senars i k és parell, $n_1 + \cdots + n_k$ és parell.
455. La meitat d'unitats proporciona la meitat de totes les unitats.
456. Si $n_1, \ldots, n_k$ són senars i k és senar, $n_1 + \cdots + n_k$ és senar.
457. Si n_1 i n_2 (amb $n_1 > n_2$) són parells, $n_1 - n_2$ és parell.

Sostraiem del nombre parell AB el nombre parell BC.

Afirmo que el residu CA és [un nombre] parell.

[*Demostració.*] Atès que [el nombre] AB és parell, té meitat. [DVII 6]

I, pel mateix [raonament], BC també en té.

En conseqüència, el residu [CA] també.[458]

En definitiva, AC és [un nombre] parell.

I això és el que volíem demostrar. ♠

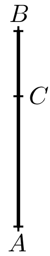


FIGURA EIX 24

EIX 25. *Si sostraiem un nombre senar d'un* [*nombre*] *parell, el residu és senar.*[459]

FIGURA EIX 25

Sostraiem el nombre senar BC del nombre parell AB.

Afirmo que el residu CA és senar.

[*Demostració.*] Sostraiem de BC la unitat CD.

El nombre DB [que en resulta] és parell. [DVII 7]

Però AB també ho és.

Per tant, el residu AD és parell. [EIX 24]

I CD és la unitat.

En definitiva, CA és senar. [DVII 7]

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIX 26. *Si sostraiem d'un* [*nombre*] *senar un nombre senar, el residu és parell.*[460]

Sostraiem del nombre senar AB el nombre senar BC.

Afirmo que el residu CA és [un nombre] parell.

[*Demostració.*] Sostraiem del nombre senar AB la unitat BD.

Aleshores, el residu AD és parell. [DVII 7]

Pel mateix [raonament], CD també ho és.

Per tant, el residu CA és parell. [EIX 24]

I això és el que volíem demostrar. ♠

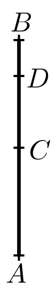


FIGURA EIX 26

458. Vegeu la nota 453 (pàgina 198).

459. Si n_1 és parell i n_2 és senar (amb $n_1 > n_2$), $n_1 - n_2$ és senar.

460. Si n_1 i n_2 (amb $n_1 > n_2$) són senars, $n_1 - n_2$ és parell.

Eix 27. *Si sostraiem d'un nombre parell un nombre senar, el residu és senar.*[461]

Sostraiem del [nombre] senar AB el [nombre] parell BC.

Afirmo que el residu CA és senar.

[*Demostració.*] Sostraiem [del nombre AB] la unitat AD.

D'això en resulta que DB és parell. [Dvii 7]

Però BC també ho és.

Per tant, el residu CD també és parell. [Eix 24]

I, en conseqüència, CA és senar. [Dvii 7]

I això és el que volíem demostrar. ♠

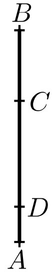


Figura Eix 27

Eix 28. *Si multipliquem un nombre senar i un de parell, el nombre resultant és parell.*[462]

Sigui C el nombre que obtenim multiplicant el nombre senar A pel [nombre] parell B.

Afirmo que C és [un nombre] parell.

[*Demostració.*] Atès que obtenim C multiplicant A per B,

C es compon de tants [nombres] iguals a B com unitats té [el nombre] A. [Dvii 15]

Però B és parell.

Per tant, C és compon d'[una col·lecció] de nombres parells.

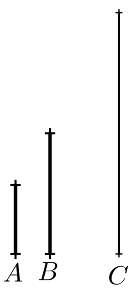


Figura Eix 28

I, si sumem una multitud arbitrària de nombres parells, el resultat és [un nombre] parell. [Eix 21]

En conseqüència, C és parell.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Eix 29. *Si multipliquem dos nombres senars, el nombre resultant és senar.*[463]

Sigui C el nombre que obtenim multiplicant el nombre senar A pel nombre senar B.

---

461. Si n_1 és parell i n_2 és senar (amb $n_1 > n_2$), $n_1 - n_2$ és senar.
462. Si n_1 és senar i n_2 és parell, $n_1 \times n_2$ és parell.
463. Si n_1 i n_2 són senars, $n_1 \times n_2$ és senar.

Afirmo que C és [un nombre] senar.

[*Demostració.*] Atès que obtenim C multiplicant A per B,

C es compon de tants [nombres] iguals a B com unitats té [el nombre] A. [Dvii 15]

Però [els nombres] A i B són senars.

Per tant, C es compon d'una quantitat senar de [nombres] senars.

En conseqüència, C és senar. [Eix 23]

I això és el que volíem demostrar. ♠[464]

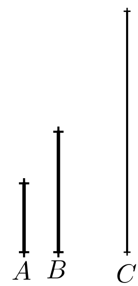


Figura Eix 29

Eix 30. *Si un nombre senar en mesura un de parell, també en mesura la meitat.*[465]

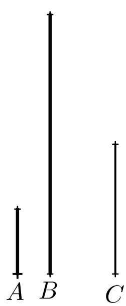


Figura Eix 30

Sigui A el nombre senar que mesura el parell B.

Afirmo que [A] també mesura la meitat de B.

[*Demostració.*] Atès que A mesura B,

suposem que ho fa d'acord amb C.

Afirmo que C no és senar.

Suposem, però, que ho és.[466]

Aleshores, atès que A mesura B

d'acord amb C, [Dvii 3]

obtenim el nombre B multiplicant A per C. [Dvii 15]

En conseqüència, atès que B es compon d'una quantitat senar de nombres senars,

resulta que [B] és senar. [Eix 23 o 29]

I això és impossible ja que hem suposat que [B] és parell.

Per tant, C no és senar [Dvii 6 i 7]

i, conseqüentment, és parell. [Dvii 6 i 7]

464. Fixem-nos que Euclides omet el producte de dos nombres parells. El considera més evident que els altres dos casos?

465. Si $(2m+1)|(2n)$, aleshores $(2m+1)|n$. De fet, això és un porisma immediat del lema d'Euclides i d'Evii 32. Vegeu la nota 468 (pàgina 203).

466. Hipòtesi de l'absurd.

En definitiva, A mesura B un nombre parell de vegades.[467]

I d'això en resulta que [A] també mesura [la] meitat [de B].[468]

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIX 31. *Si un nombre senar és primer amb un nombre, també ho és amb el doble d'aquest nombre.*[469]

Siguin A el nombre senar primer amb [el nombre B],
i C el doble de B.

Afirmo que A [també] és primer amb C.

[*Demostració.*] Si [A i C] no són primers entre si,[470]
hi ha un nombre que els mesura. [DVII 12 i 14]

Sigui D el nombre que ho fa.

Atès que A és senar,
D també ho és. [EIX 39][471]

I, com que D, que és [un nombre] senar, mesura C,
i C és parell,
resulta que [D] mesura la meitat de C, [EIX 30]
i B és aquesta meitat.

Per tant, D mesura B i A.

En conseqüència, D mesura A i B [alhora],
que són primers entre si. I això és impossible.

Així doncs, no és possible que A no sigui primer amb C.

En definitiva, doncs, A i C són primers entre si.

I això és el que volíem demostrar. ♠[472]

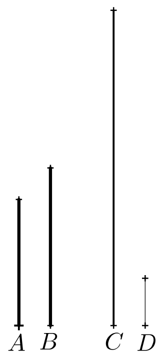


FIGURA EIX 31

---

467. Podem considerar, doncs, el nombre que és mesurat pel nombre que és la meitat de vegades el nombre parell. I podem veure que aquest nombre és la meitat del nombre inicial. Vegeu la nota 453 (pàgina 198).

468. De fet, en aquesta afirmació, Euclides usa un cas particular del lema de Gauss: «Si $m|(2 \times n)$ i m és senar —és a dir, $(m, 2) = 1$—; $m|n$.»

469. Si $(m, n) = 1$ i m és senar, $(m, 2n) = 1$.

470. Hipòtesi de l'absurd.

471. N'és un porisma immediat.

472. Podem aconseguir una demostració més simple observant que els divisors d'un nombre senar són senars, conseqüència immediata de DVII 7 i de la transitivitat de la divisibilitat (pàgina 5).

EIX 32. *Els nombres [contínuament] doblats [començant] per la díada*[473] *només*[474] *poden ser parellament-parell.*[475]

Siguin B, C i D una multitud de nombres obtinguda doblant [cada terme contínuament] des de la díada A.

Afirmo que B, C i D són [nombres] parellament-parells.

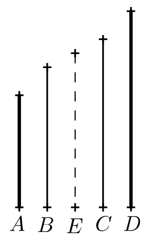


FIGURA EIX 32

[*Demostració.*] *a*) De fet, és clar que cada un [dels nombres B, C i D] és un [nombre] parellament-parell, atès que l'hem obtingut doblant la díada. [DVII 8] ♠

També afirmo que només [són parellament-parells].

b) Col·loquem la unitat davant [la col·lecció completa dels nombres].

Aleshores, la col·lecció de nombres [$1, A, B, C$ i D] és contínuament proporcional començant des de la unitat,

i el [nombre] A que segueix la unitat és primer.

Per tant, el nombre més gran de la [col·lecció] A, B, C i D, [o sigui,] D,

només pot ser mesurat pels [nombres] A, B i C. [EIX 13]

I cada un dels [nombres] A, B i C és parell.

Per tant, D és només un [nombre] parellament-parell. [DVII 8]

De manera semblant, podem veure que cada un dels [nombres] B i C [també] és parellament-parell. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIX 33. *Si un nombre té una meitat senar, només pot ser parellament-senar.*[476]

---

473. És a dir, començant des del número 2.

474. En aquesta proposició i les següents, Euclides estableix la classificació dels nombres en parellament-parells i parellament-senars, que no és excloent.

475. Són els nombres $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^k$. Comença a preparar tot el que li cal per a establir el teorema d'Euclides dels nombres perfectes (parells), EIX 36 (pàgina 207). Recordem que, segons la definició DVII 8 (pàgina 89), un nombre parellament-parell és un nombre $m = (2n_1) \times (2n_2)$.

476. Si $\frac{m}{2}$ és senar $(= 2n + 1)$, $m (= 2(2n + 1))$ és parellament-senar.

Sigui A el nombre que té una meitat senar.

Afirmo que A només pot ser un [nombre] parellament-senar.

[*Demostració.*] *a*) De fet, és clar que [A] és un [nombre] parellament-senar
ja que la seva meitat, que és senar, el mesura un nombre parell de vegades. [DVII 9] ♠

FIGURA EIX 33

Afirmo que només és [parellament-senar].[477]

b) Si també és un [nombre] parellament-parell,[478]
és mesurat per un nombre parell un nombre parell de vegades. [DVII 8]

En conseqüència, la seva meitat també és mesurada per un nombre parell, [malgrat que es tracta d'un nombre] senar. I això és impossible.

En definitiva, A només és un [nombre] parellament-senar. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIX 34. *Si un nombre no l'aconseguim doblant des de la díada ni té la meitat senar, és parellament-parell i parellament-senar* [*alhora*].[479]

Sigui A un nombre que no l'hem aconseguit doblant iteradament des de la díada però que tampoc no té la meitat senar.

FIGURA EIX 34

Afirmo que A és parellament-parell i parellament-senar alhora.

[*Demostració.*] *a*) De fet, és clar que A és un [nombre] parellament-parell
ja que la seva meitat no és senar. [DVII 8]

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Afirmo que també és un [nombre] parellament-senar.

b) El dimidiem i en dimidiem la meitat, i així iteradament.

Arribem necessàriament a un [nombre] senar que és mesurat d'acord amb un nombre parell.

477. És evident que no és senarment-senar però Euclides omet qualsevol referència a aquest fet.

478. Hipòtesi de l'absurd.

479. Són els nombres de la forma $m := 2^k(2n+1)$, amb $k > 1$.

Si no és així,[480]
arribem a la díada.

En conseqüència, hem obtingut A doblant iteradament el nombre anterior des de la díada, en contra del que hem suposat. [I això és impossible].

En definitiva, A és un [nombre] parellament-senar. [DVII 9] ♠

I també hem vist que és parellament-parell.

De tot això en resulta que A és parellament-parell i parellament-senar alhora.[481]

I això és el que volíem demostrar. ♠

EIX 35. *Si tenim una multitud arbitrària de nombres contínuament proporcionals i sostraiem el primer del segon i del darrer, aleshores l'excés del segon sobre el primer és al primer com l'excés del darrer sobre el primer és a la suma de tots els nombres que el precedeixen.*[482]
Siguin A, BC, D i EF una multitud arbitrària de nombres contínuament proporcionals, començant pel més petit, A.

Siguin BG i FH, que hem sostret de BC i EF[, respectivament], iguals a A.

Afirmo que GC és a A com EH a A, BC i D junts.

[*Demostració*.] Fem FK igual a BC i FL a D.[483]

Atès que FK és igual a BC
i [la seva part] FH a [la part] BG,
resulta que els residus HK i GC són iguals. [NC 3]

I, atès que EF és a D com D a BC, i BC a A, [EVII 13]
i que D és igual a FL, BC a FK, i A a FH;

480. Hipòtesi de l'absurd.

481. Queda establert, doncs, que no són dos conceptes excloents.

482. Euclides proporciona la suma dels termes d'una progressió geomètrica $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, en què $a_i := a_1\, r^{i-1}, i = 2, \ldots, n$, amb l'expressió següent: $\frac{a_2-a_1}{a_1} = \frac{a_n-a_1}{S_{n-1}}$. La demostració s'articula així: tenim que $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$; aleshores, *separando*, EV 17 o EVII 11, $\frac{a_2-a_1}{a_1} = \frac{a_3-a_2}{a_2} = \cdots = \frac{a_{n-1}-a_{n-2}}{a_{n-2}} = \frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}}$; i a continuació apliquem EV 12 o EVII 12, i obtenim $\frac{a_2-a_1}{a_1} = \frac{a_n-a_1}{S_{n-1}}$.

483. Per analogia amb els segments, Euclides suposa que podem fer un nombre igual a un nombre donat per endavant.

tenim que EF és a FL com LF a FK, i FK a FH.
[per substitució o EVII 17 i 18]

Per tant, *separando*, EL és a LF com LK a FK, i KH a FH. [EVII 11 i 13]

Aleshores, un dels [nombres] antecedents és a un dels consegüents com [la suma de] tots els antecedents és a [la suma de] tots els consegüents. [EVII 12]

És a dir, KH és a FH com EL, LK i KH [junts són] a LF, FK i HF [junts]. [EVII 12]

Per tant, KH és igual a CG, FH a A, i LF, FK i HF [junts] a D, BC i A [junts].

Així doncs, CG és a A com EH és a D, BC i A [junts]. [EVII 7 iterat]

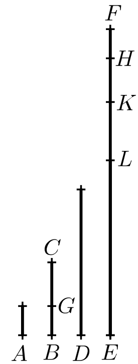


FIGURA EIX 35

En definitiva, l'excés del segon [nombre] és al primer com l'excés del darrer a [la suma de] tots els [nombres] que el precedeixen.
I això és el que volíem demostrar. ♠

EIX 36. [Teorema d'Euclides dels nombres perfectes (parells)]. *Considerem una multitud arbitrària de nombres contínuament en proporció doble,* [*començant*] *des de la unitat. Si la suma de tots els nombres n'és un de primer, el que resulta de multiplicar la suma pel darrer és perfecte.*[484]

Siguin A, B, C i D una multitud de nombres contínuament en proporció doble fins que la suma de tots [els termes junts] sigui un [nombre] primer.

Sigui E [el valor de] la suma.

Suposem que obtenim FG multiplicant E per D.

Afirmo que FG és un [nombre] perfecte.[485]

[*Demostració.*] *a*) Considerem tants nombres contínuament en proporció doble, E, HK, L i M, començant des de E, com [termes] té la multitud A, B, C i D.

484. Si el nombre $2^n - 1 := 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1}$ és un primer P, aleshores $2^{n-1} \times P = 2^{n-1} \times (2^n - 1)$ és un nombre perfecte [parell].

485. Evidentment, parell; però Euclides no fa aquesta precisió i nosaltres també l'ometem.

Aleshores, *ex æquali*, A és a D com E a M. [Evii 14]

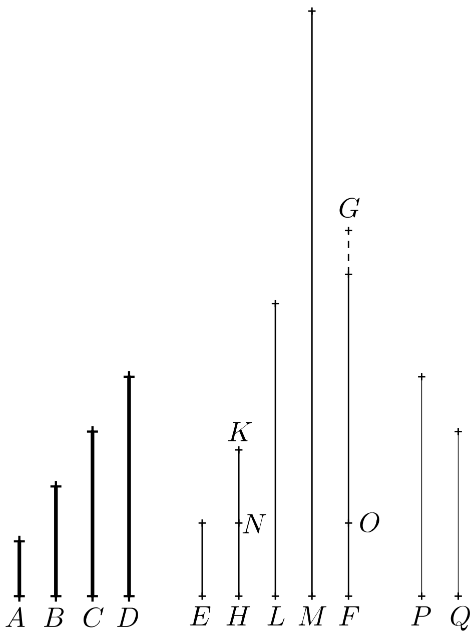


Figura Eix 36

En conseqüència, [el nombre obtingut multiplicant] E per D és igual a [l'obtingut multiplicant] A per M [Evii 19]
i[, per construcció,] FG és [el nombre obtingut multiplicant] E per D.

Per tant, FG també és [el nombre obtingut multiplicant] A per M. [Nc 1]

Així doncs, atès que obtenim FG multiplicant A per M,
resulta que M mesura FG d'acord amb les unitats de A, [Dvii 15 i 3]
i A és la díada.

Per tant, FG és el doble de M;
i M, L, HK i E són en [proporció] contínua doble.

Així doncs, E, HK, L, M i FG són en proporció contínua doble.

Ara sigui cadascun dels [nombres] HN i FO igual al primer [nombre] E,
que hem sostret del segon [nombre] HK i del darrer FG.

Aleshores, l'excés del segon nombre és al primer com l'excés del darrer a [la suma de] tots els [nombres] que el precedeixen. [EIX 35]

Per tant, NK és a E com OG a M, L, KH i E [junts]. [DVII 20]

I NK és igual a E.

I OG a M, L, HK i E [junts].

Però FO també és igual a E, i E a A, B, C, D i la unitat.

Per tant, el total FG és igual a E, HK, L, i a M, A, B, C, D i la unitat [tots junts].

I és mesurat per ells. ♠

Afirmo que FG no és mesurat per cap altre [nombre] diferent [dels nombres] A, B, C, D, E, HK, L, M i la unitat.

b) Suposem que un [altre nombre] P mesura FG[486]
—o sigui que P no és cap dels nombres A, B, C, D, E, HK, L i M—,
i que P mesura FG tantes unitats com [té el nombre] Q.

Aleshores, obtenim FG multiplicant Q per P. [DVII 15 i 3]

Però, de fet, FG també l'obtenim multiplicant E per D.

En conseqüència, E és a Q com P a D. [EVII 19]

I, atès que A, B, C i D són contínuament proporcionals, [començant] des de la unitat,
D no és mesurat per cap nombre que no sigui A, B o C. [EIX 13]

I hem suposat que P no és cap dels [nombres] A, B i C.

Per tant, P no mesura D.

Però P és a D com E a Q.

En conseqüència, E tampoc no mesura Q. [DVII 20]

A més, E és un [nombre] primer,
i cada nombre primer és primer amb cadascun dels [nombres] que no mesura. [EVII 29]

Per tant, E i Q són primers entre si.

Sabem que els [nombres] primers entre si també són els més petits [amb la mateixa raó], [EVII 21]
i que els [nombres] més petits mesuren els que tenen la mateixa raó un nombre igual de vegades,
l'antecedent l'antecedent, i el consegüent el consegüent. [EVII 20]

I que E és a Q com P a D.

486. Hipòtesi de l'absurd.

Per tant, E mesura P el mateix nombre de vegades que Q [mesura] D. [Dvii 20]

Però D no és mesurat per cap altre [nombre] llevat [dels nombres] A, B i C. [Eix 13]

Per tant, Q és un d'aquests nombres.

Posem que és igual a B.

Ara bé, B, C i D són tants com E, HK i L, començant per E, i E, HK i L tenen la mateixa raó que B, C i D.

Per tant, *ex æquali*, B és a D com E a L. [Evii 14]

Aleshores, [el nombre obtingut multiplicant] B per L és igual a [l'obtingut multiplicant] D per E. [Evii 19]

Però hem vist que D per E és igual a Q per P.

En conseqüència, [els nombres] Q per P i B per L són iguals. [Nc 1]

Aleshores, Q és a B com L a P. [Evii 19]

I Q és igual a B.

Per tant, L és el mateix [nombre] que P. [Dvii 20]

I això és impossible perquè hem suposat que P no és cap d'aquests [nombres].

En definitiva, FG no pot ser mesurat per cap nombre diferent dels [nombres] A, B, C, D, E, HK, L, M i la unitat. ♠

Però FG és la suma de A, B, C i D, i de E, HK, L, M i la unitat.

I un nombre perfecte és un [nombre] que és igual a [la suma de] les seves parts [pròpies]. [Dvii 22 i nota 206]

Així doncs, FG és un [nombre] perfecte.

I això és el que volíem demostrar.[487] ♠

---

487. La demostració la podem sintetitzar així: si $m = 2^n - 1$ és un nombre primer i fem $S = 2^{n-1}\,m$, la suma dels divisors [propis] del nombre $S = 2^{n-1}\,(2^n - 1)$ és la següent:

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1} + m\,(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-2}) =$$
$$= (1 + m)\,(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-2}) + 2^{n-1}.$$

Ara bé, $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-2} = 2^{n-1} - 1$ i $m + 1 = 2^n = 2 \times 2^{n-1}$.

Resulta, doncs, que $S = 2 \times 2^{n-1}\,(2^{n-1} - 1) = 2^{n-1}\,(2\,(2^{n-1} - 1) + 1) = 2^{n-1}(2^n - 1) = 2^{n-1}\,m$. Vegeu Nesselmann (1842), p. 163.

Teó d'Esmirna coneixia els nombres perfectes següents: $2\,(2^2 - 1) = 6$, $2^2\,(2^3 - 1) = 28$. I Nicòmac de Gerasa va explicitar que $2^4\,(2^5 - 1) = 496$, i $2^6\,(2^7 - 1) = 8.128$ són perfectes. Segons el manuscrit Codex Latino Mo-

A.2 Els segments irracionals: Ex

Comentaris. Com ja hem indicat a la pàgina 20, aquest llibre p. 20
és realment extens. Sembla que inicialment constava de tres llibres. Això explicaria els tres grups de definicions que té. Igual que els tres aritmètics, és força independent de la resta de l'obra. Solament comparteix els conceptes de «segment apòtom» i «segment menor» amb el llibre XIII. Per al lector matemàtic d'ahir i d'avui, representa una dificultat indiscutible.[488]

Llegir-lo avui en dia no només és feixuc sinó dur per causa d'un llenguatge geomètric que, com indica Fibonacci i palesa Stevin, no és el més idoni. Per aquesta raó, esmerçarem esforços explicatius en notes a peu de pàgina que el faran una mica més entenedor.[489]

---

naco, 14.908, de 1456 a 1461, Jàmblic va calcular el nombre perfecte $2^{12}(2^{13}-1) = 33.550.336$. I ja no se'n va trobar cap altre nou fins al segle XVI.

Per atényer un nombre perfecte [parell] cal, doncs, determinar els nombres primers de la forma $2^n - 1$, coneguts com a «nombres primers de Mersenne», ja que fou Marin Mersenne el primer matemàtic que se'n va plantejar l'estudi. Per conèixer aquests nombres, vegeu l'adreça electrònica <https://ca.wikipedia.org/wiki/Nombre_primer_de_Mersenne>.

L'any 1756 Leonhard Euler va demostrar que «tot nombre perfecte (parell) és de la forma descrita per Euclides».

488. A l'obra, actualment perduda, *Commento al x libro degli 'Elementi' di Euclide*, citat a *Flos*, Fibonacci «el considera "més difícil" que els llibres precedents i que algunes parts dels següents», i diu que un camí per simplificar-ne la complexitat és recórrer als nombres (Picutti (1983)). En la definició XXXI a la pàgina 38, Stevin (1585) l'anomena «la creu dels matemàtics». En aquest mateix sentit s'expressa Benedetto Castelli en una carta adreçada a Galileu, l'1 d'abril del 1607 a Favaro (1883), volum II, p. 207. Waerden (1954), p. 172, diu que «la seva lectura no és fàcil».

489. Vegeu A.2 (pàgines 210-418 i 42-46); Heath (1925), volum III, p. 1-259; Vera (1970), volum I, p. 860-917; Frajese i Maccioni (1970), p. 565-846; Kayas (1978), volum II, p. 69-166; Puertas (2008), p. 9-197; Vitrac (1998); Acerbi (2007), p. 1230-1477. Vegeu també, en línia, <http://www.opera-platonis.de/euklid/>, llibre X; i <http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pd>, p. 281-422. I un article molt succint i instructiu de Fowler (1992).

Alguns dels seus resultats s'atribueixen a Teodor de Cirene —per exemple, que la finitud o infinitud de l'algorisme d'Euclides equival a la commensurabilitat o incommensurabilitat de les magnituds—[490] i d'altres a Teetet.[491]

El llibre conté un concepte bàsic de la geometria grega a l'hora de determinar àrees i volums mitjançant proporcions: el «mètode d'exhaustió» [Ex 1], atribuït a Èudox.[492]

A més, tot i que està escrit en termes geomètrics, és aritmètic i algebraic, de vegades, relaciona les magnituds amb els nombres naturals.

p. 21

A.2$\boldsymbol{a}_1$ El primer grup de definicions (Ὅροι)

Dx 1.1. Les magnituds amidades per una mateixa mesura són *commensurables* [*en longitud*] —σύμμετρα— i les que no ho són, *incommensurables* —ἀσύμμετρα.[493]

Dx 1.2. Dos segments rectilinis són *commensurables en quadrat* —δυνάμει σύμμετροί— quan els quadrats que els tenen com a costats són mesurats per una mateixa àrea. I són *incommensurables en quadrat* quan els quadrats que els tenen com a costats no ho són.[494]

Dx 1.3. A partir de les definicions precedents, podem veure que hi ha una infinitud de segments commensurables i incommensurables amb

490. Vegeu les proposicions que van d'Ex 2 a Ex 10 (pàgines 215-227).

491. Vegeu, per exemple, la proposició Ex 9, que és un bon exemple del quadrilàter de les proposicions d'Aristòtil, descrit a Pla (2016*b*), p. 343.

492. Vegeu el desenvolupament i els continguts del llibre xii, en particular Exii 2 i Exii 5. Arquimedes s'adona de la seva naturalesa i l'estableix, com a postulat, a *De l'esfera i el cilindre*. I, a *De la quadratura de la paràbola*, afirma que matemàtics anteriors a ell ja l'havien utilitzat. Vegeu Pla (2020*b*).

493. Les magnituds $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són commensurables [en longitud], si $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = q$, en què q és un nombre racional.

494. Els segments AB i MN són commensurables en quadrat si $\frac{AB^2}{MN^2} = q$, en què q és racional; o equivalentment si $\frac{AB}{MN} = \sqrt{q}$.

un altre de determinat, només en longitud o en quadrat.[495] Aquest segment s'anomena *racional.*[496] Els segments commensurables amb el racional, en longitud i en quadrat, o només en quadrat, també s'anomenen *racionals.* I els incommensurables, *irracionals.*[497]

Dx 1.4. El quadrat de costat un segment determinat s'anomena *racional.* I també les àrees commensurables amb ell. Però les àrees incommensurables i els costats dels quadrats equivalents amb elles[498] es qualifiquen d'*irracionals.*

A.2$\boldsymbol{b}_1$ El primer grup de proposicions

p. 23

Ex 1. [Teorema d'exhaustió.][499] *Si, de la magnitud més gran de dues* [*diferents*]*, en sostraiem* [*una part*] *més gran que la* [*seva*] *meitat, del residu* [*una part*] *més gran que la* [*seva*] *meitat, i així iteradament; aconseguim una magnitud més petita que la menor de les dues.*

Considerem dues magnituds diferents AB i C, essent AB la més gran.

Afirmo que, si sostraiem de AB [una part] més gran que la [seva] meitat i [després una part] més gran que la meitat del residu,
i així iteradament;
finalment aconseguim una magnitud més petita que la magnitud C.

---

495. Precisant: commensurables en longitud —i, de retruc, en quadrat—, commensurables només en quadrat, o incommensurables en longitud i en quadrat. En veritat, enuncia una proposició.

496. De fet, diu: *segment expressable*, εὐθεῖα ῥητή.

497. L'anomena exactament així: ἄλογος.

Si la longitud del segment assignat és a, aleshores els segments racionals són de la forma $q\,a$ o $\sqrt{q}\,a$, en què $q \in \mathbb{Q}$.

498. Diu: καὶ δυνάμεναι αὐτά. Nosaltres les anomenarem *arrels quadrades.*

499. Com ja hem indicat, aquest teorema és la base del mètode d'exhaustió, indispensable al llibre XII i que s'atribueix a Èudox.

Euclides el podria haver establert al llibre V però considera que és en aquest context on cal fer-ho.

L'estableix en termes de magnituds perquè necessita que sigui vàlid tant per a superfícies com per a sòlids.

[*Demostració.*] Multiplicant [la magnitud] C [per un nombre natural adequat] aconseguim una magnitud més gran que AB. [Dv 4][500]

Sigui DE la [magnitud] múltiple obtinguda, que és més gran que AB.

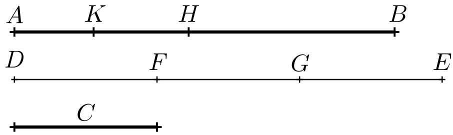


FIGURA Ex 1

Considerem les divisions DF, FG i GE, que componen DE,[501] iguals a C.

Ara considerem [la magnitud] BH, més gran que la meitat [de AB], i la sostraiem de AB.

Sigui HK [una magnitud] més gran que la meitat de la AH, de la qual la sostraiem.

Iterem el procés tantes vegades com divisions té DE.

Aleshores, [el nombre] de divisions [de la magnitud AB], AK, KH, i HB, és igual al nombre de divisions de DE, DF, FG i GE.

Atès que hem sostret EG, que és més petit que la meitat de DE, que és més gran que AB,
i que hem sostret BH, que és més gran que la [seva] meitat, de AB, resulta que el residu GD és més gran que el residu HA.[502]

I, com que hem sostret de GD, que és més gran que HA, la meitat GF,
i, de HA, HK, que és més gran que la [seva] meitat,
resulta que el residu DF és més gran que el AK.[503]

Ara bé, com que DF és igual a C, C és més gran que AK.

En conseqüència, AK és més petit que C.

500. Vegeu els comentaris que hem fet d'aquesta definició que, de fet, és un postulat. En introduir-la, Euclides tanca la demostració en un cercle viciós.

501. Les divisions ja les tenim perquè hem obtingut DE repetint C un nombre adequat de vegades. No cal, doncs, dividir DE *a posteriori*.

502. De la magnitud més gran, n'hem tret menys de la seva meitat, i de la més petita, més de la meitat. Per tant, el residu de la gran és més gran que el de la petita. Això és un porisma de Nc 4. Ara podem iterar el procés.

503. És el procés iteratiu explicitat.

Per tant, la magnitud AK, que és el que queda [finalment] de AB, és més petita que la magnitud petita donada C.

I això és el que volíem demostrar. ♠

De manera semblant, podem provar el teorema posat cas que les parts sostretes siguin meitats.[504] ♠

Ex 2. [L'antifèresi.][505] *Considerem dues magnituds diferents donades. Si, de la gran, en sostraiem repetidament la menor, i el residu no mesura mai la precedent,*[506] *aquestes magnituds són incommensurables.*[507]

Siguin AB i CD dues magnituds diferents, essent AB la més petita.

Suposem que el residu que resulta de treure, de la gran, la petita no mesura mai la gran.

Afirmo que les magnituds AB i CD són incommensurables.

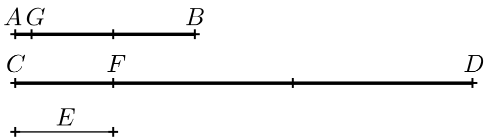


Figura Ex 2

[*Demostració.*] Si són commensurables,[508] hi ha una magnitud que les mesura. [Dx 1]

Sigui E aquesta magnitud.

I sigui CF més petit que AB, el residu de CD que queda un cop sostreta la magnitud petita AB [tantes vegades com sigui possible].

Repetim el procés amb AB i CF.[509]

Sigui AG més petita que CF, el residu de AB que queda un cop sostret el residu petit CF.

504. És a dir, la proposició és vàlida tant si sostraiem parts «més grans que la meitat» com si sostraiem «parts iguals a la meitat».

505. Caveing (1998), p. 112.

506. Exclou que la petita sigui part de la gran [Dv 1].

507. És interessant comparar Ex 2, 3 i 4 amb Evii 1, 2 i 3.

508. Hipòtesi de l'absurd.

509. De fet, suposem que el residu no mesura la [magnitud] precedent, [quan] sostraiem iteradament, de la gran, la [magnitud] petita. Aleshores, traiem la petita, de la gran, fins que obtenim un residu més petit que la petita. I iterem el procés amb la [magnitud] petita i el residu.

Iterem-lo fins a aconseguir una magnitud més petita que E. [Ex 1]

Sigui AG aquesta magnitud.

Aleshores, atès que E mesura AB i AB mesura DF,
tenim que E mesura FD [per transitivitat][510]
i la [magnitud gran] CD.

En conseqüència, [E] també mesura el residu CF. [Ev 1]

Però CF mesura BG.

Per tant, E mesura BG i AB.

En conseqüència, [E] també mesura el residu AG. [Ev 1]

Per tant, la [magnitud] més gran[, E,] mesura la més petita[, AG]. I això és impossible. ♠

En definitiva, no hi ha cap magnitud que mesuri [alhora] les magnituds AB i CD.

Per tant, les magnituds AB i CD són incommensurables. [Dx 1.1]
I això és el que volíem demostrar.[511] ♠

Ex 3. *Volem determinar la mesura comuna més gran —és a dir, la mesura màxima— de dues magnituds commensurables.*[512]

Siguin AB i CD les dues magnituds donades, essent AB la més petita.

Volem determinar la màxima mesura comuna possible de AB i CD.

Tenim una d'aquestes dues possibilitats:[513]

a) La magnitud AB mesura CD.

b) La magnitud AB no mesura CD.

[*Demostració.*] *a*) Si AB mesura CD,

---

510. Vegeu els dos ítems —transitivitat i compatibilitat— explicitats en el cas numèric (pàgina 5). En el cas de les magnituds, Euclides estableix la compatibilitat amb $\pm$ a Ev 1 que, com a porisma, implica que, si $m|\mathfrak{A}$ i $m|\mathfrak{B}$, en què $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$; $m|(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})$. Tanmateix, omet qualsevol referència a la transitivitat. Vegeu el problema 21, pàgina 75.

511. Compareu aquesta demostració amb la d'Evii 1. Són iguals però les situacions d'aquella proposició i d'aquesta són completament diferents. Allà suposàvem que el procés té una fi —la unitat. Aquí, en canvi, suposem que el procés no en té, un fet que solament té sentit, com acabem de veure, en el cas de les magnituds incommensurables.

512. De fet, com veurem tot seguit, les magnituds commensurables es comporten com si fossin nombres. Per aquesta raó, el que es demana en aquesta proposició és el màxim comú divisor d'aquests dos nombres.

513. Disjunció de casos.

AB és una mesura comuna de AB i CD ja que AB es mesura a si mateixa.[514]

I, aleshores, òbviament, AB és la màxima mesura comuna de AB i CD perquè cap magnitud més gran que AB mesura AB. ♠

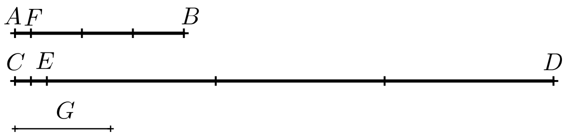


FIGURA Ex 3

b) Si AB no mesura CD,

b_1) Sostraiem la [magnitud] petita de la gran contínuament.

Aleshores, atès que AB i CD no són incommensurables,
el residu mesura la magnitud precedent. [Ex 2][515]

Quan mesurem ED amb AB, obtenim el residu EC, més petit que AB.

Quan mesurem BF amb EC, obtenim el residu AF, més petit que EC.

Però AF mesura CE.[516]

I, com que AF mesura CE,
i CE mesura FB;
AF també mesura FB [per transitivitat]
i es mesura a si mateix.[514]

Per tant, AF mesura la [magnitud] AB. [Ev 1]

Però [la magnitud] AB mesura DE.

Per tant, AF mesura ED i CE i, de retruc, CD. [Ev 1]

En definitiva, AF és una mesura comuna de AB i CD. ♠

Afirmo que és la màxima mesura comuna.

b_2) Si AF no és la màxima mesura comuna,[517]
hi ha una magnitud més gran que AF que mesura AB i CD [alhora].

Sigui G aquesta magnitud.

---

514. La vulneració de la noció comuna Nc 8′ és una qüestió interessant que val la pena posar en relleu.

515. Usa el contrarecíproc o, sense explicitar-la, la reducció a l'absurd.

516. En un terme del procés iteratiu. I comença el procés cap amunt.

517. Hipòtesi de l'absurd. I comença el procés cap avall.

Atès que G mesura AB, i que AB mesura ED;
G mesura ED [per transitivitat]
i CD.

Aleshores, G mesura el residu CE, [Ev 5]
i CE mesura FB.

Per tant, G mesura FB [per transitivitat]
i AB.

I G mesura el residu AF.

O sigui que la [magnitud] més gran [mesura] la més petita. I això és impossible.

Per tant, no hi ha cap magnitud més gran que AF que mesuri AB i CD [alhora].

En conseqüència, AF és la màxima mesura comuna de AB i CD.

♠

En definitiva, hem determinat la màxima mesura comuna de dues magnituds commensurables AB i CD.
I això és el que volíem demostrar.[518] ♠

Ex 3, porisma. *Si una magnitud n'amida dues, també n'amida la màxima mesura comuna.*

Ex 4. *Volem trobar la màxima mesura comuna de tres magnituds commensurables.*

Siguin A, B i C tres magnituds commensurables donades per endavant.

Volem trobar la seva màxima mesura comuna.

Sigui D la màxima mesura comuna de les [magnituds] A i B. [Ex 3]

Tenim dues possibilitats:

a) D mesura C.

b) D no mesura C.

[*Demostració.*] *a*) En primer lloc, suposem que D mesura C.

a_1) Aleshores, atès que D mesura C, i també A i B;
D mesura A, B i C.

Per tant, D és una mesura comuna de A, B i C. ♠

518. Compareu aquesta demostració amb la d'Evii 2. Fixem-nos que Euclides usa el doble procés: de dalt a baix i de baix a dalt.

a_2) I també és la màxima mesura comuna [de A, B i C] ja que cap no mesura més gran que D mesura A i B [alhora]. ♠

b) En segon lloc, suposem que D no mesura C.

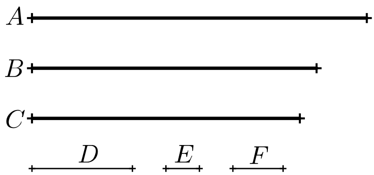


FIGURA EX 4

b_1) Afirmo que C i D són commensurables.

Sabem que A, B i C ho són.

I, com que una magnitud que mesura A, B i C és part de A i B, també ho és de la màxima mesura comuna D de A i B. [Ex 3, porisma]

Però també mesura C.

Per tant, l'esmentada magnitud mesura C i D [alhora].

En definitiva, C i D són commensurables. [Dx 1] ♠

Ara considerem la màxima mesura comuna, E, de C i D. [Ex 3]

b_2) [Afirmo que E mesura A, B i C alhora.]

Atès que E mesura D, i D mesura A i B [alhora]; E mesura A i B, i també C. [per transitivitat]

Per tant, E mesura A, B i C [alhora].

En definitiva, E és una mesura comuna de A, B i C. ♠

b_3) [Afirmo que E és la màxima mesura comuna de A, B i C].

Suposem que F és una magnitud, més gran que E,[519] que mesura A, B i C [alhora].

Atès que F mesura A, B i C, també mesura A i B i, de retruc, la màxima mesura comuna de A i B. [Ex 3, porisma]

Però D és la màxima mesura comuna de A i B.

Per tant, F mesura D i també C.

O sigui, F mesura C i D [alhora].

En conseqüència, F mesura la màxima mesura comuna E de C i D. [Ex 3, porisma]

Per tant, la [magnitud] més gran [mesura] la més petita. I això és impossible. ♠

519. Hipòtesi de l'absurd.

En definitiva, cap [magnitud] més gran que la E no mesura A, B i C[, i E mesura A, B i C].

I b_4) D o E és la màxima mesura comuna de A, B i C.[520]

$b_{4.1}$) Si D no mesura C, E és la màxima mesura comuna de A, B i C. $\spadesuit$

$b_{4.2}$) Si [D] mesura [C], la mateixa [magnitud] D [és la màxima mesura comuna]. $\spadesuit$

En definitiva, hem determinat la màxima mesura comuna de tres [magnituds] commensurables.

I això és el que volíem demostrar. $\spadesuit$

Ex 4, porisma. *Si una magnitud amida tres magnituds, també amida la seva màxima mesura comuna.*

De manera semblant, podem determinar la màxima mesura comuna de més [*de tres magnituds*]. *I, en aquest cas, també val el porisma.*

I això és el que volíem demostrar. $\spadesuit$

Ex 5. *Dues magnituds commensurables tenen entre si la raó que hi ha entre un nombre i un altre.*[521]

Siguin A i B [dues] magnituds commensurables.

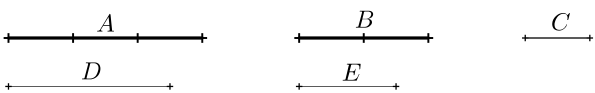


Figura Ex 5

Afirmo que la raó que hi ha entre A i B és la que hi ha entre un [cert] nombre i un [altre] nombre.

[*Demostració.*] Atès que A i B són commensurables,
hi ha una magnitud que les mesura. En diem C.

Aleshores, C mesura A i B tantes vegades com unitats hi ha a[ls nombres] D i E[, respectivament]. [Dv 1]

Atès que C mesura A d'acord amb les unitats de D
i que la unitat mesura D d'acord amb les unitats de D, [Dvii 2]

520. Disjunció de casos.

521. Per fer més clares aquesta proposició i les següents és aconsellable reescriure-les en termes de proporcions i distingir-hi les magnituds i els nombres, com ara $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{m}{n}$, en què $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són magnituds, i m i n nombres.

resulta que ho fa tantes vegades com la magnitud C mesura [la] A. [per substitució]

Així doncs, C és a A com la unitat a D. [Dv 5][522]

Aleshores, *invertendo*, A és a C com D a la unitat. [Ev 7, porisma]

De bell nou, atès que C mesura B d'acord amb les unitats de E
i que la unitat mesura E d'acord amb les pròpies unitats,
la unitat mesura E el mateix nombre de vegades que C [mesura] B. [per substitució]

Així doncs, C és a B com la unitat a E. [Evii 20][523]

I hem vist que A és a C com D a la unitat.

Aleshores, *ex æquali*, A és a B com el nombre D al E. [Ev 22][524]

En definitiva, les magnituds commensurables A i B tenen entre si la [mateixa] raó que hi ha entre els nombres D i E.

I això és el que volíem demostrar.[525] ♠

Ex 6. *Si dues magnituds tenen entre si la raó que hi ha entre dos nombres* [*naturals*], *les dues magnituds són commensurables.*[526]

Siguin A i B les dues magnituds que tenen la raó dels nombres D i E.

Afirmo que les [dues] magnituds A i B són commensurables.

[*Demostració.*] Dividim [la magnitud] A en tantes parts iguals com

522. Atribuir-ho a Dvii 20, com fan alguns autors, és una relliscada lògica perquè Dvii 20 s'aplica a quatre nombres [naturals]. Tanmateix, sí que es pot atribuir a Dv 5 acceptant, és clar, que els nombres són magnituds i que, per a certs nombres naturals, de les tres possibilitats de la definició aquí es dona la igualtat. Això qüestiona, però, el tractament independent que fa Euclides dels nombres naturals en dedicar-los tres llibres específics.

523. Vegeu la nota 514 (pàgina 217).

524. Veiem que Euclides, quan li cal, considera que els nombres naturals són magnituds.

525. Heath (1925), volum iii, p. 25, n'ofereix la interpretació en termes algebraics.

526. Aquesta proposició i les tres següents redueixen la commensurabilitat de dues magnituds al fet que la seva raó sigui igual a la raó de dos nombres naturals. En terminologia més actual, la raó entre dues magnituds commensurables és racional en el sentit clàssic del terme. I entre dues d'incommensurables, no ho és.

unitats té [el nombre] D.[527] [DVII 2]

Sigui C una d'aquestes parts.

Considerem la suma F de tantes parts iguals a C com unitats té [el nombre natural] E.[528]

Atès que D té tantes unitats com magnituds iguals a C té A, la unitat és la mateixa part de D que [la magnitud] C ho és de A. [DV 2 i DVII 3]

Per tant, C és a A com la unitat a D. [DVII 20][529]

I la unitat mesura el nombre D.

Per tant, C també mesura [la magnitud] A. [DV 5]

I, atès que C és a A com la unitat a[l nombre] D, *invertendo*, [la magnitud] A és a la C com el nombre D a la unitat. [EV 7, porisma]

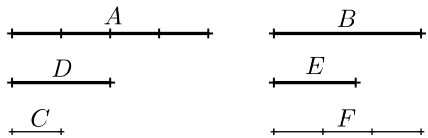


FIGURA EX 6

De bell nou, atès que E té tantes unitats com parts iguals a C té F, C és a F com la unitat a[l nombre] E. [DVII 20][529]

Però hem vist que [la magnitud] A és a C com D a la unitat.

Per tant, *ex æquali*, A és a F com D a E. [EV 22]

Però [el nombre] D és a[l nombre] E com la magnitud A a la B.

Per tant, [la magnitud] A és a la B com [A] a la F. [EV 11]

D'això en resulta que [la magnitud] A té la mateixa raó amb B que amb F.

Per tant, B és igual a F. [EV 9]

Però C mesura F i, de retruc, B. [per substitució]

I, alhora, [mesura] A.

En definitiva, [la magnitud] C mesura [les magnituds] A i B alhora.

Per tant, A i B són commensurables. [DX 1.1]

I això és el que volíem demostrar. ♠

527. Accepta que una magnitud es pot dividir en qualsevol nombre de parts iguals sense especificar com ho fa ni amb quins ginys. Recordem que amb regle i compàs no és possible dividir els angles en parts iguals. Es tracta, doncs, d'una acceptació «ideal» del fet que qualsevol magnitud es pot dividir en parts iguals.

528. Les magnituds es poden sumar, ajuntar.

529. Vegeu la nota 514 (pàgina 217).

Ex 6, porisma. *Si considerem dos nombres [naturals], com ara D i E, i un segment, com ara A; és possible aconseguir un cert segment[, per exemple F,] de manera que la raó entre A i F sigui la que hi ha entre els nombres D i E.*

I, si considerem el terme mitjà de la proporció, B, entre A i F; A és a F com el [quadrat] de costat A al de [costat] B.

És a dir, el primer és al tercer com la [figura] de costat el primer a la figura semblant, col·locada de manera semblant, de costat el segon.[530] [Evi 19, porisma]

Però [el segment] A és al F com el nombre D al E.

Per tant, també podem aconseguir que el nombre D sigui al E com la [figura] de costat [el segment] A a la [semblant] de costat [el segment] B. [Nc 1]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 7. *Dues magnituds incommensurables no tenen entre si la raó que hi ha entre dos nombres.*

Siguin A i B [dues] magnituds incommensurables.

Afirmo que A i B no tenen la raó d'un nombre i un altre.

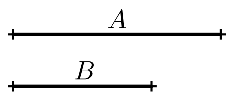


Figura Ex 7

[*Demostració.*] Si la raó entre A i B és la de dos nombres quadrats,[531]

A i B són commensurables. [Ex 6]

Però no ho són. [I això és impossible.] ♠

En definitiva, la raó entre A i B no és la raó de dos nombres.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 8. *Si dues magnituds no tenen entre si la raó que hi ha entre dos nombres, les magnituds són incommensurables.*

Siguin A i B dues magnituds que no tenen entre si la raó que hi ha entre dos nombres.

Afirmo que les magnituds A i B són incommensurables.

---

530. Ras i curt. Tenim que $\frac{A}{B} = \frac{B}{F}$. Per tant, la raó composta d'aquestes dues raons és $\frac{A}{F}$ però, alhora, pel principi de substitució, també és $\frac{A^2}{B^2}$. Per tant, [Nc 1] $\frac{A^2}{B^2} = \frac{A}{F}$.

531. Hipòtesi de l'absurd.

[*Demostració.*] Si són commensurables,[532] la raó entre A i B és la que hi ha entre dos nombres. [Ex 5]

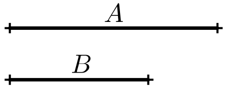


Figura Ex 8

Però aquests dos nombres no tenen aquesta mena de raó. [I això és impossible.] ♠

En definitiva, les magnituds A i B són incommensurables.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 9. a*) [Dos] quadrats de costats [segments] commensurables en longitud tenen entre si la raó que hi ha entre dos nombres quadrats.* b*) [Dos] quadrats que tenen entre si la raó que hi ha entre [dos] nombres quadrats tenen els costats commensurables en longitud.* c*) Però [dos] quadrats sobre segments incommensurables en longitud no tenen entre si la raó que hi ha entre [dos] nombres quadrats. I, finalment,* d*) dos quadrats que no tenen entre si la raó que hi ha entre [dos] nombres quadrats tenen costats [que] no [són] commensurables en longitud.*[533]

Siguin A i B [dos segments] commensurables en longitud.

a) Afirmo que la raó que hi ha entre el quadrat de costat A i el quadrat de costat B és la raó que hi ha entre un nombre quadrat i un [altre nombre] quadrat.

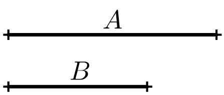


Figura Ex 9

[*Demostració.*] Atès que A i B són commensurables en longitud,

la raó entre A i B és igual a la que hi ha entre [dos] nombres. [Ex 5]

Sigui aquesta raó la de[ls nombres] C i D.

Per tant, atès que [la magnitud] A és a [la] B com [el nombre] C a[l nombre] D,

la [raó] que hi ha entre els quadrats de costats A i B és el quadrat de la que hi ha entre [els costats] A i B,

ja que les figures semblants són [entre si] com la raó al quadrat[534] dels costats corresponents. [Evi 20, porisma]

Però la raó entre el quadrat de C i el de D és el quadrat de la raó[535] entre els [nombres] C i D. [per substitució]

---

532. Hipòtesi de l'absurd.
533. Aquesta proposició s'atribueix a Teetet.
534. Recordem que això vol dir la «raó composta».
535. Vegeu la nota 512 (pàgina 216).

Hem vist que entre dos nombres quadrats hi ha una mitjana proporcional,
i que la raó entre dos quadrats és el quadrat de la que hi ha entre els costats [del primer i el segon]. [Eviii 11]

Aleshores, el quadrat de A és al de B com el quadrat del [nombre] C al de[l nombre] D.[536] [Nc 1] ♠

b) Ara suposem que el quadrat de costat A és al de [costat] B com el [nombre] quadrat de C a[l nombre] quadrat de D.

Afirmo que A i B són commensurables en longitud.

[*Demostració.*] Atès que el quadrat de [costat] A és al de [costat] B com el [nombre] quadrat de C és a[l de] D,
però que la raó entre el quadrat de [costat] A i el de [costat] B és el quadrat de la [raó] entre A i B, [Evi 20, porisma]
i la [raó] entre el [nombre] quadrat de C i el de D és igual al quadrat de la raó entre els [nombres] C i D; [Eviii 11]
resulta que A és a B com el [nombre] C al D.[537] [Nc 1]

En definitiva, les magnituds A i B són commensurables en longitud. [Ex 6] ♠

c) Siguin A i B incommensurables en longitud.

Afirmo que els quadrats de costats A i B no tenen la raó de [dos] nombres quadrats.

[*Demostració.*] Si la raó entre els quadrats de costats A i B és [igual a] la raó entre [dos] nombres quadrats,[538]
A i B són commensurables. Però no ho són. [I això és impossible.]

D'això en resulta que la raó entre els quadrats de costats A i B no és la de dos nombres quadrats. ♠

---

536. Enlloc no ha establert que, si $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, aleshores $\frac{m^2}{n^2} = \frac{p^2}{q^2}$. De fet, això i el recíproc són una conseqüència del «principi de les raons compostes respectives de dues raons respecte de la relació de desigualtat de les raons que es componen», cosa força natural i que valdria tant per a raons numèriques com per a magnituds. És a dir, si $\frac{m_1}{n_1} > \frac{p_1}{q_1}$ i $\frac{m_2}{n_2} > \frac{p_2}{q_2}$, aleshores $\frac{m_1}{n_1} \times \frac{m_2}{n_2} > \frac{p_1}{q_1} \times \frac{p_2}{q_2}$.

537. Enlloc no ha establert tampoc el recíproc de la nota 536. És a dir, si $\frac{m^2}{n^2} = \frac{p^2}{q^2}$, aleshores $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

538. Hipòtesi de l'absurd.

d) Suposem que el quadrat de [costat] A no té amb el de [costat] B la raó de dos nombres quadrats.

Afirmo que [els segments] A i B són incommensurables en longitud.

Si A i B són commensurables [en longitud],[539]
el quadrat de [costat] A té amb el de [costat] B la raó que un nombre quadrat té amb un altre. Però no la té. [I això és impossible.]

En definitiva, A i B no són commensurables en longitud. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 9, porisma. [*Dos segments*] *commensurables en longitud* [*ho són*] *també en quadrat. Però, en canvi,* [*dos segments*] *commensurables en quadrat no sempre ho són en longitud.* ♠

Ex 9, lema. En els llibres aritmètics hem vist que els nombres plans semblants [Dvii 22]
són entre si com un nombre quadrat a un altre. [Eviii 26]

[*Recíprocament.*] *Si dos nombres tenen entre si la raó que hi ha entre un nombre quadrat i un altre, aquests nombres són plans semblants.* [Eviii 26, recíproc]

I d'aquestes proposicions es dedueix que els nombres plans que no són semblants, és a dir, els costats dels quals no són proporcionals, no tenen la raó que un nombre quadrat té amb un altre.

Perquè, si tinguessin la raó que hi ha entre dos nombres quadrats, serien nombres plans semblants. I això és impossible.

En definitiva, dos nombres plans que no són semblants no tenen la raó de dos nombres quadrats. ♠[540]

---

539. Hipòtesi de l'absurd.

540. Recordem que dos nombres plans semblants són nombres que s'expressen en la forma $pm \times pn$ i $qm \times qn$ o, dit d'una altra manera, $m\,n\,p^2$ i $m\,n\,q^2$. I, òbviament, la raó d'aquests nombres és la que hi ha entre p^2 i q^2 [Ev 15], en què s'aplica als nombres una proposició establerta per a magnituds.

El recíproc d'aquesta proposició, és a dir, que «si dos nombres tenen entre si la raó que hi ha entre dos nombres quadrats, són plans semblants», no l'estableix als llibres aritmètics. És el recíproc d'Eviii 26, i l'ha emprat

Ex 10. *Volem determinar dos segments incommensurables amb un segment donat; un, incommensurable només en longitud i l'altre, incommensurable en quadrat i en longitud.*[541]

Sigui A el segment donat.

Volem determinar dos segments incommensurables amb A, un només en longitud i l'altre també en quadrat.

[*Construcció i demostració.*] Considerem dos nombres, B i C, que no tenen entre si la raó que hi ha entre un [nombre] quadrat i un altre,

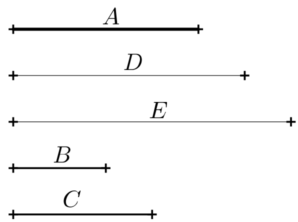


Figura Ex 10

és a dir, que no són semblants a [nombres] plans.

a) Imaginem que B és a C com el quadrat de costat A al quadrat de costat D,

tal com hem après a fer-ho. [Ex 6, porisma]

Aleshores, el quadrat de [costat] A és commensurable amb el de costat D. [Ex 6]

Atès que B no té amb C la raó que hi ha entre un nombre quadrat i un altre,

el quadrat de [costat] A no té amb el de costat D la raó que un [nombre] quadrat té amb un altre.

Per tant, [la magnitud] A és incommensurable en longitud amb D.

[Ex 9] ♠ ♣

b) Considerem el [segment] E mitjana proporcional dels [segments] A i D. [Evi 13]

---

a Eix 10. Serà Heró qui en donarà una demostració. Vegeu la nota a Eviii 27, a Heath (1925), volum 2, p. 383.

Heiberg, tanmateix, exposa les raons que sustenten que aquest lema és una interpolació. En particular, fa referència a la proposició següent Ex 10, i mostra les raons per les quals es fa difícil acceptar que el lema sigui genuí.

541. És un problema i, de retruc, un teorema d'existència. Complementa Dx 1.3 mostrant, de manera efectiva, com trobar-los. Esdevé, doncs, un resultat constructiu, propi de la manera de fer grega. Tanmateix, segons Heiberg, es tracta d'una proposició afegida a l'original euclidià.

Aleshores, A és a D com el quadrat de costat A al de costat E, [Dv 9]

i A és incommensurable en longitud amb D.

Aleshores, el quadrat de costat A també és incommensurable amb el de costat E. [Dx 1.2]

Per tant, [la magnitud] A és incommensurable en quadrat amb [la magnitud] E. [Ex 11][542] ♠ ♣

En definitiva, hem determinat dos segments, D i E, incommensurables amb el segment donat A,
un, D, només en longitud,
i l'altre, E, en quadrat i, clarament, també en longitud.
[I això és el que volíem demostrar.] ♠[543]

Ex 11. *Considerem quatre magnituds proporcionals.* a*) Si la primera és commensurable amb la segona, la tercera també ho és amb la quarta. I* b*) si la primera és incommensurable amb la segona, la tercera també ho és amb la quarta.*[544]

Siguin A, B, C i D quatre magnituds proporcionals.

Això vol dir que A és a B com C a D.

a) Suposem que A és commensurable amb B.

Afirmo que C també ho és amb D.

[*Demostració.*] Atès que A és commensurable amb B, [Ex 5]

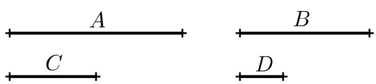


Figura Ex 11

542. Aquesta afirmació depèn d'Ex 11. S'altera, doncs, la lògica deductiva. Vegeu la nota següent.

543. Hi ha raons per pensar que aquesta proposició no és genuïna.

Una l'hem indicat a la nota precedent.

L'altra és l'ús de l'expressió grega ἐμάθομεν γάρ —'tal com hem après a fer-ho'—, que no és pròpia de l'estil euclidià dels *Elements*, si bé és cert que la trobem, en clara referència als *Elements*, a la *Secció del Cànon*. Vegeu la nota anterior.

I, a més, en el manuscrit trobat a la Biblioteca Vaticana l'any 1808 i estudiat per Peyrard, la proposició Ex 11 apareix amb la xifra 10. Això ens diu que Ex 10 no tenia assignat cap número. Vegeu Heiberg (1883-1888), volum iii, p. 18.

544. La proporcionalitat respecta el caràcter commensurable o incommensurable de les magnituds.

A té amb B la raó que hi ha entre un nombre i un altre [nombre].

I A és a B com C a D.

Per tant, la raó que hi ha entre C i D és la que hi ha entre un nombre i un altre. [Nc 1]

En conseqüència, C és commensurable amb D. [Ex 6] ♣

b) Sigui A incommensurable amb B.

Afirmo que C també ho és amb D.

Atès que A és incommensurable amb B,
entre A i B no hi ha la raó que hi ha entre un nombre i un altre. [Ex 7]

Però A és a B com C a D.

Per tant, entre C i D no hi ha la raó que hi ha entre un nombre i un altre.[545]

En definitiva, C és incommensurable amb D. [Ex 8] ♣

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 12. *Les* [*magnituds*] *que són commensurables amb una mateixa magnitud també ho són entre si.*[546]

Siguin A i B [dues magnituds] commensurables amb [la magnitud] C.

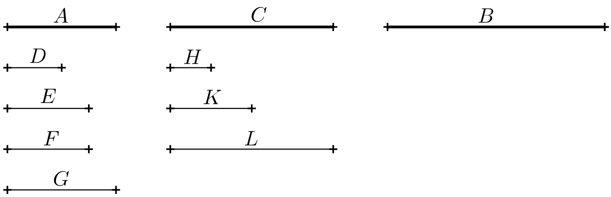


FIGURA Ex 12

Afirmo que [les magnituds] A i B són commensurables entre si.

[*Demostració.*] Atès que [les magnituds] A i C són commensurables,
la raó entre A i C és la que hi ha entre un nombre i un altre, [Ex 5]
concretament, la raó entre [el nombre] D i [el nombre] E.

De bell nou, atès que [les magnituds] C i B són commensurables,
la raó entre C i B és la que hi ha entre un nombre i un altre. [Ex 5]

Concretament, la raó entre [el nombre] F i [el nombre] G.

545. Per reducció a l'absurd i Nc 1.

546. La commensurabilitat és transitiva.

I, per a raons donades arbitràries, com ara la que hi ha entre D i E, i F i G,[547]
considerem els nombres H, K i L en proporció contínua amb les raons donades. [EVIII 4]

Per tant, D és a E com H a K, i F a G com K a L.

I, com que A és a C com D a E, i D és a E com H a K;
tenim que A és a C com H a K. [EV11][548]

I, de bell nou, com que C és a B com F a G,
i F és a G [com] K a L;
tenim que C és a B com K a L. [EV 11]

En conseqüència, A és a C com H a K[, i C és a B com K a L].

Ex æquali, A és a B com H a L. [EV 22]

En definitiva, la raó entre [les magnituds] A i B és la que hi ha entre els nombres H i L.

Per tant, A és commensurable amb B. [EX 6]
I això és el que volíem demostrar. ♠

EX 13. *Si una de dues magnituds commensurables és incommensurable amb una tercera, l'altra també ho és.*[549]

Siguin A i B dues magnituds commensurables.

Suposem que una, per exemple A, és incommensurable amb una tercera C.

Afirmo que l'altra, B, també ho és amb C.

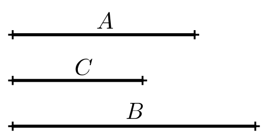


FIGURA EX 13

[*Demostració*.] Si [les magnituds] B i C són commensurables,[550]
A i B, i A i C, també. [EX 12]

Però [la magnitud] A és [alhora] incommensurable amb la C. I això és impossible. ♠

547. Fixem-nos que treballem amb raons numèriques, ja que D, E, F i G són nombres.

548. Fixem-nos que usa propietats establertes al llibre V entre parelles de dues menes: magnituds i nombres. Per tant, considera que els nombres també són magnituds.

549. La commensurabilitat respecta la incommensurabilitat o, dit amb unes altres paraules, la incommensurabilitat és compatible amb la commensurabilitat.

550. Hipòtesi de l'absurd.

Per tant, [les magnituds] B i C no són commensurables.
I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 13, lema. *Donats dos segments diferents, volem determinar en quina superfície quadrada el quadrat de costat [el segment] gran excedeix el quadrat de costat el segment petit.*[551]

Siguin AB i C dos segments desiguals donats, i AB el més gran.

Volem determinar el costat del quadrat que és l'excés del quadrat de costat [el segment gran] AB sobre el de [costat el segment petit] C.

[*Construcció.*] *a*) Considerem el semicercle $\frown ADB$ de diàmetre AB. [P 2]

Sigui AD [una corda] igual a C [amb un cap en un extrem del diàmetre]. [EIV 1]

Unim DB. [P 1] ♣

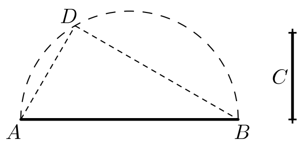


FIGURA Ex 13, lema

[*Demostració.*] L'angle $\widehat{ADB}$ és recte. [EIII 31]

I l'excés del quadrat de costat AB sobre el de costat AD —és a dir, el de costat C— és el de [costat] DB. [EI 47] ♠

b) De manera semblant, podem determinar el costat d'un quadrat equivalent a [la suma de] dos quadrats de costats donats.[552]

[*Construcció.*] Siguin AD i DB els dos segments donats.

Volem determinar el costat [del quadrat equivalent als de costats AD i DB].[553]

Els col·loquem en angle recte,
[és a dir,] fem que [els segments] AD i DB siguin perpendiculars.[554]

Unim AB. [P 1][555] ♣

551. Si α i β són dos segments, amb $\alpha > \beta$, volem determinar un segment γ, de manera que $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. O sigui, determinar el segment $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$. Aquest fet el podia haver establert al llibre I. Vegeu l'ítem *b*.

552. De fet, aquesta construcció deriva immediatament d'EI 48.

553. L'*arrel quadrada*: δυναμήνε αὐτάς.

554. Dos segments perpendiculars iguals a aquests [EI 2 o EI 3, i EI 11].

555. Donats dos segments α i β determinem un segment $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

[*Demostració.*] De bell nou, és clar que AB és el costat d'[un quadrat equivalent a] la suma dels quadrats de [costats] AD i DB. [E1 47]
I això és el que volíem demostrar. ♠[556]

Ex 14. *Considerem quatre segments proporcionals.* a*) Si l'excés del quadrat de costat el primer [segment] sobre el de [costat] el segon és un quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud] amb el primer,*[557] *aleshores l'excés del quadrat de costat el tercer [segment] sobre el de [costat] el quart és un quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud] amb el tercer.* b*) Si l'excés del quadrat de costat el primer sobre el de [costat] el segon és un quadrat de costat [un segment] incommensurable [en longitud] amb el primer, aleshores l'excés del quadrat de costat el tercer sobre el quadrat de [costat] el quart és el quadrat de costat [un segment] incommensurable [en longitud] amb el tercer.*

Siguin A, B, C i D quatre segments proporcionals,
cosa que vol dir que A sigui a B com C a D.

Suposem que l'excés del quadrat de costat A sobre el de [costat] B és el quadrat de [costat] E
i que el de C sobre el de D és el quadrat de [costat] F.

Afirmo que es dona una d'aquestes dues possibilitats:[558]

a) A és commensurable [en longitud] amb E, i C ho és amb F.
b) A és incommensurable [en longitud] amb E, i C ho és amb F.

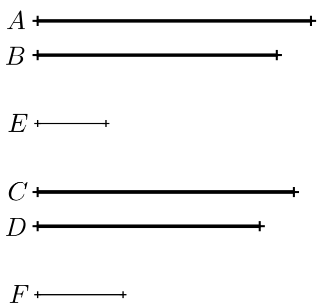


Figura Ex 14

[*Demostració.*] *a*) i *b*) Atès que A és a B com C a D,
el [quadrat] de [costat] A és al de [costat] B com el de [costat] C al de [costat] D. [Evi 22]

556. Aquesta proposició es podria haver establert al llibre i.
557. El text diu ἑαυτῇ, 'amb si mateix', que en provoca la lectura ambigua.
558. Disjunció de casos.

Però la suma dels quadrats de [costats] E i B equival al quadrat de [costat] A,
i la de[ls quadrats de costats] D i F ho és al de [costat] C.

Aleshores, la suma dels [quadrats] de [costats] E i B és al [quadrat] de [costat] B com la dels quadrats de [costats] D i F al de [costat] D. [Ev 7, iterat]

Separando, el quadrat de [costat] E és al de [costat] B com el de [costat] F al de [costat] D. [Ev 17]

Aleshores, tenim que E és a B com F a D. [Evi 22]

I, *invertendo*, B és a E com D a F. [Ev 7, porisma]

Però A és a B com C a D.

Per tant, *ex æquali*, A és a E com C a F. [Ev 22]

De tot això en resulta un d'aquests dos fets excloents:

a) A i C són commensurables [en longitud] amb E i F.

b) A i C són incommensurables [en longitud] amb E i F. [Ex 11]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 15. a) *Si ajuntem dues magnituds commensurables, el total és commensurable amb cadascuna.* b) *Si el total és commensurable amb una* [*d'elles*], *aquesta magnitud també ho és amb l'altra.*

Siguin AB i BC les dues magnituds commensurables.

Les ajuntem.

Afirmo que la [magnitud] total AC també és commensurable amb cadascuna de [les magnituds] AB i BC.

[*Demostració.*] *a*) Atès que AB i BC són commensurables,
hi ha una magnitud que les mesura. [Dx 1.1]

Sigui D aquesta mesura comuna.

Aleshores, atès que D mesura AB i BC,

Figura Ex 15

també mesura el total AC i cadascuna de les parts AB i BC.[559]

Per tant, D mesura AB, BC i AC.

En definitiva, AC és commensurable amb cadascuna de les parts AB i BC. [Dx 1.1] ♠

559. Òbviament, la mesura comuna D de AB i BC també ho és de AC. Es tracta de la compatibilitat de la divisibilitat amb la suma.

b) Suposem que AC és commensurable amb AB.

Afirmo que AB i BC també són commensurables.

Atès que AC i AB són commensurables,
hi ha una magnitud que les mesura.

Sigui D aquesta mesura comuna.

Aleshores, com que D mesura CA i AB [alhora],
també mesura el residu BC[560] i AB.

Per tant, D mesura AB i BC [alhora].

En definitiva, AB i BC són commensurables. [Dx 1.1] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠[561]

Ex 16. a*) Si ajuntem dues magnituds incommensurables, la* [*magnitud*] *total és incommensurable amb cadascuna.* b*) Si el total és incommensurable amb una, aquesta magnitud també ho és* [*amb l'altra*].

Suposem que hem ajuntat [les dues magnituds] AB i BC.

Afirmo que la [magnitud] total AC és incommensurable amb cadascuna, AB i BC.

[*Demostració.*] *a*) Si CA i AB no són incommensurables,[562]
hi ha una magnitud que les mesura.

Sigui D aquesta magnitud.

Aleshores, atès que D mesura CA i AB,
també mesura el residu BC[560] i AB.

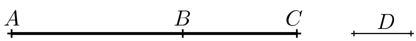


Figura Ex 16

Per tant, D mesura AB i BC [alhora].

En conseqüència, [les magnituds] AB i BC són commensurables. [Dx 1.1]

Però, com que són incommensurables, això és impossible. ♠

No hi ha, doncs, cap magnitud que mesuri CA i AB [alhora].

Per tant, CA i AB són incommensurables. [Dx 1.1] ♠

560. Òbviament, la mesura comuna D de AC i AB també ho és de BC. Es tracta de la compatibilitat de la divisibilitat amb la diferència.

561. Euclides ha considerat, doncs, que, si una magnitud en mesura dues, tant mesura la seva addició, unió o suma, com la seva diferència. Vegeu, en el cas dels nombres, la compatibilitat (pàgina 5).

562. Hipòtesi de l'absurd.

De manera semblant, podem veure que AC i CB també ho són.

Per tant, AC és incommensurable amb cadascuna [de les magnituds] AB i BC. [Ex 1] ♠

b) Suposem que AC és incommensurable amb una de les magnituds AB i BC.

En primer lloc, [suposem] que ho és amb AB.

Afirmo que AB i BC són incommensurables.

Si són commensurables,[563]
hi ha una magnitud que les mesura. [Dx 1.1]

L'anomenem D.

Aleshores, com que D mesura AB i BC [alhora],
també mesura el total AC i [la part] AB.[564]

Per tant, D mesura CA i AB [alhora].

Per tant, CA i AB són commensurables. [Dx 1.1]
I això és impossible.

En definitiva, cap magnitud mesura AB i BC [alhora].

Per tant, AB i BC són incommensurables. [Dx 1.1][565] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 17, lema. *Si, a un segment, hi apliquem per defecte un paral·lelogram*[566] *al qual manca un quadrat, aquest* [*paral·lelogram*] *equival al rectangle de* [*costats*] *les parts que hi determina.*

Siguin AB el segment $\varparallelogram AD$[, el paral·lelogram,] i $\square DB$ el quadrat.

Afirmo que AD equival al rectangle de [costats] AC i CB.

[*Demostració.*] És evident.[567]

Atès que $\square DB$ és un quadrat,

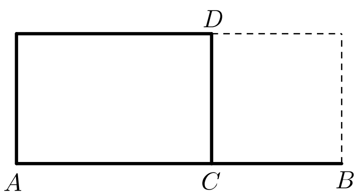


FIGURA Ex 17, lema

563. Hipòtesi de l'absurd.

564. Vegeu la nota 561 (pàgina 234).

565. Euclides no considera l'altre cas, que té una demostració absolutament anàloga a la que acaba de fer.

566. Aquest lema solament l'aplica a rectangles. Pel que fa referència a l'«aplicació d'àrees», vegeu PLA (2016*b*), p. 140, 149 i 432, i PLA (2018), índex de termes.

567. Diu textualment: Καί ἐστιν αὐτόθεν φανερόν.

els segments DC i CB són iguals, [DI 22]
i $\square AD$ és el rectangle de [costats] AC i CD
—que és el mateix que dir: «de costats AC i CB».[568]
I això és el que volíem demostrar. ♠

EX 17. a) *Considerem dos segments diferents i un [rectangle] equivalent a la quarta part del quadrat de [costat] el [segment] més curt. Apliquem per defecte aquest rectangle al segment llarg fent que hi manqui un quadrat. El divideix en [dues parts] commensurables en longitud. L'excés del quadrat de costat [el segment] llarg sobre el de costat el curt és el quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud] amb el [segment] llarg.* b) *Si l'excés del quadrat de costat el [segment] llarg sobre el de costat el curt és el quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud] amb el llarg, i un [rectangle] equivalent a la quarta [part] del quadrat de [costat] el [segment] curt és aplicat per defecte al segment llarg fent que hi manqui un quadrat; el rectangle divideix aquest segment en [parts] commensurables en longitud.*[569]

Siguin A i BC dos segments diferents, i BC el més llarg.

Considerem un rectangle equivalent a la quarta part del quadrat de [costat] el [segment] curt A,
és a dir, equivalent al quadrat de [costat] la meitat de A[570]
aplicat per defecte a[l segment] BC fent que hi manqui un quadrat;
i un altre de [costats] BD i DC. [EX 17, lema]

Suposem que BD és commensurable en longitud amb DC.

Afirmo que l'excés del quadrat de costat BC sobre el de [costat] A és el quadrat de costat commensurable [en longitud] amb BC.

[*Demostració.*] *a*) Dimidiem [el segment] BC pel punt E. [EI 10]
Fem EF igual a DE. [EI 3]

568. Vegeu el problema 52, ítem f_{4i}, PLA (2016*b*), p. 67.

569. Aquesta proposició estableix, en termes geomètrics, la commensurabilitat de les dues arrels d'una equació de segon grau depenent de la commensurabilitat de la seva suma i del «discriminant», i recíprocament. En concret, considerem l'equació quadràtica $a\,X - X^2 = \frac{b^2}{4}$. Les arrels x_1 i $a - x_1$ són commensurables si, i només si, a i $\sqrt{a^2 - b^2}$ ho són.

570. És un porisma d'EII 4.

Aleshores, el residu DC equival a BF. [Nc 2]

Atès que el punt E dimidia el segment BC
i que el D el divideix en [dues] parts diferents,
el rectangle de costats BD i DC més el quadrat de costat ED equival al quadrat de costat EC. [EII 5]

I [això mateix] val també per als quàdruples.[571]

Aleshores, quatre vegades el rectangle de [costats] BD i DC
més el quàdruple del quadrat de [costat] DE equival a quatre vegades el quadrat de [costat] EC.

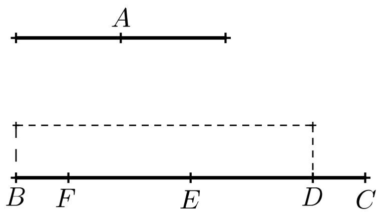


FIGURA EX 17

Però el quadrat de costat A equival al quàdruple del rectangle de [costats] BD i DC,
el de costat DF al quàdruple del de [costat] DE ja que DF és el doble de DE, [EII 4]
i el de costat BC al quàdruple del de [costat EC] ja que BC és el doble de CE. [EII 4]

Aleshores, la suma dels quadrats de [costats] A i DF equival al quadrat de [costat] BC. [Nc 2, iterat]

Per tant, l'excés del quadrat de [costat] BC sobre el de [costat] A és el de [costat] DF.

És a dir, DF és l'excés en quadrat de BC sobre A. ♠

També podem veure que BC és commensurable [en longitud] amb DF.

Atès que BD és commensurable en longitud amb DC,
BC també ho és. [Ex 15]

Però CD ho és amb CD més BF
ja que CD és igual a BF. [Ex 6]

Aleshores, BC també és commensurable en longitud amb BF més CD. [Ex 12]

Per tant, BC també ho és amb el residu FD. [Ex 15]

I l'excés del quadrat de costat BC sobre el de [costat] A és el quadrat de costat commensurable [en longitud] amb BC.

571. És un porisma immediat de Nc 2.

Per tant, el quadrat de [costat] BC és més gran que el de [costat] A el de [costat] un segment commensurable [en longitud] amb BC.

♠

b) Considerem un rectangle equivalent a una quarta [part] del de [costat] A aplicat per defecte al segment BC fent que hi manqui un quadrat.

Suposem que aquest rectangle té els [costats] BD i DC.

Volem demostrar que BD és commensurable en longitud amb DC.

De manera anàloga i amb la mateixa construcció, podem observar que l'excés del quadrat de [costat] BC sobre el de [costat] A és el de [costat] FD.

Però l'excés del quadrat de costat BC sobre el de [costat] A és el quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud amb BC].

Aleshores, BC és commensurable en longitud amb FD.

Per tant, BC també ho és amb la suma de BF i DC. [Ex 15]

Però la suma de BF i DC ho és amb DC. [Ex 6]

Per tant, BC també ho és amb CD. [Ex 12]

Aleshores, *separando*, BD també és commensurable en longitud amb DC. [Ex 15] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 18. *Considerem dos segments desiguals i un* [*rectangle*] *equivalent a la quarta part del* [*quadrat*] *de costat el* [*segment*] *curt aplicat per defecte al* [*segment*] *llarg fent que hi manqui un quadrat. El dividim en dues parts incommensurables* [*en longitud*]. a*) L'excés del quadrat de costat el* [*segment*] *llarg sobre el de costat el curt és el* [*quadrat*] *de costat* [*un segment*] *incommensurable* [*en longitud*] *amb el llarg.* b*) Si l'excés del quadrat de costat el* [*segment*] *llarg sobre el de costat el curt és el quadrat de costat* [*un segment*] *incommensurable* [*en longitud*] *amb el llarg, i també és un* [*rectangle*] *equivalent a la quarta part del quadrat de* [*costat*] *el* [*segment*] *curt aplicat per defecte al* [*segment*] *llarg fent que hi manqui un quadrat;* [*el segment*] *queda dividit en* [*parts que són*] *incommensurables* [*en longitud*].[572]

572. En termes geomètrics, aquesta proposició estableix la incommensurabilitat de les dues arrels d'una equació de segon grau depenent de la incommensurabilitat de la seva suma i del «discriminant», i recíproca-

Siguin A i BC dos segments diferents, i BC el més llarg.

Considerem un rectangle equivalent a la quarta part del quadrat de [costat] el [segment] curt A, aplicat per defecte al [segment] BC fent que hi manqui un quadrat.

Considerem el rectangle de costats BD i DC. [Ex, lema]

Sigui BD incommensurable en longitud amb DC.

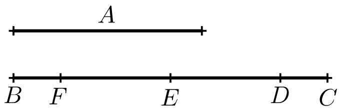


FIGURA Ex 18

Afirmo que l'excés del quadrat de costat BC sobre el de [costat] A és el quadrat de costat un segment incommensurable [en longitud] amb BC.

[*Demostració.*] *a*) Amb la mateixa construcció que hem fet en la proposició anterior, podem veure que l'excés del quadrat de costat BC sobre el de [costat] A és el quadrat de [costat] FD.

Volem demostrar que BC és incommensurable en longitud amb DF.

Atès que BD és incommensurable en longitud amb DC,
BC també ho és amb CD. [Ex 16]

Però DC és commensurable [en longitud] amb la suma de BF i DC. [Ex 6]

Per tant, BC és incommensurable [en longitud] amb la suma de BF i DC. [Ex 13]

De retruc, BC també ho és amb el residu FD. [Ex 16]

I l'excés del quadrat de costat BC sobre el de [costat] A és el quadrat de [costat] FD.

Per tant, l'excés del quadrat de costat BC sobre el de [costat] A és un quadrat de costat [un segment] incommensurable [en longitud] amb BC. ♠

b) Ara l'excés del quadrat de costat BC sobre el de [costat] A és el de costat un segment incommensurable [en longitud] amb BC.

---

ment. En concret, considerem l'equació quadràtica $a\,X - X^2 = \frac{b^2}{4}$. Les arrels x_1 i $a - x_1$ són commensurables si, i només si, a i $\sqrt{a^2 - b^2}$ són commensurables. Aquesta proposició i l'anterior venen a dir: en el sistema $x + y = a, x\,y = \frac{b^2}{4}$, x i y són incommensurables en longitud si, i només si, a i $\sqrt{a^2 - b^2}$ ho són.

Apliquem per defecte un rectangle equivalent a la quarta part del quadrat de costat A al segment BC fent que hi manqui un quadrat.

Suposem que aquest rectangle és el de [costats] BD i DC.

Volem demostrar que BD és incommensurable en longitud amb DC.

De manera semblant i amb la mateixa construcció, podem observar que l'excés del quadrat de costat BC sobre el de [costat] A és el quadrat de costat FD.

Però l'excés del quadrat de costat BC sobre el de [costat] A és el de costat un segment incommensurable [en longitud] amb BC.

Aleshores, BC és incommensurable en longitud amb FD.

Per tant, BC també ho és amb el residu BF i DC junts. [Ex 16]

Però la suma de BF i DC és commensurable en longitud amb DC. [Ex 6]

Aleshores, BC també és incommensurable en longitud amb DC. [Ex 13]

Per tant, *separando*, BD també ho és. [Ex 16] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 19, lema. *Els segments commensurables en longitud també ho són en quadrat, mentre que els que ho són en quadrat no ho són sempre en longitud, és a dir, poden ser commensurables o incommensurables en longitud. Per tant, si un segment és commensurable en longitud amb un de racional, diem que és «racional i commensurable* [*amb ell*] *no tan sols en longitud sinó també en quadrat» perquè, com hem vist, els segments commensurables en longitud ho són també, en tots els casos, en quadrat. Ara bé, en el cas que* [*el segment*] *és incommensurable en quadrat* [*amb un de racional*], a*) si també ho és en longitud, diem que és «racional i commensurable en longitud i en quadrat» amb ell; però* b*) si no ho és en longitud, diem que és «racional però commensurable solament en quadrat».*

Ex 19. *El rectangle de costats dos segments racionals*[573] *commensurables en longitud és racional.*

573. Euclides usa l'expressió ῥητός o ῥήτῶς, que significa 'expressable racionalment' i que hem abreujat amb el terme *racional*.

Considerem el rectangle ▭ AC de costats racionals AB i BC commensurables en longitud.

Afirmo que ▭ AC és racional. [Dx 1.4]

[*Demostració.*] Considerem el quadrat $\square\, AD$ de costat AB. [Ei 46]

Aleshores, $\square\, AD$ és racional. [Dx 1.4]

I, atès que AB és commensurable en longitud amb BC
i AB és igual a BD; [Di 22]
BD és commensurable en longitud amb BC.[574]

A més, BD és a BC com DA a AC. [Evi 1]

Per tant, DA és commensurable amb AC, [Ex 11]
i DA és racional.

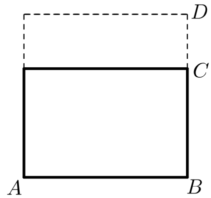


Figura Ex 19

En definitiva, AC també és racional. [Dx 1.4]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 20. *Si apliquem una [àrea] racional a un [segment] racional, [l'aplicació] produeix una amplada igual a un [segment] racional commensurable en longitud amb el [segment] al qual s'aplica [el rectangle].*

Sigui ▭ AC una [àrea] racional aplicada al [segment] racional AB.

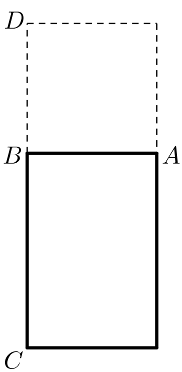


Figura Ex 20

Aquest rectangle produeix l'amplada BC.

Afirmo que [el segment] BC és racional i commensurable en longitud amb BA.

[*Demostració.*] Considerem el quadrat $\square\, AD$ de costat AB. [Ei 46]

Per tant, [el quadrat] $\square\, AD$ i [el rectangle] ▭ AC són racionals, òbviament. [Dx 1.4]

En conseqüència, [les figures] $\square\, AD$ i ▭ AC són commensurables, [Dx 1.4]
i $\square\, AD$ és a ▭ AC com DB a BC. [Evi 1]

Per tant, [els segments] DB i BC són commensurables [en longitud]. [Ex 11]

A més, [els segments] DB i BA són iguals.

574. És un porisma d'Ex 12.

Aleshores, [els segments] AB i BC també són commensurables [en longitud], [Ev 7]
i AB és racional.

Així doncs, [el segment] BC és racional i commensurable en longitud amb el AB. [Dx 1.3]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 21.[575] *El rectangle de costats racionals commensurables només en quadrat és irracional, i la* [*seva*] *arrel quadrada també ho és i s'anomena* medial.[576]

Sigui ▭ AC el rectangle de costats els segments racionals AB i BC, [que són] commensurables només en quadrat.

Afirmo que ▭ AC és irracional
i que la seva arrel quadrada també ho és.

Aquest segment [AC] l'anomenem *medial*.

[*Demostració.*] Considerem el quadrat $\square\, AD$ de costat AB, [Ei 46]
que és racional. [Dx 1.4]

Atès que [el segment] AB és incommensurable en longitud amb el BC

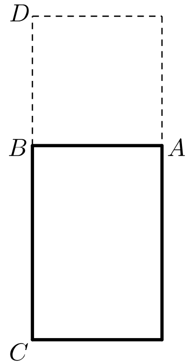


Figura Ex 21

perquè hem suposat que només són commensurables en quadrat,
i que [els segments] AB i BD són iguals,
resulta que DB també és incommensurable en longitud amb BC. [Ev 7 i Dx 1.3]

Però DB és a BC com $\square\, AD$ a ▭ AC. [Evi 1]

Aleshores, $\square\, DA$ és incommensurable amb ▭ AC, [Ex 11]
i $\square\, DA$ és racional.

Per tant, AC és irracional. [Dx 1.4]

575. Marchini (2006), p. 151.

576. Un segment *medial* rep aquest nom —μέση— perquè és la mitjana proporcional entre dos segments racionals commensurables en potència. Així doncs, si aquests segments són a i $a\sqrt{b}$, la medial és $\sqrt{a^2\sqrt{b}} = a\sqrt[4]{b}$, atès que $\frac{a}{a\sqrt[4]{b}} = \frac{a\sqrt[4]{b}}{a\sqrt{b}}$ i $a^2\sqrt{b}$ és incommensurable amb a^2 ja que $\frac{a}{a\sqrt{b}} = \frac{a^2}{a^2\sqrt{b}}$. I, per tant, els segments són irracionals.

La seva arrel quadrada,[577] que s'anomena *medial*,
també ho és. [Dx 1.4]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 22, lema. *La raó de dos segments és igual a la raó que hi ha entre el quadrat del primer i el rectangle que els té com a costats.*[578]

Siguin FE i EG dos segments.

Afirmo que FE és a EG com el quadrat de [costat] FE al rectangle de [costats] FE i EG.

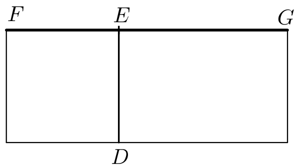


Figura Ex 22, lema

[*Demostració.*] Considerem el quadrat □ DF de costat FE i el completem. [P 5]

Obtenim [el rectangle] ▭ GD.

Atès que FE és a EG com □ FD a ▭ DG, [Evi 1]
però que □ FD és el [quadrat] de [costat] FE
i ▭ DG el [rectangle] de [costats] DE i EG
—és a dir, el rectangle de [costats] FE i EG—;[579]
resulta que FE és a EG com el quadrat de [costat] FE al rectangle de [costats] FE i EG.

De manera semblant, el rectangle de [costats] GE i EF és al quadrat de [costat] EF,
és a dir, [el rectangle] ▭ GD és a[l quadrat] □ FD com el segment GE al EF.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 22. *El quadrat de costat un [segment] medial aplicat a un [segment] racional produeix una amplada [que és un segment] racional incommensurable en longitud amb el [segment] al qual s'ha aplicat.*

Siguin A i CB [els segments] medial i racional[, respectivament].

Considerem l'àrea rectangular ▭ BD, equivalent al quadrat de [costat] A, aplicada [al segment] BC i generant una amplada CD.

---

577. És a dir, el costat del quadrat equivalent al rectangle. Vegeu la nota 553 (pàgina 231). És un porisma immediat d'Evi 1 i ja ho ha usat en la demostració d'Ex 22.

578. Trivialment: $\frac{a}{b} = \frac{a^2}{a\,b}$. Cal dir que són de la mateixa altura. De fet, és un porisma d'Evi 11.

579. Vegeu la nota 568 (pàgina 236).

Afirmo que CD és racional i incommensurable en longitud amb CB.

[*Demostració.*] Atès que [el segment] A és medial,
el quadrat de costat A equival a una àrea [rectangular] formada pels [segments] racionals [que són] commensurables només en quadrat, [Ex 21]
com ara el rectangle $\square\, GF$.

I, atès que [el quadrat] de costat A també equival al [rectangle] $\square\, BD$,
els rectangles $\square\, BD$ i $\square\, GF$ són equivalents. [Nc 1]

Però [els rectangles $\square\, BD$ i $\square\, GF$] també són equiangles,
i dos paral·lelograms equiangles equivalents tenen els costats que corresponen a angles iguals inversament proporcionals. [Evi 14]

Aleshores, BC és a EG com EF a CD.

Per tant, el quadrat de [costat] BC és al de [costat] EG com el de [costat] EF al de [costat] CD, [Evi 22]
i el quadrat de [costat] CB és commensurable amb el de [costat] EG perquè tots dos són racionals.

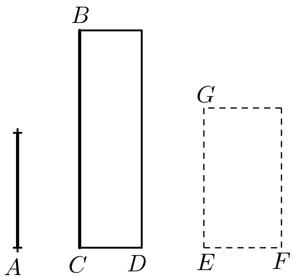


Figura Ex 22

D'això en resulta que el quadrat de [costat] EF també és commensurable amb el de [costat] CD. [Ex 11]

En conseqüència, el quadrat de [costat] EF és racional.

Per tant, el quadrat de [costat] CD també ho és. [Dx 1.4]

En definitiva, [el segment] CD és racional.

I, atès que [el segment] EF és incommensurable en longitud amb EG perquè són commensurables només en quadrat,
i que EF és a EG com el quadrat de costat EF al rectangle de [costats] FE i EG, [Ex 22, lema]
resulta que el [quadrat] de [costat] EF és incommensurable amb el [rectangle] de [costats] FE i EG. [Ex 11]

Però el quadrat de [costat] CD és commensurable amb el quadrat de [costat] EF perquè [tots dos segments] són racionals en quadrat,
i el rectangle de [costats] DC i CB és commensurable amb el de [costats] FE i EG perquè [tots dos] equivalen al [quadrat] de costat A.

Aleshores, el quadrat de [costat] CD també és incommensurable amb el rectangle de [costats] DC i CB. [Ex 13]

I el quadrat de [costat] CD és al rectangle de [costats] DC i CB com DC a CB. [Ex 22, lema]

Per tant, DC és incommensurable en longitud amb CB. [Ex 11]

En definitiva, CD és racional i incommensurable en longitud amb CB.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 23. *Un [segment] commensurable amb un [segment] medial és medial.*

Siguin A un [segment] medial i B [un segment] commensurable amb ell.

Afirmo que [el segment] B també és medial.

[*Demostració.*] Considerem un [segment] racional CD. [Dx 1.3]

Hi apliquem l'àrea rectangular $\square\, CE$ equivalent al quadrat de [costat] A. [Evi 13 i 17]

Aquest rectangle produeix l'amplada ED.

Aleshores, ED és [un segment] racional incommensurable en longitud amb el [segment] CD. [Ex 22]

Considerem l'àrea rectangular $\square\, CF$, equivalent al quadrat de [costat] B, aplicada [al segment] CD. [Evi 13 i 17]

Aquest rectangle produeix l'amplada DF.

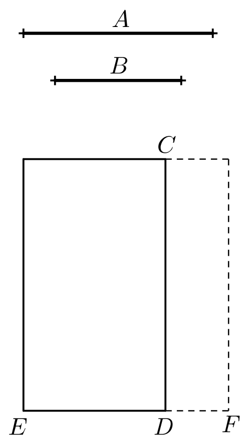


Figura Ex 23

En conseqüència, com que A és commensurable amb B, el quadrat de [costat] A també ho és amb el de [costat] B. [Evi 20]

Però [el rectangle] $\square\, EC$ és equivalent al quadrat de [costat] A, i [el rectangle] $\square\, CF$ al de costat B.

Per tant, [el rectangle] $\square\, EC$ és commensurable amb $\square\, CF$. [per substitució]

I [el rectangle] $\square\, EC$ és al $\square\, CF$ com [el segment] ED al DF. [Evi 1]

Així doncs, [el segment] ED és commensurable en longitud amb el DF [Ex 11] i [el segment] ED és racional i incommensurable en longitud amb el DC.

Per tant, [el segment] DF també és racional [Dx 1.3]
i incommensurable en longitud amb el DC. [Ex 13]

Aleshores, [els segments] CD i DF són racionals commensurables només en quadrat,
i l'arrel quadrada d'un rectangle format per [segments] racionals commensurables només en quadrat és medial. [Ex 21]

En definitiva, l'arrel quadrada del rectangle de [costats] CD i DF és medial,
i el quadrat de costat B equival al rectangle de [costats] CD i DF.

Per tant, B és un [segment] medial. [Ex 21]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 23, porisma. *Una [àrea] commensurable amb una àrea medial*[580] *és medial.*

Ex 24. *Un rectangle format per [dos] segments medials commensurables en longitud és medial.*

Sigui $\sqsubset\!\sqsupset AC$ el rectangle format pels segments medials AB i BC commensurables en longitud.

Afirmo que [el rectangle] $\sqsubset\!\sqsupset AC$ és medial.

[*Demostració.*] Considerem el quadrat $\square AD$ de costat AB. [Ei 46]

I veiem que és medial.[581]

Atès que AB és commensurable en longitud amb BC, i AB i BD són iguals,
resulta que DB és commensurable en longitud amb BC. [Ex 12]

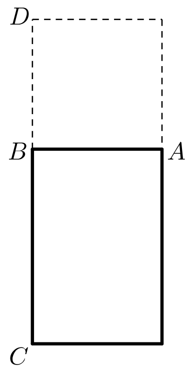


Figura Ex 24

Per tant, [el quadrat] $\square DA$ és commensurable amb [el rectangle] $\sqsubset\!\sqsupset AC$, [Evi 1 i Ex 11]
i [el quadrat] $\square DA$ és medial.

580. Una «àrea medial» equival a l'àrea d'un quadrat de costat un segment medial. Per tant, d'acord amb la nota 576 (pàgina 242), l'àrea medial val $a^2\sqrt{b}$.

581. Vegeu la nota 580 (pàgina 246).

Aleshores, [el rectangle] ▭ AC és medial. [Ex 23, porisma]
I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 25. *El rectangle constituït per segments medials commensurables només en quadrat és racional o medial.*

Considerem el rectangle ▭ AC de costats els segments medials AB i BC commensurables només en quadrat.

Afirmo que el rectangle ▭ AC és racional o medial.

Fem els quadrats □ AD i □ BE de costats [els segments respectius] AB i BC. [Ei 46]

[Els quadrats] □ AD i □ BE són medials.[582]

Prenem un [segment] racional FG. [Dx 1.3]

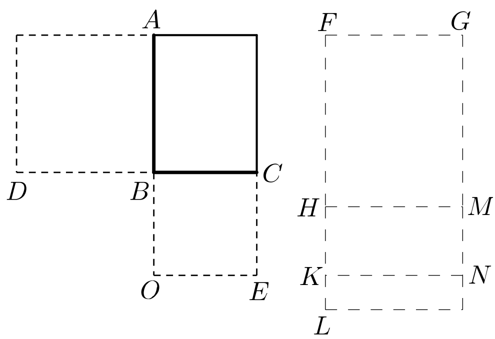


Figura Ex 25

Considerem el paral·lelogram rectangular ▭ GH equivalent a □ AD aplicat a[l segment] FG. [Evi 13 i 17]

Aquest rectangle produeix l'amplada FH.

Considerem el rectangle ▭ MK equivalent al ▭ AC aplicat a[l segment] HM. [Evi 13 i 17]

Aquest rectangle produeix l'amplada HK.

Finalment, sigui ▭ NL equivalent a □ BE aplicat a[l segment] KN. [Evi 13 i 17]

Aquest rectangle produeix l'amplada KL.

Aleshores, [els segments] FH, HK i KL es troben en un [mateix] segment. [Ei 14]

I, com que [els quadrats] □ AD i □ BE són medials
i equivalen als [rectangles] ▭ GH i ▭ NL[, respectivament],
cada un dels [rectangles] ▭ GH i ▭ NL és medial. [per substitució]

I estan aplicats a[l segment] racional FG.

582. Vegeu la nota nota 580 (pàgina 246).

Per tant, cada un dels [segments] FH i KL és racional i incommensurable en longitud amb FG. [Ex 22]

Atès que [el quadrat] $\square\, AD$ és commensurable amb el $\square\, BE$,
[el rectangle] ▭ GH també ho és amb el ▭ NL.

Per tant, ▭ GH és a ▭ NL com FH a KL. [Evi 1]

D'això en resulta que [el segment] FH és commensurable en longitud amb el KL. [Ex 11]

Aleshores, [els segments] FH i KL són racionals [i, alhora,] commensurables en longitud.

Per tant, el rectangle de [costats] FH i KL és racional. [Ex 19]

I, atès que [els segments] DB i OB són iguals a[ls segments] BA i BC[, respectivament];
DB és a BC com AB a BO. [Ev 7, iterat]

Però DB és a BC com $\square\, DA$ a $\square\, AC$, [Evi 1]
i AB és a BO com [el rectangle] ▭ AC a[l quadrat] $\square\, CO$. [Ev 1]

Per tant, [el quadrat] $\square\, DA$ és al [rectangle] ▭ AC com el [rectangle] ▭ AC a[l quadrat] $\square\, CO$. [Nc 1, iterat]

Però [el quadrat] $\square\, AD$ equival a[l rectangle] ▭ GH,
[el rectangle] ▭ AC a[l rectangle] ▭ MK
i [el quadrat] $\square\, CO$ a[l rectangle] ▭ NL.

Aleshores, [el rectangle] ▭ GH és al ▭ MK com [el rectangle] ▭ MK al ▭ NL. [Ev 7, iterat]

A més, [el segment] FH és al HK com el HK al KL.
[Evi 1 i Ev 11]

Per tant, el rectangle de [costats] FH i KL equival al quadrat de [costat] HK, [Evi 17]
el rectangle de [costats] FH i KL és racional,
i el quadrat de [costat] HK també ho és. [Dx 1.4]

En conseqüència, HK és racional. [Dx 1.3]

Ara tenim una d'aquestes dues possibilitats:[583]

a) Si HK és commensurable en longitud amb FG,
▭ HN és racional. [Ex 19] ♠

b) Si HK és incommensurable en longitud amb FG,

583. Disjunció de casos.

[els segments] KH i HM són racionals commensurables només en quadrat.

I d'això en resulta que [el rectangle] $\square\, HN$ és medial.

[Ex 21] ♠

Aleshores, [el rectangle] $\square\, HN$ o és racional o és medial,
i [el rectangle] $\square\, HN$ equival al $\square\, AC$.

En definitiva, el [rectangle] $\square\, AC$ o és racional o és medial. [Dx 1.4]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 26. *L'excés d'una [àrea] medial sobre una altra no és mai una àrea racional.*[584]

[*Demostració.*] Suposem que l'excés de l'[àrea] medial $\square\, AB$ sobre l'[àrea] medial $\square\, AC$ és l'[àrea] racional DB.[585]

Considerem un [segment] racional EF. [Dx 1.3]

Hi apliquem el rectangle $\square\, FH$ equivalent al $\square\, AB$.

Aquest rectangle produeix l'amplada EH. [Evi 13 i 17]

Considerem [el rectangle] $\square\, FG$ equivalent a[l rectangle] $\square\, AC$ dins [el rectangle] $\square\, FH$. [Evi 25]

Aleshores, els residus $\square\, BD$ i $\square\, KH$ són equivalents,
i [el rectangle] $\square\, DB$ és racional.

---

584. La demostració d'aquesta proposició és anàloga a les de les quatre anteriors. La complexitat aparent està produïda per una manca d'adequació del simbolisme. Només cal tenir clars els conceptes que s'hi empren per entendre'n les demostracions.

Si a un mateix segment q hi apliquem dues àrees medials, els resultats són $u^2\sqrt{q_1}$ i $u^2\sqrt{q_2}$. La proposició estableix que la seva diferència no pot ser racional. Fem $a_1 := \sqrt{q_1}$ i $a_2 := \sqrt{q_2}$, i suposem que $u\,(a_1 - a_2) = u\,(\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2}) = u\,b$ és racional. Aleshores, b és racional i commensurable amb u^2. Atès que $u^2\,a_1$ i $u^2\,a_2$ són medials, a_1 i a_2 són racionals incommensurables amb u. De retruc, a_2 és incommensurable amb b. Fem $\frac{a_2}{b} = \frac{a_2^2}{a_2\,b}$. Tenim que a_2^2 és incommensurable amb $a_2\,b$. Però $a_2^2 + b^2$ és commensurable amb a_2^2, i $2\,a_2\,b$ ho és amb $a_2\,b$. D'això en resulta que $a_2^2 + b^2$ és incommensurable amb $2\,a_2\,b$. Per tant, $(a_2 + b)^2$ ho és amb $a_2^2 + b^2$, i aquesta suma amb a_1^2. Però aquesta suma és racional. En conseqüència, a_1^2, i de retruc, és irracional. Però hem vist que era racional. Arribem, doncs, a una contradicció. En definitiva, $u\,b$ no pot ser racional.

585. Hipòtesi de l'absurd.

Per tant, [el rectangle] $\square\, KH$ també ho és. [Dx 1.4]

Atès que cada un dels [rectangles] $\square\, AB$ i $\square\, AC$ és medial
i que [els rectangles] $\square\, AB$ i $\square\, AC$ equivalen als $\square\, FH$ i $\square\, FG$[, respectivament];
resulta que tant $\square\, FH$ com $\square\, FG$ són medials. [Dx 1.4 i Ex 21]

Tots dos estan aplicats al [segment] racional EF.

Per tant, [els segments] HE i EG són racionals i incommensurables en longitud amb el EF. [Ex 22]

Atès que [el rectangle] $\square\, DB$ equival al $\square\, KH$ i és racional,
[el rectangle] $\square\, KH$ també ho és. [Dx 1.4]

I està aplicat al [segment] racional EF.

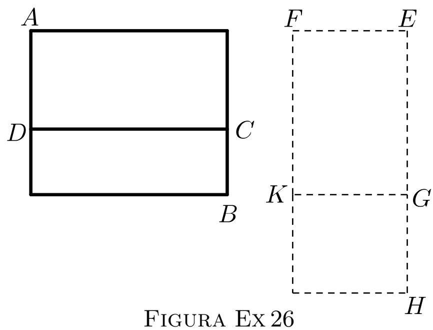


Figura Ex 26

Per tant, [el segment] GH és racional i commensurable en longitud amb el EF. [Ex 20]

Però [el segment] EG és racional i incommensurable en longitud amb el EF.

Aleshores, [el segment] EG és incommensurable en longitud amb GH, [Ex 13]
i EG és a GH com el quadrat de [costat] EG al rectangle de [costats] EG i GH. [Ex 13, lema]

Per tant, el quadrat de [costat] EG és incommensurable amb el rectangle de [costats] EG i GH. [Ex 11]

Però la suma dels quadrats de costats EG i GH és commensurable amb el quadrat de [costat] EG,
ja que els [segments] EG i GH són racionals, [Dx 1.3]
i dues vegades el rectangle de [costats] EG i GH és commensurable amb el de [costats] EG i GH,
ja que el primer rectangle equival al doble del segon. [Ex 6]

Per tant, els quadrats de [costats] EG i GH són incommensurables amb dues vegades el rectangle de costats EG i GH. [Ex 13]

En conseqüència, la suma dels quadrats de [costats] EG i GH més dues vegades el rectangle de [costats] EG i GH
—que és el quadrat de [costat] EH— [EII 4]
és incommensurable amb la suma dels quadrats de [costats] EG i GH. [EX 16]

I els quadrats de [costats] EG i GH són racionals.

En definitiva, el quadrat de [costat] EH és irracional. [per substitució]

Per tant, [el segment] EH és irracional [DX 1.4]
i, alhora, racional. I això és impossible.

Concloem, doncs, que l'excés d'una [àrea] medial sobre una medial no és mai una racional.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EX 27. *Volem determinar dos [segments] medials commensurables només en quadrat que formen una [àrea] racional.*[586]

[*Construcció.*] Considerem dos [segments] racionals A i B commensurables només en quadrat.

Determinem la mitjana proporcional C de[ls segments] A i B, [EVI 13]
i la quarta proporcional D de[ls segments] A, B i C.

Dit d'una altra manera, A és a B com C a D. [EVI 12] ♣

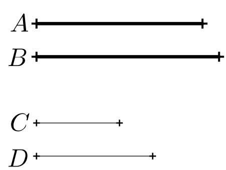


FIGURA EX 27

[*Demostració.*] Atès que els [segments] racionals A i B són commensurables només en quadrat, el rectangle de [costats] A i B
—que és el mateix que dir «el quadrat de [costat] C»— [EVI 17]
és medial. [EX 21]

Aleshores, [el segment] C també ho és. [EX 21]

I, com que A és a B [com] C a D,
i A i B són commensurables només en quadrat,
C i D també ho són. [EX 11]

586. Aquí comença un grup de proposicions existencials, és a dir, problemes. Vegeu la nota 2 (pàgina 1).

Però C és [un segment] medial.

Per tant, D també ho és. [Ex 23]

De tot això en resulta que [els segments] C i D són medials commensurables només en quadrat. ♠

Afirmo que hem determinat una [àrea] racional.

Atès que A és a B com C a D,
alternando, A és a C com B a D. [Ev 16]

Però A és a C com C a B.

Per tant, C és a B com B a D. [Ev 11]

Així doncs, el rectangle de [costats] C i D equival al quadrat de [costat] B. [Evi 17]

Però el quadrat de [costat] B és racional.

Per tant, el rectangle de [costats] C i D també ho és. ♠

Hem determinat, doncs, dos [segments] medials [C i D] que delimiten una [àrea] racional,
i [que són] commensurables només en quadrat.
I això és el que volíem demostrar.[587] ♠

Ex 28. *Volem trobar dos [segments] medials commensurables només en quadrat que determinen una [àrea] medial.*

[*Construcció.*] Considerem els [tres segments] racionals A, B i C commensurables només en quadrat.

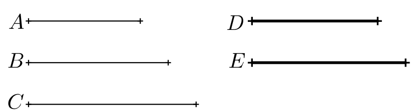


Figura Ex 28

Determinem [el segment] D,
mitjana proporcional dels [segments] A i B[, [Evi 13]
de manera que A és a D com D a B];
i el segment E, quarta proporcional de B, C i D[,
de manera que B és a C com D a E]. [Evi 12] ♣

Com que els [segments] racionals A i B són commensurables només en quadrat;
el rectangle de [costats] A i B

587. Si els segments C i D tenen les longituds $\sqrt[4]{q}\,u$ i $\sqrt[4]{q^3}\,u$, respectivament, B té la longitud $\sqrt{q}\,u$, en què u és la longitud d'un segment A.

i el rectangle de [costats] A i B, és a dir, el quadrat de [costat] D, [Evi 17]
són medials. [Ex 21]

Aleshores, [el segment] D també ho és. [Ex 21]

Atès que B i C són commensurables només en quadrat,
i B és a C com D a E,
D i E són commensurables només en quadrat. [Ex 11]

Però D és medial.

Per tant, E també ho és. [Ex 23]

Així doncs, D i E són [segments] medials commensurables només en quadrat. ♠

Afirmo que tanquen una [àrea] medial.

Atès que B és a C com D a E,
alternando, B és a D com C a E. [Ev 16]

Però B és a D com D a A.

Per tant, D és a A com C a E. [Ev 11]

En definitiva, el rectangle de [costats] A i C equival al de [costats] D i E. [Evi 16]

Però el de [costats] A i C és medial. [Ex 21]

Per tant, el rectangle de [costats] D i E també ho és.

Hem construït, doncs, [dos segments] medials [D i E],
commensurables només en quadrat,
que determinen una [àrea] medial.
I això és el que volíem demostrar.[588] ♠

Ex 29, lema i. *Volem trobar dos nombres quadrats la suma dels quals és un nombre quadrat.*[589]

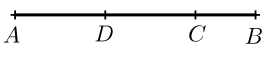


Figura Ex 29, lema i

[*Construcció i demostració.*] Siguin AB i BC dos nombres [naturals].

Suposem que tots dos són parells o senars.[590]

588. Si [els segments] B, C i A tenen longituds $\sqrt{q}\,u, \sqrt{q'}\,u$ i u, [els segments] D i E tenen longituds $\sqrt[4]{q}\,u$ i $\sqrt[4]{q'\,q}\,u$.

589. És un teorema aritmètic que hauria d'haver establert al llibre ix. La construcció proporciona la llei de formació de les ternes pitagòriques numèriques. Vegeu Pla (2016*a*), p. 250-257; Pla (2016*b*), p. 137-138.

590. L'autor no diu per què prescindeix del cas de la paritat diferent.

Si d'un [nombre] parell en sostraiem un altre,
o d'un [nombre] senar un altre,
el residu és parell [en tots dos casos]. [EIX 24 i 26]

Per tant, el residu AC és un [nombre] parell.

El dimidiem per D.

Suposem que AB i BC també són [nombres] plans semblants
o [nombres] quadrats que també són plans semblants. [DVII 19 i 22]

Aleshores, el [nombre] que resulta de [multiplicar] AB per BC [DVII 16]
més el quadrat de CD
és igual al quadrat de BD. [EII 6][591]

Però el [nombre obtingut multiplicant] AB per BC és un [nombre] quadrat,
ja que hem vist que el nombre que resulta de multiplicar dos nombres plans semblants és un [nombre] quadrat. [EIX 1]

Per tant, hem obtingut dos nombres quadrats
—en concret, el [nombre obtingut multiplicant] AB per BC,
i el [quadrat] de CD—
que, junts, proporcionen el quadrat de BD. ♣

És clar que hem obtingut dos [nombres quadrats]
—[en concret,] el [quadrat] de BD i el de CD—
la diferència dels quals
—[en concret,] el [rectangle] que produeixen [els nombres] AB i BC—
és un nombre quadrat, quan AB i BC són [nombres] plans semblants.

Però, quan no ho són, aconseguim dos quadrats
—[en concret,] els de [costats] BD i DC—
la diferència dels quals
—[en concret,] el [rectangle] produït pels [nombres] AB i BC—
no és un quadrat.[592]

---

591. Apliquem als nombres naturals un resultat establert per als segments rectilinis. Ara bé, com ja vam indicar en analitzar el contingut del llibre II, és un resultat de caràcter algebraic. Això fa pensar que aquesta propietat també és vàlida per als nombres naturals.

592. La part precedent permet determinar dos nombres quadrats la diferència dels quals és un nombre quadrat. En canvi, aquesta darrera

I això és el que volíem demostrar.[593] ♠

Ex 29, lema II. *Volem trobar dos nombres quadrats la suma dels quals no és un nombre quadrat.*

[*Construcció i demostració.*] El [nombre obtingut multiplicant] AB i BC, de la manera descrita abans, és un nombre quadrat i [la seva diferència], CA, un de parell.

Dimidiem [el nombre] CA per D.

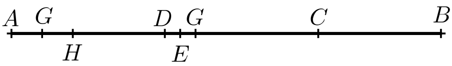


FIGURA Ex 29, lema II

És clar que el [nombre] quadrat [que obtenim multiplicant] AB i BC més el quadrat de CD equival al quadrat de BD. [Ex 29, lema I]

Sostraiem del nombre BD la unitat DE.

Aleshores, el [nombre] quadrat [obtingut multiplicant] AB per BC més el quadrat de CE és més petit que el quadrat de BD.

Afirmo que el [nombre] quadrat [obtingut multiplicant] AB per BC més el quadrat de CE no és un nombre quadrat.

[*Demostració.*] Si és un nombre quadrat:[594]

a) Equival al quadrat de BE.

b) És més petit que el quadrat de BE, ja que no pot ser més gran que ell perquè no és possible dividir la unitat [numèrica].

a) En primer lloc, considerem que el nombre [obtingut multiplicant] AB per BC més el quadrat de CE és igual al de BE.

Sigui GA el doble de la unitat DE.

Aleshores, atès que el [nombre] AC és el doble del CD i que AG és el doble del DE,

---

part ens diu la manera d'aconseguir dos nombres quadrats la diferència dels quals no és un nombre quadrat.

593. Un nombre pla és el producte de dos nombres, els seus costats. I dos nombres plans semblants tenen els costats proporcionals [EVII 16 i EVII 21]. Els agafem de manera que els seus costats respectius són $m\,p$ i $n\,p$, $m\,q$ i $n\,q$. Si els dos són parells o senars, podem considerar el nombre $\frac{1}{2}(m\,n\,p^2 - m\,n\,q^2)$. Aleshores, òbviament, $(m\,n\,p^2) \times (m\,n\,q^2) + (\frac{m\,n\,p^2 - m\,n\,q^2}{2})^2 = (\frac{m\,n\,p^2 + m\,n\,q^2}{2})^2$. D'això en resulta que els nombres $m\,n\,p\,q$, $\frac{m\,n\,p^2 - m\,n\,q^2}{2}$ i $\frac{m\,n\,p^2 - m\,n\,q^2}{2}$ satisfan el que es demana a l'enunciat del problema.

594. Hipòtesi de l'absurd i disjunció de casos.

el residu GC és el doble del residu EC. [Nc $1, 3, 5'$]

Per tant, dimidiem GC pel punt E.

Aleshores, el [nombre obtingut multiplicant] GB per BC més el quadrat de CE és igual al quadrat de BE. [EII 6][595]

Però hem suposat que el [nombre] obtingut multiplicant AB per BC més el quadrat de CE és igual al de BE.

Per tant, el [nombre] obtingut multiplicant GB per BC més el quadrat de CE és igual a l'obtingut multiplicant AB per BC més el quadrat de CE. [Nc 1]

De tot això en resulta que, si sostraiem, dels dos nombres, el quadrat de CE, els nombres AB i GB són iguals.[596]

I això és impossible. ♠

Per tant, el [nombre obtingut multiplicant] AB per BC més el quadrat de CE no és igual al quadrat de BE.

Afirmo que tampoc no és més petit que el quadrat de BE.

b) En segon lloc, suposem, si és possible,[597]

que AB per BC més el quadrat de CE és igual al quadrat de BF.

Considerem [el nombre] HA igual al doble de DF.

Novament, podem inferir que HC és el doble de CF.

Per tant, F dimidia CH.

I, basant-nos en tot això, tenim que el [nombre obtingut multiplicant] HB per BC més el quadrat de FC és igual al de BF. [EII6][595]

Però hem suposat que el [nombre obtingut multiplicant] AB per BC més el quadrat de CE també és igual al de BF.

Així doncs, el [nombre obtingut multiplicant] HB per BC més el quadrat de CF és igual a l'obtingut multiplicant AB per BC més el quadrat de CE. [Nc 1]

I això és impossible. ♠

Per tant, el [nombre obtingut multiplicant] AB per BC més el quadrat de CE no és més petit que el quadrat de BE.

Però hem vist que tampoc no és igual al quadrat de BE.

---

595. Vegeu la nota 593 (pàgina 255).
596. PLA (2016*b*), problema 52, ítem f_1, p. 67.
597. Hipòtesi de l'absurd.

En conseqüència, el [nombre obtingut multiplicant] AB per BC més el quadrat de CE no és un quadrat.
I això és el que volíem demostrar.[598] ♠

Ex 29. *Volem trobar dos [segments] racionals commensurables només en quadrat, de manera que l'excés del quadrat de costat [més gran] sobre el de costat més petit és un quadrat de costat un segment commensurable en longitud amb el més gran.*

[*Construcció.*] Considerem un [segment] racional AB
i dos nombres quadrats CD i DE, de manera que la seva diferència CE no sigui un nombre quadrat.[599] [Ex 29, lema I]

I un semicercle $\frown AFB$ de diàmetre AB. [P 3]

Ho fem de manera que [podem determinar] un punt F [de la semicircumferència] per al qual DC és a CE com el quadrat de BA al de AF. [Ex 6, porisma] ♣

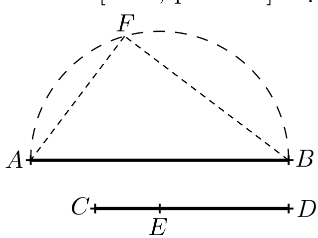


Figura Ex 29

[*Demostració.*] Unim FB. [P 1]

Atès que el quadrat de BA és al de AF com DC a CE,
la raó que hi ha entre els quadrats de BA i AF és la de DC i CE.

Per tant, els [quadrats] de BA i AF són commensurables. [Ex 6]

Però el quadrat de AB és racional. [Dx 1.4]

Per tant, el quadrat de AF també ho és. [Dx 1.4]

I, en conseqüència, [el segment] AF també.

I, entre DC i CE no hi ha la raó de dos nombres quadrats,
els quadrats de BA i AF tampoc no la tenen.

---

598. Amb les representacions de la nota 593, Euclides afirma que $(m\,n\,p^2) \times (m\,n\,q^2) + (\frac{m\,n\,p^2 - m\,n\,q^2}{2} - 1)^2$ no és un quadrat. Sabem que $(m\,n\,p^2) \times (m\,n\,q^2) + (\frac{m\,n\,p^2 - m\,n\,q^2}{2})^2 = (\frac{m\,n\,p^2 + m\,n\,q^2}{2})^2$. Per tant, si $(m\,n\,p^2) \times (m\,n\,q^2) + (\frac{m\,n\,p^2 - m\,n\,q^2}{2} - 1)^2$ és un quadrat, considera el nombre $\frac{m\,n\,p^2 + m\,n\,q^2}{2} - 1$ com a base. I observa que $(m\,n\,p^2) \times (m\,n\,q^2) + (\frac{m\,n\,p^2 - m\,n\,q^2}{2} - 1)^2$ no és més gran ni igual ni més petit que el quadrat del nombre $\frac{m\,n\,p^2 + m\,n\,q^2}{2} - 1$.

Tant aquest lema com l'anterior són «elements» d'aquest llibre.

599. Vegeu la nota 592 (pàgina 254).

Aleshores, AB és incommensurable en longitud amb AF. [Ex 9]

Així doncs, els [segments] racionals BA i AF són commensurables només en quadrat.

I, atès que DC és a CE com el quadrat de BA al de AF;
convertendo, CD és a DE com el quadrat de AB al de BF,
[Ev 19 porisma, Eiii 31 i Ei 4]
i la raó entre CD i DE és la de dos nombres quadrats.

Per tant, la raó entre el quadrat de AB i BF també ho és.

D'això en resulta que AB és commensurable en longitud amb BF
[Ex 9]
i que el quadrat de [costat] AB equival a la suma dels [quadrats] de AF i FB. [Ei 47]

Per tant, l'excés del quadrat de AB sobre el de AF és el quadrat de BF,
[que és] commensurable [en longitud] amb AB.

En definitiva, hem aconseguit dos [segments] racionals, BA i AF, commensurables només en quadrat,
de manera que l'excés del quadrat del gran, AB, sobre el del petit, AF,
és el quadrat de BF, [que és] commensurable en longitud amb AB.[600]
I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 30. *Volem trobar dos [segments] racionals commensurables només en quadrat, de manera que l'excés del quadrat del [segment] gran sobre el del [segment] petit és el quadrat de costat [un segment] incommensurable en longitud amb el gran.*

[*Construcció.*] Considerem un [segment] racional AB
i dos nombres quadrats, CE i ED,[601]
la suma dels quals, CD, no ho és. [Ex 29, lema ii]

Tirem el semicercle $\frown AFB$ de [diàmetre] AB. [P 3]

Ho fem de manera que [podem determinar un punt F de la semicircumferència] per al qual DC és a CE com el quadrat de BA al de AF. [Ex 6, porisma] ♣

600. De fet, $AB = u$, i $AF = \sqrt{1-q^2}\,u$, en què $q = \frac{DE}{CD}$.

601. Els nombres quadrats i la suma, que no és un quadrat però és un nombre pla, es representen amb segments.

[*Demostració.*] Unim FB. [P 1]

De manera semblant a com ho hem fet en la proposició anterior, podem veure que BA i AF són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

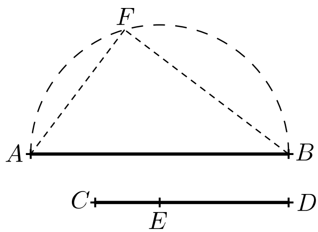


Figura Ex 30

I, atès que DC és a CE com el quadrat de BA al de AF;
convertendo, CD és a DE com el quadrat de AB al de BF.
[Ev 19 porisma, Eiii 31 i Ei 47]

Però la raó entre CD i DE no és la de dos nombres quadrats.

Aleshores, la raó entre el quadrat de AB i el de BF no és la que hi ha entre dos nombres quadrats.

Per tant, AB és incommensurable en longitud amb BF, [Ex 9]
i l'excés del quadrat de AB sobre el de AF és el quadrat de FB, [Ei 47]
[que és] incommensurable [en longitud] amb AB.

En definitiva, AB i AF són [segments] racionals commensurables només en quadrat,
i l'excés del quadrat de AB sobre el de AF és el quadrat de FB,
[que és] incommensurable [en longitud] amb AB.[602]
I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 31. *Volem trobar dos [segments] medials commensurables només en quadrat que determinen una [àrea] racional, de manera que l'excés del quadrat de costat [el segment] més llarg sobre el [quadrat] de costat el més curt és el quadrat de costat [un segment] commensurable en longitud amb el [segment] més gran.*

[*Construcció.*] Siguin A i B dos [segments] racionals commensurables només en quadrat, de manera que l'excés del quadrat del [segment] més llarg, A, sobre el quadrat del més curt, B, és un quadrat de [costat] un segment commensurable en longitud amb A. [Ex 29]

602. La longitud de AF és $\frac{1}{\sqrt{1+q^2}}\,u$, en què u és la longitud de AB i $q = \sqrt{\frac{DE}{CE}}$.

Considerem el quadrat de C equivalent al rectangle de [costats] A i B, que és medial, [Ex 21]
i, de retruc, [el segment] C també. [Ex 21]

Prenem que el rectangle de [costats] C i D equivalent al quadrat de [costat] B. [Evi 12 i 17] ♣

[*Demostració.*] El quadrat de B és racional.

Aleshores, el rectangle de [costats] C i D també ho és. [Dx 1.4]

Figura Ex 31

Atès que A és a B com el rectangle de [costats] A i B al quadrat de B, [Ex 21, lema]
que el quadrat de C equival al rectangle de [costats] A i B,
i que el rectangle de [costats] C i D ho fa al quadrat de B,
resulta que A és a B com el quadrat de C al rectangle de [costats] C i D,
i el quadrat de C és al rectangle de [costats] C i D com C a D. [Ex 21, lema]

Per tant, A és a B com C a D, [Nc 1 o Ev 7]
i A és commensurable amb B només en quadrat.

D'això en resulta que C també ho és amb D [Ex 11]
i que C és [un segment] medial.

Per tant, D també ho és. [Ex 21]

I, com que A és a B com C a D
i l'excés del quadrat de A sobre el de B és el quadrat d'un [segment] commensurable [en longitud] amb A,
resulta que l'excés del quadrat de C sobre el de D també és el quadrat d'un [segment] commensurable [en longitud] amb C. [Ex 14]

Així doncs, hem determinat dos [segments] medials C i D,
commensurables només en quadrat,
que determinen una [àrea] racional,
i en els quals l'excés del quadrat de C sobre el de D és el quadrat de costat un segment commensurable en longitud amb C.[603]

603. Les longituds dels segments C i D són $\sqrt[4]{1-q^2}\,u$ i $\sqrt[4]{(1-q^2)^3}\,u$; en què u és la longitud de[l segment] A, i $q = \frac{DE}{CD}$.

De manera semblant, podem demostrar [la proposició] amb [un segment] incommensurable [en longitud amb C],
en el supòsit que l'excés del quadrat de A sobre el de B és el quadrat de costat un segment incommensurable [en longitud] amb A.[604]
[Ex 30]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 32. *Volem trobar dos [segments] medials commensurables només en quadrat que formen un rectangle medial, de manera que l'excés del quadrat del [segment] llarg sobre el del [segment] curt és el quadrat de costat un segment commensurable [en longitud] amb el llarg.*

[*Construcció.*] Siguin tres [segments] racionals A, B i C commensurables només en quadrat, de manera que l'excés del quadrat de A sobre el de C és el quadrat de costat un segment commensurable [en longitud] amb A. [Ex 29]

Considerem el quadrat de D equivalent al rectangle de [costats] A i B. [Evi 13 i 17]

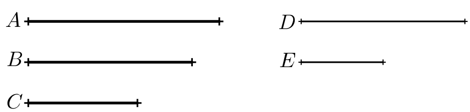


Figura Ex 32

Aleshores, el quadrat de D és medial i, de retruc, D també ho és. [Ex 21]

Considerem el rectangle de [costats] D i E equivalent al de [costats] B i C. [Evi 13 i 17] ♣

[*Demostració.*] *a*) Atès que el rectangle de [costats] A i B és al de [costats] B i C com A a C, [Ex 21, lema]
que el quadrat de D equival al rectangle de [costats] A i B,
i que el rectangle de [costats] D i E ho fa al de [costats] B i C,
resulta que A és a C com el quadrat de D al rectangle de [costats] D i E,
i que el quadrat de D és al rectangle de [costats] D i E com D a E.
[Ex 21, lema i Ev 7]

604. Les longituds dels segments C i D són $\sqrt[4]{1+q^2}\,u$ i $\sqrt[4]{(1+q^2)^3}\,u$; en què u és la longitud de[l segment] A, i $q = \sqrt{\frac{DE}{CE}}$.

Per tant, A és a C com D a E.

I A és commensurable només en quadrat amb C.

Aleshores, D també ho és amb E. [Ex 11]

Però D és medial.

Per tant, E també ho és. [Ex 23]

I, atès que A és a C com D a E
i que l'excés del quadrat de A sobre el de C és el quadrat de costat un segment commensurable [en longitud] amb A,
resulta que l'excés del quadrat de D sobre el de E també és el quadrat de costat un segment commensurable [en longitud] amb D.

[Ex 14] ♠

Afirmo que el rectangle de [costats] D i E és medial.

b) Com que el rectangle de [costats] B i C equival al de [costats] D i E,
que el rectangle de [costats] B i C és medial perquè els segments B i C són racionals i commensurables només en quadrat, [Ex 21]
resulta que el rectangle de [costats] D i E també és medial.

[per substitució]

Així doncs, hem trobat dos [segments] D i E, commensurables només en quadrat,
que formen una [àrea] medial, de manera que l'excés del quadrat de costat el [segment] llarg sobre el de costat el [segment] curt és el quadrat de [costat] un segment commensurable [en longitud] amb el llarg.[605] ♠

De manera semblant, podem demostrar que, quan l'excés del quadrat de costat A sobre el de costat C és el quadrat de [costat] un segment incommensurable amb A,
l'excés del quadrat de costat D sobre el de costat E n'és un de [costat] un segment incommensurable amb D.[606] [Ex 30] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

605. Les longituds dels segments D i E són $\sqrt[4]{q'}\,u$ i $\sqrt[4]{q'}\,\sqrt{1-q^2}\,u$; en què la longitud del segment B és $\sqrt{q'}\,u$, i $q = \frac{DE}{CD}$.

606. Les longituds dels segments D i E són $\sqrt[4]{q'}\,u$ i $\sqrt[4]{q'}\,\sqrt{1+q^2}\,u$; en què la longitud del segment B és $\sqrt{q'}\,u$, i $q = \sqrt{\frac{DE}{CE}}$.

Ex 32, lema. *Sigui* $\triangle ABC$ *un triangle* [*rectangle*] *amb l'angle recte* [*al vèrtex*] A. *Tirem el* [*segment*] *perpendicular* AD. *Afirmo que el rectangle:* a) *de* [*costats*] CB *i* BD *equival al* [*quadrat*] *de costat* BA, b) *de* [*costats*] BC *i* CD *equival al* [*quadrat*] *de costat* CA, c) *de* [*costats*] BD *i* DC *equival al* [*quadrat*] *de costat* AD, *i* d) *de* [*costats*] BC *i* AD *equival al* [*rectangle*] *de* [*costats*] BA *i* AC.[607]

En primer lloc, provem a,
el rectangle de [costats] CB i BD equival al quadrat de [costat] BA.

[*Demostració.*] a) Atès que [el segment] AD és perpendicular a la hipotenusa BC pel vèrtex A [de l'angle recte] del triangle rectangle, els triangles $\triangle ABD$ i $\triangle ADC$ són triangles semblants al [triangle] total $\triangle ABC$, i també entre si. [Evi 8]

Atès que el triangle $\triangle ABC$ és semblant al triangle $\triangle ABD$,
CB és a BA com BA a BD. [Evi 4]

Per tant, el rectangle de [costats] CB i BD equival al quadrat de [costat] AB. [Evi 17] ♠

b) Pel mateix [raonament], el rectangle de [costats] BC i CD també equival al quadrat de [costat] AC. ♠

c) Atès que el segment perpendicular a la hipotenusa d'un triangle rectangle és mitjana proporcional entre els dos segments que hi determina, [Evi 8, porisma] resulta que BD és a DA com AD a DC.

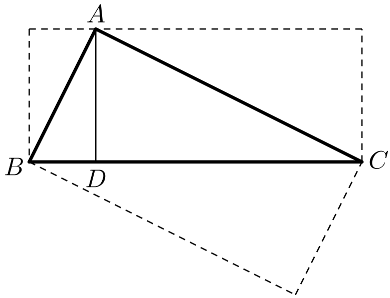


Figura Ex 32, lema

Aleshores, el rectangle de [costats] BD i DC equival al quadrat de [costat] DA. [Evi 17] ♠

d) I també afirmo que
el rectangle de [costats] BC i AD equival al de [costats] BA i AC.

I, com hem dit abans, els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle ABD$ són semblants.
Per tant, BC és a CA com BA a AD. [Evi 4]

607. Deductivament, aquesta proposició pertany al llibre vi.

Aleshores, el rectangle de [costats] BC i AD equival al de [costats] BA i AC. [Evi 16]
I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 33. *Volem trobar dos segments incommensurables en quadrat, de manera que la suma dels quadrats que els tenen com a costats és [una àrea] racional i el rectangle que els té com a costats, [una àrea] medial.*

[*Construcció.*] Considerem dos [segments] racionals AB i BC commensurables només en quadrat,
de manera que l'excés del quadrat de costat el [segment] llarg AB sobre el de [costat] el [segment] curt BC és el de [costat] un segment incommensurable [en longitud] amb AB. [Ex 30]

Dimidiem BC pel punt D.

A AB, al qual manca un quadrat, hi apliquem un paral·lelogram equivalent al quadrat de [costat] BD o DC, fent que hi manqui un quadrat. [Evi 28]

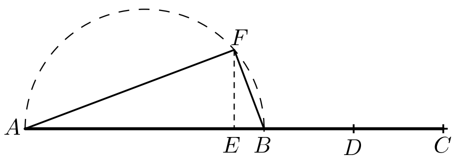


Figura Ex 33

Ara considerem el rectangle de [costats] AE i EB, [P 5]
i el semicercle $\frown AFB$ de diàmetre AB. [P 3]

[Per F,] tirem EF perpendicular a AB.

Unim AF i FB. [P 1] ♣

[*Demostració.*] Atès que AB i BC són [dos] segments diferents,
l'excés del quadrat de costat AB sobre el de costat BC és el quadrat de costat un segment incommensurable [en longitud] amb AB.

A més, al segment AB hi hem aplicat per defecte un rectangle equivalent a una quarta part del quadrat de BC,
és a dir, [equivalent] al quadrat de [costat] la meitat [de BC],
que és el de [costats] AE i EB. [Evi 28]

Aleshores, [el segment] AE és incommensurable [en longitud] amb EB, [Ex 18]
AE és a EB com el rectangle de [costats] BA i AE al de [costats] AB i BE, [Evi 1]

i els de [costats] BA i AE, i AB i BE, equivalen als quadrats de [costats] AF i BF, respectivament. [Ex 32, lema]

Per tant, el quadrat de AF és incommensurable amb el de FB. [Ex 11]

Així doncs, [els segments] AF i FB són incommensurables en quadrat.

I, com que AB és racional,
el quadrat de AB també ho és. [Dx 1.3]

En conseqüència, la suma dels quadrats de AF i FB també. [Ei 47 i Dx 1.3]

De bell nou, atès que el rectangle de [costats] AE i EB equival al quadrat de EF,
i que hem suposat que [aquest rectangle] equival al quadrat de BD,
resulta que FE és igual a BD. [Nc 1][608]

Per tant, BC és el doble de FE.

Això implica que el rectangle de [costats] AB i BC és commensurable amb el de [costats] AB i EF. [Ex 6]

Però el rectangle de [costats] AB i BC és medial. [Ex 21]

Per tant, el rectangle de [costats] AB i EF també ho és. [Ex 23, porisma]

Però els rectangles de [costats] AB i EF,
i AF i FB són equivalents. [Ex 32 lema]

Per tant, el rectangle de [costats] AF i FB també és medial. [Ex 23, porisma]

I hem vist que la suma dels quadrats [de AF i FB] és racional.

Per tant, hem determinat els dos segments AF i FB incommensurables en quadrat,
de manera que la suma dels quadrats que els tenen com a costats és racional
i el rectangle que determinen, medial.
I això és el que volíem demostrar.[609] ♠

608. Vegeu la nota 596 (pàgina 256).

609. Els segments AF i FB tenen la longitud $\sqrt{\frac{1}{2}\,(1+\frac{q}{\sqrt{1+q^2}})}\,u$ i $\sqrt{\frac{1}{2}\,(1-\frac{q}{\sqrt{1+q^2}})}\,u$, en què u és la longitud de AB i $q=\sqrt{\frac{DE}{CE}}$. Hem

Ex 34. *Volem trobar dos segments incommensurables en quadrat, de manera que la suma dels quadrats que els tenen com a costats és [una àrea] medial i el rectangle [que els té com a costats, una àrea] racional.*

[*Construcció.*] Siguin AB i BC els dos [segments] medials commensurables només en quadrat,
de manera que el rectangle [que els té com a costats] és racional
i l'excés del quadrat de [costat] AB sobre el de [costat] BC és el quadrat de [costat] un segment incommensurable [en longitud] amb AB. [Ex 31]

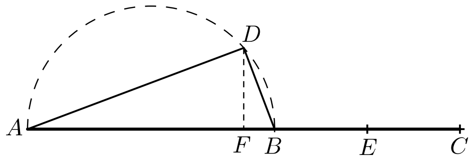


Figura Ex 34

Considerem el semicercle $\frown ADB$ de diàmetre AB.

Dimidiem BC per E.

Prenem un [rectangle] equivalent al quadrat de [costat] BE, aplicat per defecte a[l segment] AB, fent que hi manqui un quadrat.

I considerem també el rectangle de [costats] AF i FB. [Evi 28]

Aleshores, [el segment] AF és incommensurable en longitud amb FB. [Ex 18]

Pel punt F, tirem [el segment] FD perpendicular a AB.

Unim AD i DB. [P 1] ♣

[*Demostració.*] Atès que AF és incommensurable [en longitud] amb FB,
el rectangle de [costats] BA i AF també ho és amb el de [costats] AB i BF, [Ex 11]
i els de [costats] BA i AF, i AB i BF, equivalen als [quadrats] de costats AD i DB, respectivament. [Ex 32, lema]

Aleshores, el quadrat de AD també és incommensurable amb el de DB.

I, atès que el quadrat de [costat] AB és medial,
la suma dels quadrats de [costats] AD i DB també ho és.
[Eiii 31 i Ei 47]

de resoldre el sistema $x + y = u, xy = \frac{u^2}{4\,(1+q^2)}$. I, si fem $\alpha^2 = u\,x$ i $\beta^2 = u\,y$, aleshores α i β resolen el problema.

I, com que [el segment] BC és el doble del DF, [Ex 33]
el rectangle de [costats] AB i BC també ho és del rectangle de [costats] AB i FD,
i el de [costats] AB i BC és racional.

Per tant, el rectangle de [costats] AB i FD també ho és, [Ex 6 i Dx 1.4]
i el de [costats] AB i FD equival al de [costats] AD i DB. [Ex 32, lema]

D'això en resulta que el rectangle de [costats] AD i DB és racional. [per substitució]

Hem determinat, doncs, dos segments AD i DB incommensurables en quadrat,
de manera que la suma dels quadrats que els tenen com a costats és medial,
i el rectangle [que els té com a costats], racional.
I això és el que volíem demostrar.[610] ♠

Ex 35. *Volem trobar dos segments incommensurables en quadrat, de manera que la suma dels quadrats que els tenen com a costats és* [*una àrea*] *medial, i el rectangle que els té com a costats també és una àrea medial, però incommensurable amb la suma dels quadrats.*

[*Construcció.*] Siguin AB i BC dos [segments] medials commensurables només en quadrat que formen una [àrea] medial, de manera que l'excés del quadrat de costat AB sobre el de [costat] BC és el quadrat de costat un [segment] incommensurable [en longitud] amb AB. [Ex 32]

Considerem el semicercle ⌓ADB de diàmetre AB [P 3]
i la resta de la figura que hem fet en la [proposició] anterior. ♣

610. Els segments AD i DB tenen la longitud $\sqrt{\frac{\sqrt{1+q^2}+q}{2(1+q^2)}}\,u$ i $\sqrt{\frac{\sqrt{1+q^2}-q}{2(1+q^2)}}\,u$, en què u és la longitud de AB, i $q = \frac{DE}{CD}$. Com en la nota anterior, hom pot determinar de quina equació quadràtica són arrels els seus quadrats.

[*Demostració*.] Atès que AF és incommensurable en longitud amb FB, [Ex 18]
AD ho és en quadrat amb DB. [Ex 11]

I, com que el quadrat de [costat] AB és medial,
la suma dels quadrats de [costats] AD i DB també ho és. [Eiii 31 i Ei 47]

I ara, atès que el rectangle de [costats] AF i FB equival al [rectangle] de [costats] BE i DF,
BE és igual a DF. [Nc 1][611]

Per tant, BC és el doble de FD.

En conseqüència, el rectangle de [costats] AB i BC equival al doble del rectangle de [costats] AB i FD,
i el de [costats] AB i BC és medial.

Per tant, el rectangle de [costats] AB i FD també ho és, [Ex 32, porisma]
i equival al de [costats] AD i DB. [Ex 32, lema]

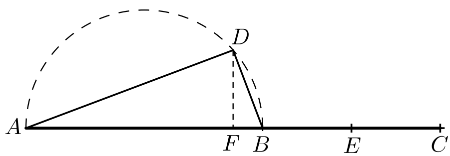


Figura Ex 35

Així doncs, el rectangle de [costats] AD i DB també és medial.

I, com que AB és incommensurable en longitud amb BC,
i CB és commensurable [en longitud] amb BE,
tenim que AB també és incommensurable en longitud amb BE. [Ex 13]

Per tant, el quadrat de AB és incommensurable amb el rectangle de [costats] AB i BE. [Ex 11]

Però la suma dels quadrats de [costats] AD i DB equival al quadrat de [costat] AB, [Ei 47]
i el rectangle de [costats] AB i FD
—és a dir, el de [costats] AD i DB—
ho fa al de [costats] AB i BE.

Aleshores, la suma dels quadrats de [costats] AD i DB és incommensurable amb el rectangle de [costats] AD i DB.

611. Vegeu la nota 607 (pàgina 263).

En definitiva, hem determinat dos segments AD i DB incommensurables en quadrat, la suma dels quadrats dels quals és medial i el rectangle [que els té com a costats], medial i incommensurable amb la suma dels seus quadrats.

I això és el que volíem demostrar.[612] ♠

Ex 36.[613] *Si ajuntem dos [segments] racionals commensurables només en quadrat, el [segment] total [o conjunt] és irracional i s'anomena [segment]* binomial.[614]

[*Demostració.*] Ajuntem els dos segments AB i BC racionals commensurables només en quadrat.[615]

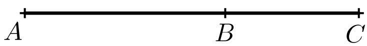


Figura Ex 36

Afirmo que el [segment] conjunt AC és irracional.

Atès que AB és incommensurable en longitud amb BC, ja que tots dos segments són commensurables només en quadrat i que AB és a BC com el rectangle de [costats] AB i BC al quadrat de [costat] BC, [Evi 1]
resulta que el rectangle de [costats] AB i BC és incommensurable amb el quadrat de [costat] BC. [Ex 11]

Però dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC és commensurable amb el rectangle de [costats] AB i BC, [Ex 6]
i la suma dels quadrats de [costats] AB i BC és commensurable amb el quadrat de [costat] BC
ja que els [segments] racionals AB i BC són commensurables només en quadrat. [Ex 15]

Per tant, dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC és incommensurable amb la suma dels quadrats de [costats] AB i BC. [Ex 13]

612. Els segments AD i DB tenen les longituds $\sqrt[4]{q'}\sqrt{\frac{1}{2}\,(1+\frac{q}{\sqrt{1+q^2}})}\,u$ i $\sqrt[4]{q'}\sqrt{\frac{1}{2}\,(1-\frac{q}{\sqrt{1+q^2}})}\,u$, en què u és la longitud de AB, i q i q' són com en la nota 605.

613. Les sis proposicions Ex 36, 37, 38, 39, 40 i 41 proporcionen condicions suficients per tal que la suma de dos [segments] racionals sigui binomial, bimedial, major o arrel quadrada.

614. El text grec diu: δύο ὀνομάτων, 'amb dos noms'.

615. Pla (2018), nota 278, p. 89.

I, *componendo*, dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC més la suma dels quadrats de [costats] AB i BC
—és a dir, el quadrat de [costat] AC— [EII 4]
és incommensurable amb la suma dels [quadrats] de [costats] AB i BC, [Ex 16]
i la suma dels quadrats de [costats] AB i BC és racional.

En definitiva, el quadrat de [costat] AC és irracional. [Dx 1.4]

Per tant, el segment AC, que s'anomena *binomial*, també ho és. [Dx 1.4]

I això és el que volíem demostrar.[616] ♠

Ex 37. *Si ajuntem dos [segments] medials commensurables només en quadrat que determinen una [àrea] racional, el [segment] total és irracional i s'anomena [segment]* primer bimedial.[617]

[*Demostració*.] Ajuntem[618] els dos [segments] medials AB i BC, commensurables només en quadrat, que determinen un rectangle [d'àrea] racional.

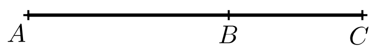


FIGURA Ex 37

Afirmo que el [segment] conjunt AC és irracional.

Atès que AB és incommensurable en longitud amb BC,
la suma dels quadrats de [costats] AB i BC també ho és amb dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC, d'acord amb la proposició anterior. [Ex 36]

I, *componendo*, la suma dels quadrats de [costats] AB i BC més dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC
—que és el quadrat de [costat] AC— [EII 4]
és incommensurable amb el rectangle de [costats] AB i BC, [Ex 16]
i el rectangle de [costats] AB i BC és racional
ja que hem suposat que tanquen una [àrea] racional.

---

616. Un segment binomial té una longitud que s'expressa $(1+\sqrt{q})\,u$, amb u racional. I un segment apòtom s'expressa $(1-\sqrt{q})\,u$ [Ex 73]. Els segments binomial i apòtom són les arrels positives de la quàrtica $x^4 - 2(1+q)\,u^2\,x^2 - (1-q)^2\,u^4 = 0$.

617. Textualment, diu: 'el primer dels dos medials', καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτην.

618. Vegeu la nota 615 (pàgina 269).

Aleshores, el quadrat de [costat] AC és irracional
i el segment AC, que s'anomena [segment] *primer bimedial*, també ho és. [Dx 1.4]
I això és el que volíem demostrar.[619] ♠

Ex 38. *Si ajuntem dos [segments] medials commensurables només en quadrat que determinen un rectangle [l'àrea del qual és] medial, el [segment] total és irracional i s'anomena [segment]* segon bimedial.[620]
Ajuntem[621] els dos [segments] AB i BC medials commensurables només en quadrat que determinen un rectangle [d'àrea] medial. [Ex 28]

Afirmo que [el segment] conjunt AC és irracional.
[*Demostració*.] Considerem un [segment] racional DE
i hi apliquem [el rectangle] DF equivalent al quadrat de AC.
Aquest rectangle produeix l'amplada DG. [Ei 44]

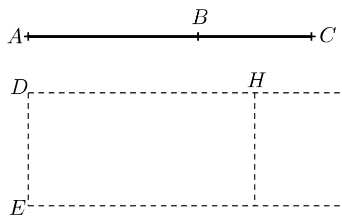


Figura Ex 38

I el quadrat de AC equival a la suma dels quadrats de [costats] AB i BC més dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC. [Eii 4]
A[l segment] DE hi apliquem el rectangle $\square\, EH$ equivalent a la suma dels quadrats de costats AB i BC.
I el residu $\square\, HF$ és igual a dues vegades el rectangle de AB i BC.
I, atès que [els dos segments] AB i BC són medials,
la suma dels quadrats de [costats] AB i BC també ho és.[622]
Però, per hipòtesi, dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC també és medial. [Ex 15 i 23]

619. Aleshores, un segment primer bimedial té una longitud de la forma $(\sqrt[4]{q}+\sqrt[4]{q^3})\,u$ i el corresponent primer apòtom d'un medial amb la forma $(\sqrt[4]{q}-\sqrt[4]{q^3})\,u$ [Ex 74]. Aquests segments són les arrels positives de l'equació de quart grau $x^4-2\sqrt{q}\,(1+q)\,u^2\,x^2+q\,(1-q)^2\,u^4=0$.

620. El text grec diu 'el segon dels dos medials', καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δυετέρα.

621. Vegeu la nota 615 (pàgina 269).

622. Ja que, per hipòtesi, els quadrats de costats AB i BC són commensurables [Ex 15 i Ex 23].

I sabem que [el rectangle] $\square\, EH$ equival a la [suma dels] quadrats de costats AB i BC,
i que $\square\, FH$ és igual a dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC.

Per tant, [els rectangles] $\square\, EH$ i $\square\, HF$ són medials, [per substitució]
i estan aplicats al [segment] racional DE.

D'això en resulta que [els rectangles] $\square\, DH$ i $\square\, HG$ són racionals i incommensurables en longitud amb DE. [Ex 22]

En conseqüència, com que AB és incommensurable en longitud amb BC,
i AB és a BC com el quadrat de [costat] AB al rectangle de [costats] AB i BC, [Ex 21, lema]
tenim que el quadrat de [costat] AB és incommensurable amb el rectangle de [costats] AB i BC. [Ex 11]

Però la suma dels quadrats de costats AB i BC és commensurable amb el quadrat de [costat] AB, [Ex 15]
i dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC ho és amb el rectangle de [costats] AB i BC. [Ex 6]

Per tant, la suma dels quadrats de [costats] AB i BC és incommensurable amb dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC. [Ex 13]

Però el rectangle $\square\, EH$ és igual a la suma dels quadrats de [costats] AB i BC,
i $\square\, HF$ és igual a dues vegades el [rectangle] de costats AB i BC.

Aleshores, el rectangle $\square\, EH$ és incommensurable amb el $\square\, HF$. [Dx 1.1]

I, [el segment] DH també ho és en longitud amb el HG. [Evi 1 i Ex 11]

I, a més, [els segments] DH i HG són racionals commensurables només en quadrat.

D'això en resulta que el [segment] conjunt DG és irracional. [Ex 36]

Però DE és racional
i el rectangle de costats [un segment] irracional i [un altre] racional és irracional. [Ex 20]

Per tant, l'àrea $\square\, DF$ és irracional.

En conseqüència, la seva arrel quadrada[623] també ho és. [Dx 1.4]

I, com que [el segment] AC és l'arrel quadrada de $\square\, DF$, és irracional.

L'anomenem *segon bimedial.*

I això és el que volíem demostrar.[624] ♠

Ex 39. *Si ajuntem dos segments incommensurables en quadrat la suma dels quadrats dels quals és racional i el rectangle* [*que els té com a costats*] *medial, el segment total és irracional i s'anomena* major.[625]

Ajuntem[626] els dos segments incommensurables en quadrat AB i BC que compleixen les condicions descrites prèviament. [Ex 33]

Afirmo que el [segment] conjunt AC és irracional.

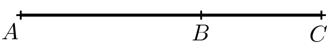


Figura Ex 39

[*Demostració.*] Atès que el rectangle de [costats] AB i BC és medial, tenim que dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC també ho és, [Ex 6 i Ex 32, porisma]
i que la suma dels quadrats de [costats] AB i BC és racional.

Aleshores, dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC és incommensurable amb la suma dels quadrats de [costats] AB i BC. [Dx 1.4]

Així doncs, la suma dels quadrats de [costats] AB i BC més dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC
—és a dir, el quadrat de [costat] AC— [Eii 4]
també és incommensurable amb la suma dels quadrats de costats AB i BC[, [Ex 16]
que és racional].

En definitiva, el quadrat de [costat] AC és irracional. [Dx 1.3]

Per tant, el segment AC, que anomenem *major*, també ho és. [Dx 1.4]

623. El costat d'un quadrat amb la mateixa àrea que el rectangle.

624. Un [segment] segon bimedial té una longitud que s'expressa $(\sqrt[4]{q} + \sqrt{q'}\,\sqrt[4]{q})\,u$, i el segon apòtom associat [Ex 75] ho fa amb $(\sqrt[4]{q} - \sqrt{q'}\,\sqrt[4]{q})\,u$. Totes dues formes són les arrels positives de la quàrtica $x^4 - 2\sqrt{q}\,(1+q')\,u^2\,x^2 + q\,(1-q')^2\,u^4 = 0$.

625. En grec, μείζων.

626. Vegeu la nota 615 (pàgina 269).

I això és el que volíem demostrar.[627] ♠

Ex 40. *Si ajuntem dos segments incommensurables en quadrat, la suma dels quadrats que els tenen com a costats és medial i el rectangle* [*que els té com a costats*] *és racional. Aleshores el segment total és irracional i s'anomena* arrel quadrada d'una àrea racional més una medial.[628]

Ajuntem[629] els dos segments AB i BC incommensurables en quadrat que satisfan les condicions establertes prèviament. [Ex 34]

Afirmo que el [segment] conjunt AC és irracional.

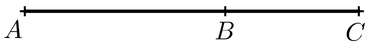


Figura Ex 40

[*Demostració*.] Atès que la suma dels quadrats de [costats] AB i BC és medial,

i que dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC és racional, tenim que aquesta suma és incommensurable amb dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC.

Per tant, el quadrat de [costat] AC també ho és amb dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC, [Ex 16]

i dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC és racional.

Així doncs, el quadrat de [costat] AC és irracional. [Dx 1.3]

I [el costat] AC, que anomenem *arrel quadrada d'una àrea racional més una medial*, també ho és. [Dx 1.4]

I això és el que volíem demostrar.[630] ♠

Ex 41. *Si ajuntem dos segments incommensurables en quadrat, la suma dels quadrats* [*que els tenen com a costats*] *és medial, el rectangle*

---

627. Un segment major té una longitud que s'expressa amb la forma $\left(\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{q}{\sqrt{1+q^2}})}+\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{q}{\sqrt{1+q^2}})}\right)u$, i el segment menor associat [Ex 76], amb la forma $\left(\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{q}{\sqrt{1+q^2}})}-\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{q}{\sqrt{1+q^2}})}\right)u$. Totes dues formes són les arrels positives de la quàrtica $x^4-2\,u^2\,x^2+\frac{q^2}{1+q^2}\,u^4=0$.

628. En grec: καλείσθω δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

629. Vegeu la nota 615 (pàgina 269).

630. El [segment] arrel quadrada d'una àrea racional més una [àrea] medial s'expressa $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+q^2}+q}{2\,(1+q^2)}}+\sqrt{\frac{\sqrt{1+q^2}-q}{2\,(1+q^2)}}\right)$. Aquest segment i el

[*que els té com a costats*] *també, a més de ser incommensurable amb la suma dels quadrats, aleshores el segment total és irracional i s'anomena* arrel quadrada de [la suma de] dues [àrees] medials.

Ajuntem[631] els dos segments AB i BC incommensurables en quadrat que compleixen les condicions prèviament descrites. [Ex 35]

Afirmo que el [segment] conjunt AC és irracional.

[*Demostració.*] Considerem el [segment] racional DE. [Dx 1.3]

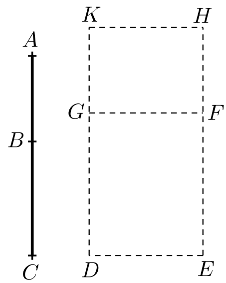


Figura Ex 41

Hi apliquem [el rectangle] $\square\, DF$ equivalent a la suma dels quadrats de [costats] AB i BC.

I també [el rectangle] $\square\, GH$ equivalent a dues vegades el de [costats] AB i BC.

Aleshores, el rectangle total $\square\, DH$ equival al quadrat de costat AC. [Eii 4]

I, atès que la suma dels quadrats de [costats] AB i BC és medial
i equival al [rectangle] $\square\, DF$,
aquest rectangle també és medial i està aplicat a[l segment] racional DE.

Aleshores, [el segment] DG és racional i incommensurable en longitud amb DE. [Ex 22]

Pel mateix [raonament, el segment] GK també és racional i incommensurable en longitud amb GF,
és a dir, amb [el segment] DE.

I, atès que [la suma de[ls quadrats de [costats] AB i BC és incommensurable amb dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC,
[el rectangle] $\square\, DF$ és incommensurable amb el $\square\, GH$.

Per tant, [el segment] DG també ho és amb el GK [Evi 1 i Ex 11]
i tots dos són racionals.

Aleshores, [els segments] DG i GK són racionals i commensurables només en quadrat.

---

corresponent amb signe negatiu, $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+q^2}+q}{2\,(1+q^2)}} - \sqrt{\frac{\sqrt{1+q^2}-q}{2\,(1+q^2)}}\right)$ [Ex 77], són les arrels positives de la quàrtica $x^4 - \frac{2}{\sqrt{1+q^2}}\,u^2\,x^2 + \frac{q^2}{(1+q^2)^2}\,u^4 = 0$.

631. Vegeu la nota 615 (pàgina 269).

Per tant, [el segment total] DK és irracional. L'anomenarem [*segment*] *binomial.* Ex 36]

Però [el segment] DE és racional.

Per tant, [el rectangle] $\square\, DH$ és irracional
i la seva arrel quadrada també. [Dx 1.4]

Però [el segment] AC és l'arrel quadrada de[l rectangle] $\square\, HD$.

En definitiva, el segment AC, que anomenem *arrel quadrada de la suma de dues [àrees] medials*, és irracional.

I això és el que volíem demostrar.[632] ♠

Ex 42, lema. *Els* [*segments*] *irracionals esmentats es divideixen en els segments dels quals són la suma i que produeixen els tipus prescrits.*

Considerem el segment AB dividit en parts diferents pels [punts] C i D.

Suposem que AC és més gran que DB.

Afirmo que la suma dels quadrats de [costats] AC i CB és més gran que [la suma d]els quadrats de [costats] AD i DB.

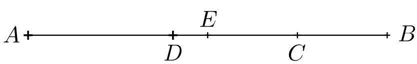


FIGURA Ex 42, lema

[*Demostració.*] Dimidiem AB pel punt E.

Atès que AC és més gran que DB, podem sostreure DC de tots dos.

Aleshores, el residu AD és més gran que el residu CB,[633]
i [els segments] AE i EB són iguals.

Per tant, DE és més petit que EC.

Així doncs, els punts C i D no es troben a la mateixa distància del punt de bisecció E.

I, atès que el rectangle de [costats] AC i CB més el quadrat de [costat] EC equival al [quadrat] de [costat] EB, [Eɪɪ 5]

---

632. La longitud del [segment] arrel quadrada de [la suma de] dues [àrees] medials s'expressa $\left(\sqrt[4]{q'}\,\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{q}{\sqrt{1+q^2}})}+\sqrt[4]{q'}\,\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{q}{\sqrt{1+q^2}})}\right)$. Aquesta forma i la negativa corresponent [Ex 78], $\left(\sqrt[4]{q'}\,\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{q}{\sqrt{1+q^2}})}-\sqrt[4]{q'}\,\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{q}{\sqrt{1+q^2}})}\right)$, són les arrels positives de la quàrtica $x^4-2\sqrt{q'}\,u^2\,x^2+\frac{q'\,q^2}{1+q^2}\,u^4=0$.

633. És un porisma de Nc 4′.

i que el rectangle de [costats] AD i DB més el quadrat de [costat] DE també ho és, [Eii 5]

resulta que el rectangle de [costats] AC i CB més el quadrat de [costat] EC equival al rectangle de [costats] AD i DB més el quadrat de [costat] DE. [Nc 1]

De tot això en resulta que el quadrat de [costat] DE és més petit que el de [costat] EC.[634]

Per tant, el [rectangle] que queda, [de costats] AC i CB, és més petit que el de [costats] AD i DB.

Aleshores, dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB és més petit que dues vegades el rectangle de [costats] AD i DB.

En definitiva, la suma dels quadrats de [costats] AC i CB és més gran que la suma dels quadrats de [costats] AD i DB.[635]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 42. *Un [segment] binomial només el podem dividir [en les seves parts*[636] *racionals i commensurables en potència] per un sol punt.*[637]

Sigui AB un [segment] binomial.

El dividim pel punt C en dues parts, de manera que AC i CB siguin [segments] racionals commensurables només en quadrat. [Ex 36]

Afirmo que no podem dividir AB en dos [segments] racionals commensurables només en quadrat per cap altre punt.

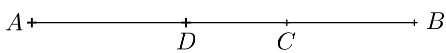


Figura Ex 42

[*Demostració.*] Suposem que el podem dividir pel punt D,

634. Aquí Euclides usa el fet que els quadrats de costats més grans són més grans. Vegeu Pla (2018), problema $52f_1$, p. 67, i el porisma de Nc 4′ de la nota 591.

635. Ja que $AC^2 + CB^2 + 2\,AC \times CB = AD^2 + DB^2 + 2\,AD \times DB = AB^2$.

636. Diu: ὀνοματα. Atesa la seva unicitat, que s'estableix en les proposicions Ex 42, 43, 44, 45, 46 i 47, els anomenem *termes components* o simplement, *components*, *termes* o *annex*.

637. En altres paraules, $q + \sqrt{q'} = q'' + \sqrt{q'''}$ només té una solució, que és $q'' = q$ i $q''' = q'$. I $\sqrt{q} + \sqrt{q'} = \sqrt{q''} + \sqrt{q'''}$ només té una solució: $q'' = q$ i $q''' = q'$ (o bé $q'' = q'$ i $q''' = q$). Aquí comencen les proposicions que afirmen la «unicitat» de la descomposició dels segments en el cas que es vulguin complir certes condicions.

de manera que [els segments] AD i DB també són racionals i commensurables només en quadrat.[638]

Aleshores, queda clar que [el segment] AC no és el segment DB.
a) Si són el mateix,[638]
[els segments] AD i CB també el són.

I, atès que AC és a CB com BD a DA,
i que AB queda dividit pel punt D de la mateixa manera que pel punt C,
queda establert l'oposat del que hem suposat. ♠

Per tant, [els segments] AC i DB són diferents.
b) Així, pel que hem establert, els punts C i D es troben a una distància diferent del [punt] de bisecció.

I, en conseqüència, la diferència entre la suma dels quadrats de [costats] AC i CB, i la dels quadrats de costats AD i DB
és també la diferència entre dues vegades el rectangle de [costats] AD i DB i dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB,
ja que la suma dels quadrats de [costats] AC i CB més dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB,
i la suma dels quadrats de [costats] AD i DB més dues vegades el rectangle de [costats] AD i DB equivalen al quadrat de [costat] AB.
[EII 4]

Però la suma dels quadrats de [costats] AC i CB difereix de la dels quadrats de [costats] AD i DB una [àrea] racional,
ja que [totes dues] ho són. [per compatibilitat]

Per tant, la diferència entre dues vegades el rectangle de [costats] AD i DB, i dues vegades el de [costats] AC i CB, és una [àrea] racional, [ja que totes dues àrees] són medials. [EX 21]
I això és impossible ♠
ja que l'excés d'una [àrea] medial sobre una altra no és mai una [àrea] racional. [EX 26]

En definitiva, el [segment] binomial no el podem dividir [en parts] per punts diferents.

Per tant, només el podem dividir per un sol punt.

638. Hipòtesi de l'absurd.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 43. *Un [segment] primer bimedial només el podem dividir [en els seus components]*[639] *per un sol punt.*[640]

Sigui que AB és un [segment] primer bimedial dividit per [el punt] C de manera que AC i CB siguin [segments] medials commensurables només en quadrat que determinin una [àrea] racional. [Ex 37]

Afirmo que no podem dividir AB per cap altre punt.

[*Demostració.*] Si és possible,[641] existeix un punt D que fa que [els segments] AD i DB també siguin medials i commensurables només en quadrat, i que determinin una [àrea] racional.

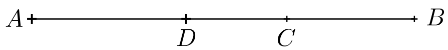


Figura Ex 43

Sabem que la diferència entre dues vegades el rectangle de costats AD i DB i dues vegades el de [costats] AC i CB és la mateixa que hi ha entre la suma dels quadrats de [costats] AC i CB, i la dels quadrats de [costats] AD i DB, [Ex 41, lema]
i que la diferència entre dues vegades el rectangle de [costats] AD i DB i dues vegades el de [costats] AC i CB és una [àrea] racional, ja que les dues àrees ho són. [per compatibilitat]

Per tant, la suma dels quadrats de [costats] AC i CB difereix de la dels quadrats de [costats] AD i DB una [àrea] racional.

I [totes dues àrees] són medials. I això és impossible. [Ex 26] ♠

Així doncs, un primer [segment] bimedial no el podem dividir en [els seus components] per dos punts diferents.

Per tant, ho podem fer per un sol punt.

I això és el que volíem demostrar. ♠

639. Vegeu la nota 636 (pàgina 277).

640. En altres paraules, $\sqrt[4]{q}+\sqrt[4]{q^3}=\sqrt[4]{q'}+\sqrt[4]{q'^3}$ només té una solució, és a dir, $q'=q$.

641. Hipòtesi de l'absurd.

Ex 44. *Un [segment] segon bimedial només el podem dividir en [els seus] components per un sol punt.*[642]

Sigui AB un [segment] segon bimedial dividit per un punt C, de manera que les parts AC i BC siguin [segments] medials commensurables només en quadrat, i formin una [àrea] medial. [Ex 38]

És clar que C no es troba al punt mitjà
ja que [AC i BC] no són commensurables en longitud.

Afirmo que no podem dividir AB per cap altre punt.

[*Demostració.*] Si és possible,[643]
existeix [el punt] D que divideix [AB] de manera que AC i DB són diferents
i que AC és el més gran.

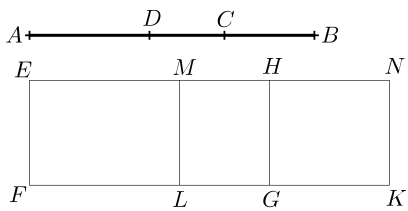


Figura Ex 44

Així doncs, és clar que, com hem vist abans, la suma dels quadrats de [costats] AD i DB també és més petita que la dels quadrats de costats AC i CB, [Ex 42, lema]
i AD i DB són [segments] medials commensurables només en quadrat que determinen una àrea medial.

Considerem el [segment] racional EF [Dx 1.3]
i hi apliquem el rectangle $\square\, EK$ equivalent al quadrat de [costat] AB. [Evi 12 i 16]

[Del rectangle $\square\, EK$] sostraiem $\square\, EG$, que equival a la suma dels quadrats de [costats] AC i CB.

Aleshores, el residu $\square\, HK$ equival a dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB. [Eii 4]

De bell nou, [del rectangle $\square\, EK$] sostraiem $\square\, EL$,
que equival a la suma dels quadrats de [costats] AD i DB que,
com hem vist, és més petita que la suma dels quadrats de [costats] AC i CB. [Ex 41, lema]

642. En altres paraules, $\sqrt[4]{q}+\frac{\sqrt{q'}}{\sqrt[4]{q}} = \sqrt[4]{q''}+\frac{\sqrt{q'''}}{\sqrt[4]{q''}}$ només té una solució, és a dir, $q''=q$ i $q'''=q'$.

643. Hipòtesi de l'absurd.

Aleshores, el residu $\square MK$ equival a dues vegades el rectangle de [costats] AD i DB.

I, atès que la suma dels quadrats de [costats] AC i CB és [una àrea] medial,
[el rectangle] $\square EG$ també ho és. [per substitució]

Aquesta suma està aplicada al [segment] racional EF.

Aleshores, [el segment] EH és racional i incommensurable en longitud amb el EF. [Ex 22]

Pel mateix [raonament], [el segment] HN també ho és amb EF.

I, atès que [els segments] AC i CB són medials commensurables només en quadrat,
AC és incommensurable en longitud amb CB.

Ara bé, AC és a CB com el quadrat de [costat] AC al rectangle de [costats] AC i CB. [Ex 21, lema]

Per tant, el quadrat de [costat] AC és incommensurable amb el rectangle de [costats] AC i CB. [Ex 11]

Però la suma dels quadrats de [costats] AC i CB és commensurable amb el quadrat de [costat] AC
ja que AC i CB són commensurables en quadrat, [Ex 15]
i dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB és commensurable amb el rectangle de [costats] AC i CB. [Ex 6]

Per tant, la suma dels quadrats de [costats] AC i CB és incommensurable amb dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB. [Ex 13]

Però $\square EG$ equival a la suma dels quadrats de [costats] AC i CB,
i $\square HK$ ho fa a dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB.

Aleshores, [els rectangles] $\square EG$ i $\square HK$ són incommensurables.

I, per tant, [el segment] EH també ho és en longitud amb [el segment] HN, [EVI 1 i Ex 11]
i tots dos són racionals.

En conseqüència, [els segments] EH i HN són racionals commensurables només en quadrat.

Però, si ajuntem[644] dos [segments] racionals commensurables només en quadrat, el [segment] total és un irracional binomial. [Ex 36]

644. Vegeu la nota 615 (pàgina 269).

Per tant, [el segment] EN és un [segment] binomial dividit per H [en dues parts].

D'això en resulta, pel mateix raonament, que [els segments] EM i MN són racionals commensurables només en quadrat.

Per tant, [el segment] EN és binomial i l'hem dividit [en dues parts] pels [dos punts] H i M.

I això és impossible. [Ex 42] ♠

Així doncs, EH i MN són diferents
ja que la suma dels quadrats de [costats] AC i CB és més gran que la dels quadrats de [costats] AD i DB.

Però la suma dels quadrats de [costats] AD i DB és més gran que dues vegades el rectangle de [costats] AD i DB. [Ex 59, lema]

Per tant, la suma dels quadrats de [costats] AC i CB,
que és [el rectangle] $\square\, EG$,
també és més gran que dues vegades el rectangle de [costats] AD i DB, que és [el rectangle] $\square\, MK$. [Eii 7][645]

En conseqüència, [el segment] EH és més gran que el MN. [Dv 5 i Evi 1]

Per tant, [el segment] EH no és igual al MN.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 45. *Un* [*segment*] *major només el podem dividir en* [*els seus*] *components per un sol punt.*[646]

Sigui AB un [segment] major dividit per C de manera que AC i CB siguin incommensurables en quadrat;
la suma dels quadrats de costats AC i CB, una àrea racional,
i el rectangle de [costats] AC i CD, medial. [Ex 30]

Afirmo que no podem dividir AB per cap altre punt.

[*Demostració.*] Suposem que el podem dividir per [un punt] D,
de manera que AD i DB també són incommensurables en quadrat,
que la suma dels quadrats de [costats] AD i DB és [una àrea] racional

645. De fet, n'és un porisma que Euclides admet sense haver-lo establert.

646. En altres paraules, $\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{q}{\sqrt{1+q^2}})} + \sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{q}{\sqrt{1+q^2}})} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{q'}{\sqrt{1+q'^2}})} + \sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{q'}{\sqrt{1+q'^2}})}$ només admet una solució, $q = q'$.

i que el [rectangle de costats] AD i DB és medial.[647]

Sigui quina sigui [l'àrea] en la qual la suma dels quadrats de [costats] AC i CB excedeix la dels quadrats de [costats] AD i DB, [l'àrea] dues vegades el rectangle de [costats] AD i DB excedeix la mateixa àrea dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB.

Però l'excés de la suma dels quadrats de [costats] AC i CB sobre la dels quadrats de [costats] AD i DB és una [àrea] racional ja que totes dues ho són.

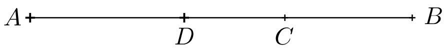


FIGURA EX 45

Per tant, l'excés de dues vegades el rectangle de [costats] AD i DB sobre dues vegades el de [costats] AC i CB també és una [àrea] racional[, malgrat que tots dos rectangles són àrees medials].

I això és impossible. [Ex 26] ♠

En definitiva, no podem dividir en components un [segment] major per [dos] punts.

Per tant, només ho podem fer per un sol punt.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 46. *L'arrel quadrada d'una* [*àrea*] *racional més una* [*àrea*] *medial només la podem dividir* [*en components*] *per un sol punt.*[648]

Sigui AB l'arrel quadrada d'una àrea racional més una [àrea] medial dividida [en dos components] AC i CB incommensurables en quadrat per C, de manera que la suma dels quadrats de [costats] AC i CB és medial, i dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB racional. [Ex 40]

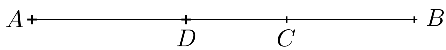


FIGURA EX 46

Afirmo que no podem dividir AB per cap altre punt.

647. Hipòtesi de l'absurd.

648. És a dir, $\sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+q^2}+q}{1+q^2}}+\sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+q^2}-q}{1+q^2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+q'^2}+q'}{1+q'^2}}+\sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+q'^2}-q'}{1+q'^2}}$ només admet una solució, $q=q'$.

[*Demostració*.] Si és possible,
existeix un punt D que el divideix en dos components AD i DB incommensurables en quadrat,
de manera que la suma dels quadrats de [costats] AD i DB és medial, i dues vegades el rectangle de [costats] AD i DB, racional.[649]

Però l'àrea en la qual dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB excedeix dues vegades el rectangle de [costats] AD i DB
és l'àrea que la suma dels quadrats de [costats] AD i DB excedeix la dels quadrats de [costats] AC i CB.

I dues vegades l'excés del rectangle de [costats] AC i CB sobre dues vegades el rectangle de [costats] AD i DB és una [àrea] racional.

Per tant, l'excés de la suma dels quadrats de [costats] AD i DB sobre la dels quadrats de [costats] AC i CB també és una [àrea] racional
ja que totes dues són [àrees] medials. I això és impossible. [Ex 26]

En conseqüència, no és possible dividir l'arrel quadrada d'una àrea racional més una [àrea] medial [en components] per punts diferents.

Per tant, només la podem dividir per un [sol] punt.
I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 47. *L'arrel quadrada de la suma de dues* [*àrees*] *medials només la podem dividir* [*en components*] *per un sol punt.*[650]
Sigui AB l'arrel quadrada de la suma de dues [àrees] medials dividida per C
de manera que AC i CB siguin incommensurables en quadrat,
i que la suma dels quadrats de [costats] AC i CB, i el rectangle de [costats] AC i CB, siguin medials.

A més, aquest rectangle és incommensurable amb la suma dels quadrats [de costats AC i CB]. [Ex 41]

Afirmo que no podem dividir AB per cap altre punt.

---

649. Hipòtesi de l'absurd.

650. En altres paraules, $\sqrt[4]{q'}\sqrt{1+\frac{q}{\sqrt{1+q^2}}} + \sqrt[4]{q'}\sqrt{1-\frac{q}{\sqrt{1+q^2}}} = \sqrt[4]{q'''}\sqrt{1+\frac{q''}{\sqrt{1+q''^2}}} + \sqrt[4]{q'''}\sqrt{1+\frac{q''}{\sqrt{1+q''^2}}}$ només té una solució, que és $q' = q'''$ i $q = q''$.

Si és possible,[651]
existeix un punt D de manera que [el segment] AC no coincideix amb el DB.

Suposem que AC és el més gran de tots dos.

Considerem un segment racional EF
i els [rectangles] $\square\, EG$ equivalent a la suma dels quadrats de [costats] AC i CB,
i $\square\, HK$ equivalent a dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB,
aplicats a[l segment] EF. [Evi 12 i 16]

Aleshores, el [rectangle] complet $\square\, EK$ equival al quadrat de costat AB. [Eii 4]

De bell nou, sigui $\square\, EL$ [el rectangle] equivalent a la suma dels quadrats de [costats] AD i DB aplicat a[l segment] EF. [Evi 12 i 16]

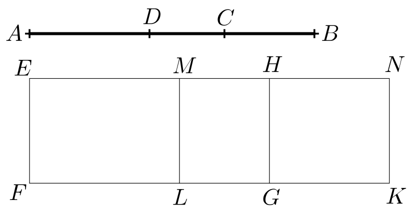


Figura Ex 47

Aleshores, el residu —és a dir, dues vegades el rectangle de [costats] AD i DB— equival al residu $\square\, MK$.

I, atès que hem suposat que la suma dels quadrats de [costats] AC i CB és medial,
[el rectangle] $\square\, EG$ també ho és
i està aplicat al [segment] racional EF.

Així doncs, [el segment] HE és racional incommensurable en longitud amb [el segment] EF. [Ex 22]

Pel mateix [raonament], [el segment] HN també ho és.

I, atès que la suma dels quadrats de [costats] AC i CB és incommensurable amb dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB,
[els rectangles] $\square\, EG$ i $\square\, GN$ també ho són.

Per tant, [el segment] EH també ho és amb [el segment] HN, [Evi 1 i Ex 11]
i tots dos són racionals.

651. Hipòtesi de l'absurd.

Així doncs, [els segments] EH i HN són racionals commensurables només en quadrat.

I, en definitiva, [el segment] EN és binomial dividit [en components] per H. [Ex 36]

De manera semblant, podem veure que també l'hem dividit per M i hi hem determinat [els segments] diferents EM i MN.

En definitiva, hem dividit un [segment] binomial [en components diferents] per punts diferents. I això és impossible. [Ex 42]

D'això en resulta que no podem dividir l'arrel quadrada de la suma de dues [àrees] medials [en components] per [dos] punts.

Per tant, només podem fer-ho per un [sol] punt.

I això és el que volíem demostrar. ♠

p. 29 A.2a_2 El segon grup de definicions (Ὅροι)

Dx 2.1. Donats un [segment] racional i un de binomial dividit en els seus [components], de manera que l'excés del quadrat de costat més gran sobre [el quadrat de costat] més petit és el quadrat de costat [un segment] commensurable en longitud [amb el gran], si el component més gran és commensurable en longitud amb el [segment] racional [donat], el [segment] total s'anomena [segment] *primer binomial.*

Dx 2.2. Si el component és commensurable en longitud amb el [segment] racional [donat], el [segment] total s'anomena *segon binomial.*

Dx 2.3. Si cap component és commensurable en longitud amb el [segment] racional [donat], el [segment] total s'anomena *tercer binomial.*

Dx 2.4. L'excés del quadrat de costat el component més gran sobre el de [costat] el component més petit és el quadrat de costat [un segment] incommensurable en longitud amb el gran. Si el component més gran és commensurable en longitud amb el [segment] racional [donat], el [segment] total s'anomena *quart binomial.*

Dx 2.5. Si el component petit [és commensurable], el segment total s'anomena *cinquè binomial.*

Dx 2.6. Si cap component [és commensurable], el segment total s'anomena *sisè binomial*.

A.2b_2 El segon grup de proposicions

p. 30

Ex 48. *Volem determinar un [segment] primer binomial.*[652]

Considerem dos nombres AC i CB, de manera que la raó entre la suma AB i BC és la d'un nombre quadrat i un altre,
i que la raó entre ella i CA no ho és. [Ex 29, lema I]
[*Construcció.*] Considerem un [segment] racional D [Dx 1.3]
i [un] EF commensurable en longitud amb D. [Ex 5] ♣
[*Demostració.*] *a*) Òbviament, EF també és racional. [Dx 1.3]

Suposem [que hem determinat EF i FG de manera] que el nombre BA és a AC com el quadrat de [costat el segment] EF ho és al de [costat el segment] FG, [Ex 6, porisma]

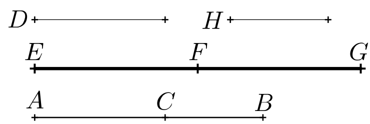


Figura Ex 48

i que la raó que hi ha entre AB i AC és la de dos nombres.

Aleshores, la raó que hi ha entre el quadrat de [costat] EF i el de [costat] FG també és la de dos nombres.

Per tant, el quadrat de [costat] EF és commensurable amb el de [costat] FG, [Ex 6]
i EF és racional.

D'això en resulta que FG també ho és. [Dx 1.3]

I, atès que la raó que hi ha entre BA i AC no és la que hi ha entre dos nombres quadrats,
la raó entre el quadrat de [costat] EF i el de [costat] FG tampoc no ho és.

652. Les sis proposicions que segueixen, Ex 48, 49, 50, 51, 52 i 53, són problemes. Descriuen la manera com es determinen els segments de cada una de les classes de segments descrites en les definicions precedents. Euclides hi tracta els nombres com a magnituds, en el sentit que les raons entre dos nombres poden ser iguals a les que hi ha entre dues magnituds —longituds o àrees.

Aleshores, EF és incommensurable en longitud amb FG. [Ex 9]

Per tant, [els segments] EF i FG són racionals i commensurables només en quadrat.

I EG és un [segment] binomial. [Ex 36] ♠

Afirmo que és[, concretament,] un [segment] primer [binomial].

b) Atès que el nombre BA és a AC com el quadrat de [costat] EF al de [costat] FG,
i que BA és més gran que AC;
el quadrat de [costat] EF és més gran que el de [costat] FG.
[Dv 7 i Ev 14]

Per tant, [podem determinar un quadrat de costat H,[653]
de manera que] la suma dels quadrats de [costats] FG i H és equivalent al quadrat de [costat] EF.

I, atès que BA és a AC com el quadrat de [costat] EF al de [costat] FG;
convertendo, AB és a BC com el quadrat de [costat] EF al de [costat] H, [Ev 19, porisma]
i la raó entre AB i BC és la de dos nombres quadrats.

Per tant, la raó entre el quadrat de [costat] EF i el de [costat] H és la de dos [nombres] quadrats.

En definitiva, EF és commensurable en longitud amb H. [Ex 9]

Per tant, l'excés del quadrat de costat EF sobre el de [costat] FG és el quadrat de costat commensurable [en longitud] amb EF,
EF i FG són [segments] racionals
i EF és commensurable en longitud amb D.

Així doncs, EF és un [segment] primer binomial.[654] [Dx 2.1] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 49. *Volem determinar un* [*segment*] *segon binomial.*

Considerem els nombres AC i CB, de manera que la raó entre la suma AB i BC és la de dos [nombres] quadrats,

---

653. És un porisma d'Evi 25.

654. Si el segment racional val la unitat, la longitud del [segment] primer binomial és $q+q\sqrt{1-q'^2}$. I aquest i el primer apòtom, $q-q\sqrt{1-q'^2}$ [Ex 85], són les arrels de l'equació quadràtica $x^2-2\,q\,x+q^2\,q'^2=0$.

i la raó entre AB i AC no ho és. [Ex 29, lema 1]

[*Construcció.*] Siguin D un [segment] racional
i EF un [segment] commensurable en longitud amb ell.

[*Demostració.*] *a*) Aleshores, òbviament, EF és un [segment] racional. [Dx 1.3]

Hem vist [que podem considerar] que el nombre CA és a AB com el quadrat de [costat] EF al de [costat] FG. [Ex 6, porisma]

Aleshores, el quadrat de [costat] EF és commensurable amb el de [costat] FG. [Ex 6]

Per tant, FG també és un [segment] racional. [Dx 1.3 i 1.4]

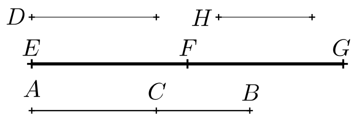


Figura Ex 49

I, atès que la raó de CA i AB no és la de dos [nombres] quadrats,
la raó que hi ha entre el quadrat de [costat] EF i el de [costat] FG tampoc no ho és. [Nc 1]

Aleshores, EF és incommensurable en longitud amb FG. [Ex 9]

En conseqüència, EF i FG són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

Per tant, EG és un [segment] binomial. [Ex 36] ♠

Concretament, un [segment] segon [binomial].

b) Com que, *invertendo*, el nombre BA és a AC com el quadrat de [costat] GF al de [costat] FE, [Ev 7, porisma]
i BA és més gran que AC;
el quadrat de [costat] GF també ho és que el de [costat] FE. [Dv 7 i Ev 14]

Sigui la suma dels quadrats de [costats] EF i H equivalent al quadrat de [costat] GF.[655]

Convertendo, AB és a BC com el quadrat de [costat] FG al de [costat] H. [Ev 19, porisma]

Però la raó entre AB i BC és la de dos nombres quadrats.

Per tant, la raó entre el quadrat de [costat] FG i el de [costat] H també ho és.

655. Vegeu la nota 653 (pàgina 288).

D'això en resulta que FG és commensurable en longitud amb H. [Ex 9]

Per tant, l'excés del quadrat de [costat] FG sobre el de [costat] FE és el quadrat de costat commensurable amb FG,
i FG i FE són [segments] racionals commensurables només en quadrat,
i el terme[656] més petit EF és commensurable en longitud amb el segment D considerat.

En definitiva, EG és un [segment] segon binomial. [Dx 2.2] ♠
I això és el que volíem demostrar.[657] ♠

Ex 50. *Volem determinar un [segment] tercer binomial.*

[*Construcció* i *demostració*.] *a*) Considerem dos nombres AC i CB, de manera que la raó entre la suma AB i BC és la de dos [nombres] quadrats, i, en canvi, la raó entre AB i AC no ho és.

A més, considerem un nombre no quadrat D, de manera que les raons que té amb BA i amb AC no són les de nombres quadrats.

I considerem un segment racional E, de manera que D [és] amb AB com el quadrat de [costat] E al de [costat] FG. [Ex 6, porisma]

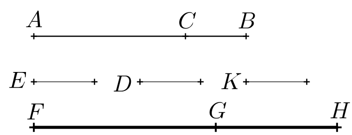


FIGURA Ex 50

Aleshores, el quadrat de [costat] E és commensurable amb el de [costat] FG, [Ex 6]
i E és [un segment] racional.

Per tant, FG també ho és. [Dx 1.3]

I, atès que la raó entre D i AB no és la de dos [nombres] quadrats,
la que hi ha entre el quadrat de [costat] E i el de [costat] FG tampoc. [Nc 1][658]

Per tant, E és incommensurable en longitud amb FG. [Ex 9]

656. Vegeu la nota 636 (pàgina 277).

657. Si el segment racional és la unitat, la longitud del [segment] segon binomial és $\frac{q}{\sqrt{1-q'^2}}+q$. I aquest i el segon apòtom [Ex 86], $\frac{q}{\sqrt{1-q'^2}}-q$, són les arrels de l'equació quadràtica $x^2-\frac{2\,q}{\sqrt{1-q'^2}}\,x+q^2\,\frac{q'^2}{1-q'^2}=0$.

658. Per reducció a l'absurd.

De bell nou, ho fem de manera que el nombre BA [és] al [nombre] AC com el quadrat de [costat] FG al de [costat] GH. [Ex 6, porisma]

Aleshores, el quadrat de [costat] FG és commensurable amb el de [costat] GH, [Ex 6]

i FG és un [segment] racional.

Per tant, [el segment] GH també [ho és].

I, atès que la raó entre BA i AC no és la de dos nombres quadrats, la que hi ha entre el quadrat de [costat] FG i el de [costat] HG tampoc. [Nc 1]

Així doncs, [el segment] FG és incommensurable en longitud amb el GH, [Ex 9]

i tots dos són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

En definitiva, FH és un [segment] binomial. [Ex 36] ♠ ♣

Afirmo que és[, concretament,] un [segment] tercer [binomial].

b) Atès que D és a AB com el quadrat de [costat] E al de [costat] FG, i que BA és a AC com el quadrat de [costat] FG al de [costat] GH; *ex æquali*, D és a AC com el quadrat de [costat] E al de [costat] GH. [Ev 22]

Però, alhora, la raó entre D i AC no és la de dos nombres quadrats.

Per tant, la raó entre el quadrat de [costat] E i el de [costat] GH tampoc no és la d'un [nombre] quadrat i un altre.

Així doncs, E és incommensurable en longitud amb GH. [Ex 9]

I, atès que BA és a AC com el quadrat de [costat] FG al de [costat] GH,

el quadrat de [costat] FG és més gran que el de [costat] GH. [Dv 7 i Ev 14]

Considerem la suma dels quadrats de [costats] GH i K equivalent al quadrat de [costat] FG.[659]

Aleshores, *convertendo*, AB és a BC com el quadrat de [costat] FG al de [costat] K, [Ev 19, porisma]

i la raó entre AB i BC és la de dos [nombres] quadrats.

Aleshores, la raó entre el quadrat de [costat] FG i el de [costat] K també. [Nc 1]

659. Vegeu la nota 652 (pàgina 287).

Per tant, FG és commensurable en longitud amb K, [Ex 9]
l'excés del quadrat de costat FG sobre el de [costat] GH és el quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud] amb FG,
i FG i GH són racionals commensurables només en quadrat.

Però cap no ho és en longitud amb E.

En definitiva, [el segment] FH és tercer binomial.[660]

I això és el que volíem demostrar. [Dx 2.3] ♠ ♠

Ex 51. *Volem determinar un [segment] quart binomial.*

[*Construcció* i *demostració*.] *a*) Considerem els dos nombres AC i CB, de manera que les raons entre AB i BC, i de AB i AC, no són les de dos [nombres] quadrats. [Ex 28, lema]

Considerem el [segment] racional D i [el segment] EF commensurable en longitud amb ell. [Dx 1.1 i Dx 1.2]

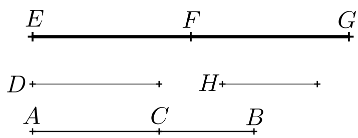


FIGURA Ex 51

Aleshores, òbviament, EF és un [segment] racional. [Dx 1.3]

Atès que [podem considerar que] el nombre BA és a AC com el quadrat de [costat] EF al de [costat] FG, [Ex 6, porisma]
el quadrat de [costat] EF és commensurable amb el de [costat] FG. [Ex 6]

Per tant, FG és un [segment] racional.

I, com que la raó entre BA i AC no és la de dos [nombres] quadrats, la que hi ha entre el quadrat de [costat] EF i el de [costat] FG tampoc. [Nc 1]

Aleshores, EF és incommensurable en longitud amb FG. [Ex 9]

Per tant, EF i FG són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

En definitiva, EG és un [segment] binomial. [Ex 36] ♠ ♣

Afirmo que[, concretament,] és un [segment] quart [binomial].

---

660. Si el segment racional val la unitat, la longitud del tercer binomial val $\sqrt{q}\,(1+\sqrt{1-q'^2})$. I aquest i el tercer apòtom, $\sqrt{q}\,(1-\sqrt{1-q'^2})$ [Ex 87], són les arrels de l'equació quadràtica $x^2 - 2\sqrt{q} + q\,q'^2 = 0$.

b) Atès que BA és a AC com el quadrat de [costat] EF al de [costat] FG
[i que BA és més gran que AC],
el quadrat de [costat] EF és més gran que el de [costat] FG.
[D v 7 i Ev 14]

Considerem la suma dels quadrats de [costats] FG i H equivalent al quadrat de [costat] EF.[661]

Convertendo, el nombre AB és a BC com el quadrat de [costat] EF al de [costat] H, [Ev 19, porisma]
i la raó entre AB i BC no és la de dos [nombres] quadrats.

Resulta, doncs, que la raó entre el quadrat de [costat] EF i el de [costat] H tampoc. [Nc 1]

Aleshores, EF és incommensurable en longitud amb H. [Ex 9]

Per tant, l'excés del quadrat de costat EF sobre el de [costat] GF és el quadrat de costat [un segment] incommensurable [en longitud] amb [el segment] EF,
[tots dos segments] EF i FG són [segments] racionals commensurables només en quadrat,
i EF ho és en longitud amb D.

En definitiva, [el segment] EG és un quart binomial.[662]
[Dx 2.4] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 52. *Volem determinar un* [*segment*] *cinquè binomial.*

[*Construcció.*] Considerem dos nombres AC i CB,
de manera que la raó entre la suma AB i cada un no és la de dos [nombres] quadrats. [Ex 38, lema]

A més, considerem D un segment racional [Dx 1.3]
i EF [un segment] commensurable [en longitud] amb ell. [Dx 1.1]

En aquest cas, EF és [un segment] racional. [Dx 1.3]

---

661. Vegeu la nota 652 (pàgina 287).

662. Si el segment racional és la unitat, la longitud del segment quart binomial és $q\,(1+\frac{1}{\sqrt{1+q'}})$. I aquest i el quart apòtom, $q\,(1-\frac{1}{\sqrt{1+q'}})$ [Ex 88], són les arrels de l'equació quadràtica $x^2 - 2\,k\,x + \frac{q^2\,q'}{1+q'} = 0$.

I, a més, sigui la raó de CA i AB com la que hi ha entre el quadrat de [costat] EF i el de [costat] FG. [Ex 6, porisma]

Però la raó entre CA i AB no és la de dos [nombres] quadrats. ♣

[*Demostració.*] *a*) Aleshores la raó entre el quadrat de [costat] EF i el de [costat] FG tampoc. [Nc 1][663]

Per tant, EF i FG són [segments] racionals commensurables només en quadrat. [EX 9]

En conseqüència, EG és un [segment] binomial. [Ex 36] ♠

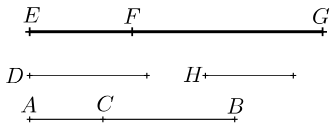


Figura Ex 52

Afirmo que és[, concretament, un segment] cinquè [binomial].

b) Però CA és a AB com el quadrat de [costat] EF al de [costat] FG.

Per tant, *invertendo*, BA és a AC com el quadrat de [costat] FG al de [costat] FE. [Ev 7, porisma]

Aleshores, el quadrat de [costat] GF és més gran que el de [costat] FE. [Ev 14]

En conseqüència, la suma dels quadrats de [costats] EF i H equival al quadrat de [costat] GF.[663]

Convertendo, el nombre AB és a BC com el quadrat de [costat] GF al de [costat] H, [Ev 19, porisma]

i la raó entre AB i BC no és la de dos [nombres] quadrats.

Per tant, la raó entre el quadrat de [costat] FG i el de [costat] H tampoc. [Nc 1][663]

Per tant, FG és incommensurable en longitud amb H. [Ex 9]

En conseqüència, l'excés del quadrat de costat FG sobre el de [costat] FE és el quadrat de costat [un segment] incommensurable [en longitud] amb FG,

GF i FE són [segments] racionals commensurables només en quadrat i el terme[664] petit EF ho és en longitud amb el [segment] racional D [considerat prèviament].

663. Vegeu la nota 652 (pàgina 287).
664. Vegeu la nota 636 (pàgina 277).

En definitiva, EG és un [segment] cinquè binomial.[665]

[Dx 2.5] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 53. *Volem determinar un [segment] sisè binomial.*

[*Construcció.*] Considerem dos nombres AC i CB,
de manera que la raó entre AB i cada un no és la de dos [nombres] quadrats.

A més, considerem un nombre D que no és un quadrat [diferent dels anteriors]
i que no té amb [els nombres] BA i AC la raó de dos nombres quadrats. [Ex 28, lema 1]

Considerem un [segment] racional E de manera que D és a AB com el quadrat de [costat] E al de [costat] FG. [Ex 6, porisma]

Aleshores, el quadrat de [costat] E és commensurable amb el de [costat] FG, [Ex 6]
i E és racional.

Per tant, FG també és [un segment] racional. [Dx 1.3]

Atès que la raó entre D i AB no és la de dos [nombres] quadrats, la que hi ha entre el quadrat de [costat] E i el de [costat] FG, tampoc. [Nc 1][666]

Aleshores, E és incommensurable en longitud amb FG. [Ex 9]

De bell nou, considerem que hem imposat que BA és a AC com el quadrat de [costat] FG al de [costat] GH. [Ex 6, porisma]

Els quadrats de [costats] FG i HG són commensurables [Ex 6]
i el quadrat de [costat] HG és racional. [Dx 1.4]

Per tant, HG també és racional. [Dx 1.3] ♣

[*Demostració.*] *a*) I, atès que la raó entre BA i AC no és la de dos [nombres] quadrats, la que hi ha entre el quadrat de [costat] FG i el de [costat] GH, tampoc. [Nc 1][666]

Per tant, FG és incommensurable en longitud amb GH. [Ex9]

665. Si el segment racional val la unitat, el segment cinquè binomial val $q\,(\sqrt{q'^2+1}+1)$. I aquest i el cinquè apòtom, $q\,(\sqrt{q'^2+1}-1)$ [Ex 89], són les arrels de l'equació quadràtica $x^2 - 2q\sqrt{1+q'^2}\,x + q^2q'^2 = 0$.

666. Vegeu la nota 652 (pàgina 287).

I [els segments] FG i GH són racionals commensurables només en quadrat.

En conseqüència, FH és un [segment] binomial. [Ex 36] ♠

Volem demostrar que és, concretament, un [segment] sisè binomial.

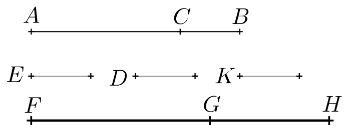


FIGURA EX 53

b) Atès que D és a AB com el quadrat de [costat] E al de [costat] FG, i també que BA és a AC com el quadrat de [costat] FG al de [costat] GH; *ex æquali*, D és a AC com el quadrat de [costat] E al de [costat] GH, [Ev 22]
i la raó entre ells no és la de dos [nombres] quadrats,
ni ho és la que hi ha entre el quadrat de [costat] E i el de [costat] GH. [Nc 1][667]

Així doncs, E és incommensurable en longitud amb GH [Ex 9]
i, tal com hem vist, també ho és amb FG.

Per tant, FG i GH també ho són amb E.

I, atès que BA és a AC com el quadrat de [costat] FG al de [costat] GH,
el quadrat de [costat] FG és més gran que el de [costat] GH. [Ev 14]

En definitiva, la suma dels quadrats de [costats] GH i K equival al quadrat de [costat] FG.[667]

Aleshores, *convertendo*, AB és a BC com el quadrat de [costat] FG al de [costat] K, [Ev 19, porisma]
i la raó entre AB i BC no és la de dos [nombres] quadrats.

Per tant, la raó entre el quadrat de [costat] FG i el de [costat] K, tampoc. [Nc 1][667]

Aleshores, FG és incommensurable en longitud amb K, [Ex 9]
l'excés del quadrat de costat FG sobre el de [costat] GH és el quadrat de costat incommensurable [en longitud] amb FG,
FG i GH són [segments] racionals commensurables només en quadrat,
i cap no és commensurable en longitud amb el [segment] racional E [considerat prèviament].

---

667. Vegeu la nota 652 (pàgina 287).

En definitiva, FH és un [segment] sisè binomial. [Dx 2.6] ♠
I això és el que volíem demostrar.[668] ♠

Ex 53, lema. *Siguin* $\square AB$ *i* $\square BC$ *dos quadrats col·locats de manera que* [*els costats*] BE *i* DB *estiguin alineats. Aleshores,* [*els costats*] FB *i* BG *també ho estan* [*E*I 14]*. Completem el paral·lelogram* $\varparallelogram AC$.[669] *Afirmo que* a*)* $\square AC$ *és un quadrat,* b*)* [*el rectangle*] $\square DG$ *és la mitjana proporcional de* $\square AB$ *i* $\square BC$ *i* c*)* [*el rectangle*] $\square DC$ *l'és de* AC *i* CB.[670]

[*Demostració.*] *a*) Atès que [els segments] DB i BF,
i BE i BG són iguals dos a dos,
els [segments] totals DE i FG també. [Nc 2]

Però [el segment] DE és igual a AH i a KC,
i [el segment] FG ho és a AK i a HC. [Ei 34]

Aleshores, AH i KC són iguals a AK i a HC, respectivament. [Nc 1]

Per tant, el paral·lelogram $\varparallelogram AC$ és equilàter i rectangle.

En definitiva, $\square AC$ és un quadrat. [Di 22] ♠

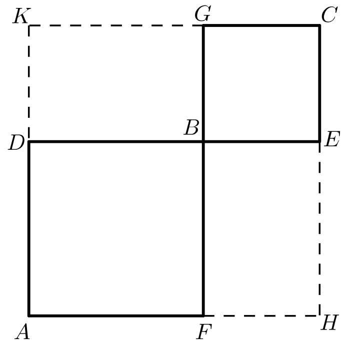


Figura Ex 53, lema

b) Atès que FB és a BG com DB a BE, [Ev 7, iterat]
FB és a BG com $\square AB$ a $\square DG$, [Evi 1]
i DB és a BE com $\square DG$ a $\square BC$, [Evi 1]
resulta que $\square AB$ és a $\square DG$ com $\square DG$ a $\square BC$. [Ev 11]

Per tant, [el rectangle] $\square DG$ és la mitjana proporcional dels quadrats de [costats] $\square AB$ i $\square BC$. ♠

Afirmo que $\square DC$ és la mitjana proporcional de $\square AC$ i $\square CB$.

---

668. Si el segment racional val la unitat, el segment sisè binomial val $\sqrt{q} + \sqrt{q'}$. I aquest i el sisè apòtom, $\sqrt{q} - \sqrt{q'}$ [Ex 90], són les arrels de l'equació quadràtica $x^2 - 2\sqrt{q}\,x + (q - q') = 0$.

669. Com ja hem dit a bastament, cal P 5.

670. De fet, aquesta proposició pertany al llibre vi. Euclides la inclou ara perquè és un «element» de la proposició Ex 54.

c) Sabem que AD és a DK com KG a GC
ja que aquests segments són iguals dos a dos. [Ev 7 o per substitució]

Ara, *componendo*, AK és a KD com KC a CG. [Ev 18]

Però AK és a KD com $\square\, AC$ a ▭ CD,
i KC és a CG com ▭ DC a $\square\, CB$. [Evi 1]

Per tant, $\square\, AC$ és a ▭ DC com ▭ DC a $\square\, BC$. [Ev 11]

En definitiva, ▭ DC és la mitjana proporcional dels quadrats de [costats] $\square\, AC$ i $\square\, BC$.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 54. *Si una àrea rectangular està determinada per un segment racional i un primer binomial, la seva arrel quadrada és un segment irracional que anomenem* binomial.[671]

Sigui ▭ AC l'àrea determinada pel [segment] racional AB i el primer binomial AD.

Afirmo que l'arrel quadrada de ▭ AC és el [segment] irracional que anomenem *binomial*.[672]

[*Demostració.*] *a*) Atès que AD és un [segment] primer binomial,
sigui E el punt que el divideix en els [seus segments] components,[673]
i AE el segment més gran. [Ex 48 i 42]

Aleshores, és clar que AE i ED són [segments] racionals commensurables només en quadrat,
que l'excés del quadrat de costat AE sobre el de [costat] ED és el quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud] amb AE[674]
i que AE és commensurable [en longitud] amb el [segment] racional AB. [Dx 2.1]

Considerem el punt mitjà F de[l segment] ED. [Ei 10]

---

671. Les sis proposicions Ex 54, 55, 56, 57, 58 i 59 analitzen la classe de les «arrels quadrades» —és a dir, els costats dels quadrats— d'àrees rectangulars de costats un segment racional i un segment binomial de cada mena.

672. Com ja hem indicat a la nota anterior, Euclides es refereix al costat del quadrat que té la mateixa àrea que el rectangle ▭ AC i que nosaltres anomenem *arrel quadrada* del rectangle.

673. Com hem vist, són únics, és a dir, estan ben determinats. Vegeu la nota 636 (pàgina 277).

674. Vegeu la nota 652 (pàgina 287).

Atès que l'excés del quadrat de costat AE sobre el de [costat] ED és el quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud] amb AE;
si apliquem per defecte al costat gran AE un rectangle igual a la quarta part del quadrat de [costat] el [segment] petit
—és a dir, el quadrat de [costat] EF—,
de manera que el que hi falta és un quadrat, [Evi 28]
l'aplicació divideix [el costat gran] en [segments] commensurables. [Ex 17]

Així doncs, a[l segment] AE hi apliquem el rectangle de [costats] AG i GE equivalent al quadrat de [costat] EF. [Eii 14]

Per tant, AG és commensurable en longitud amb EG.

Tirem GH, EK i FL paral·lels a AB i CD pels punts G, E i F[, respectivament]. [Ei 31]

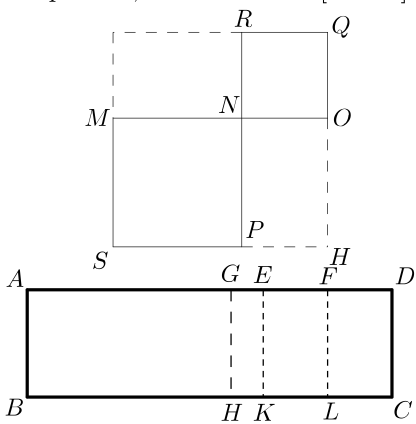


Figura Ex 54

Fem els quadrats □ SN i □ NQ equivalents als paral·lelograms ▱ AH i ▱ GK, respectivament, [Eii 14]
de manera que [els costats] MN i NO estan alineats. [Ei 14]

D'això en resulta que [els costats] RN i NP també ho estan. [Ei 14]

Completem el paral·lelogram ▱ SQ. [P 5]

Òbviament, ▱ SQ és un quadrat. [Ex 53, lema]

Atès que el rectangle de [costats] AG i GE és equivalent al quadrat de [costat] EF, [per construcció]
resulta que AG és a EF com FE a EG. [Evi 17]

Aleshores, ▭ AH és a ▭ EL com ▭ EL a ▭ KG. [Evi 1]

En definitiva, ▭ EL és la mitjana proporcional de ▭ AH i ▭ GK.

Però [els rectangles] ▭ AH i ▭ KG són equivalents a[ls quadrats] □ SN i □ NQ.

En conseqüència, ▭ EL és la mitjana proporcional d'aquests [dos] quadrats. [Ev 7, iterat]

D'altra banda, ▭ MR també n'és la mitjana proporcional.
[EX 53 i 53, lema]

Per tant, [el rectangle] ▭ EL és equivalent al ▭ MR.[675]

I ▭ EL també ho és a ▭ PO. [EI 43]

A més, tenim que ▭ AH més ▭ GK equival a □ SN més □ NQ.

D'això en resulta que el total ▭ AC equival al total □ SQ,
és a dir, al quadrat de costat MO. [Nc 2]

En definitiva, MO és l'arrel quadrada de [l'àrea] ▭ AC. ♠

Afirmo que MO és un [segment] binomial.

b) Atès que AG és commensurable [en longitud] amb GE,
AE també ho és amb AG i amb GE. [EX 15]

Però hem suposat que AE és commensurable [en longitud] amb AB.

Per tant, AG i GE també ho són amb AB, [EX 12]
i AB és [un segment] racional.

I d'això en resulta que AG i GE també ho són. [DX 1.3]

Així doncs, [els rectangles] ▭ AH i ▭ GK són [àrees] racionals,
[DX 1.4]
i ▭ AH és commensurable amb ▭ GK. [EX 19]

Però ▭ AH és equivalent a □ SN, i ▭ GK a □ NQ.

En definitiva, □ SN i □ NQ,
és a dir, els quadrats de costats MN i NO,
són racionals i commensurables.

I, atès que AE és incommensurable en longitud amb ED,
i AE i DE commensurables amb AG i EF, respectivament,
resulta que AG és incommensurable [en longitud] amb EF.
[EX 12 i 13]

En conseqüència, ▭ AH també ho és amb ▭ EL. [EVI 1 i EX 11]

Però ▭ AH equival a □ SN, i ▭ EL a ▭ MR.

Aleshores, □ SN també és incommensurable amb ▭ MR.
[per substitució]

Però □ SN és a ▭ MR com PN a NR. [EVI 1]

675. Aquí Euclides admet que dues superfícies que són mitjanes proporcionals entre dues superfícies donades són equivalents.

Per tant, PN és incommensurable [en longitud] amb NR, [Ex 11]
i PN i NR són iguals a MN i NO, respectivament.

Així doncs, MN és incommensurable [en longitud] amb NO,
el [quadrat] de costat MN és commensurable amb el de costat NO i tots dos segments són racionals.

En definitiva, MN i NO són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

Finalment, doncs, MO és un [segment] binomial [Ex 36, definició]
arrel quadrada de $\square\, AC$. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠[676]

Ex 55. *Si una àrea rectangular està determinada per un segment racional i un segon binomial, la seva arrel quadrada és el segment irracional que anomenem* primer bimedial*.*

Sigui $\square\, ABCD$ l'àrea determinada pel [segment] racional AB i el segon binomial AD.

Afirmo que l'arrel quadrada de $\square\, AC$ és un [segment] primer bimedial.

[*Demostració.*] *a*) Atès que AD és un [segment] segon binomial,
en considerem els components determinats [pel punt] E,[677]
el més gran dels quals és AE. [Ex 49 i 42]

Aleshores, AE i ED són [segments] racionals commensurables només en quadrat,
l'excés del quadrat de costat AE sobre el [quadrat] de [costat] ED és el quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud] amb AE
i el terme[678] petit ED és commensurable en longitud amb AB.
[Dx 2.2]

Sigui F el punt mitjà de[l segment] ED. [Ei 10]

---

676. Si el segment racional és la unitat, aquesta proposició estableix que l'arrel quadrada d'un segment primer binomial —identificant l'àrea amb un dels costats— és un segment binomial. És a dir, un segment primer binomial té la longitud $q+q\,\sqrt{1-q'^2}$. I la seva arrel quadrada es pot escriure, doncs, $\rho\,(1+\sqrt{q''})$, en què $\rho=\sqrt{\frac{q\,(1+q')}{2}}$ i $q''=\frac{1-q'}{1+q'}$, cosa que correspon a la longitud d'un segment binomial [Ex 36], ja que ρ és racional.

677. Vegeu la nota 673 (pàgina 298).

678. Vegeu la nota 636 (pàgina 277).

Al segment AE hi apliquem per defecte el rectangle de [costats] AG i GE equivalent al quadrat de [costat] EF, fent que hi manqui un quadrat. [EVI 28]

Aleshores, AG és commensurable en longitud amb GE. [EX 17]

Considerem els [segments] GH, EK i FL paral·lels a AB i CD pels [punts] G, E i F[, respectivament], [EI 31]
i els quadrats □ SN i □ NQ equivalents als paral·lelograms ▭ AH i ▭ GK, respectivament, [EII 14]
col·locats de manera que [els segments] MN i NO estan alineats. [EI 14]

De resultes d'això, [els segments] RN i NP també ho estan. [EI 14]

Completem el quadrat □ SQ. [P 5]

Aleshores, d'acord amb el que hem demostrat, [EX 53, lema]
és clar que ▭ MR és la mitjana proporcional de □ SN i □ NQ,
que equival a ▭ EL,
i que [el segment] MO és l'arrel quadrada de ▭ AC.

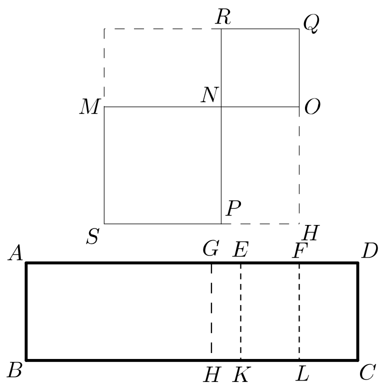


FIGURA EX 55

En definitiva, doncs, MO és un primer bimedial. ♠

b) Atès que AE és incommensurable en longitud amb ED
i ED és commensurable [en longitud] amb AB,
resulta que AE és incommensurable [en longitud] amb AB. [EX 13]

I, a més, atès que [el segment] AG és commensurable [en longitud] amb EG,
AE també ho és amb cadascun de[ls segments] AG i GE. [EX 15]

Però AE és incommensurable en longitud amb AB.

Per tant, [els segments] AG i GE també ho són. [EX 13]

Aleshores, [els segments] BA i AG, i BA i GE són [dues parelles de] segments racionals commensurables només en quadrat.

En conseqüència, cada una de les àrees de ▭ AH i ▭ GK és medial. [Ex 21]

Per tant, cada un de[ls quadrats] □ SN i □ NQ també és una [àrea] medial. [Ex 23, lema]

En definitiva, MN i NO són [segments] medials. ♠

c) Atès que AG és commensurable [en longitud] amb GE,
▭ AH també ho és amb ▭ GK, [E VI 1 i Ex 11]
és a dir, amb □ SN i □ NQ,
els [quadrats] de costats MN i NO, respectivament,
que també ho són.

[Per tant, MN i NO són commensurables en quadrat]. [E VI 1 i Ex 11]

Ara, atès que AE és incommensurable en longitud amb ED
però que, en canvi, AE és commensurable [en longitud] amb AG,
i ED amb EF,
resulta que AG és incommensurable [en longitud] amb EF. [Ex 13]

Per tant, ▭ AH és incommensurable amb ▭ EL,
és a dir, □ SN amb □ NQ i, de retruc, PN amb NR.

D'això en resulta que MN i NO són incommensurables en longitud. [E VI 1 i Ex 11]

Però hem vist que [els segments] MN i NO són medials commensurables en quadrat.

Per tant, [els segments] MN i NO són medials commensurables només en quadrat. ♠

Afirmo que determinen una àrea racional.

d) Atès que hem suposat que [el segment] DE és commensurable [en longitud] amb [els segments] AB i EF,
[el segment] EF també ho és amb EK. [Ex 12]

Per tant, EF i EK són [segments] racionals. ♠

Aleshores, ▭ EL, que equival a ▭ MR, és racional. [Ex 19]

Però ▭ MR és el rectangle de [costats] MN i NO.

I, si ajuntem[679] dos [segments] medials commensurables només en quadrat que determinen una [àrea] racional,
el total és [un segment] irracional anomenat *primer bimedial.* [Ex 37]

679. Vegeu la nota 615 (pàgina 269).

De tot això en resulta que [el segment] MO és primer bimedial. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠[680]

Ex 56. *Si una àrea rectangular està determinada per un segment racional i un tercer binomial, la seva arrel quadrada és el segment irracional que anomenem* segon bimedial.

Siguin $\square$ $ABCD$ l'àrea de [costats el segment] racional AB
i el [segment] tercer binomial AD
que el punt E divideix en els seus components,[681]
el més gran dels quals és AE. [Ex 50 i 42]

Afirmo que l'arrel quadrada de $\square$ AC és el [segment] irracional que anomenem *segon bimedial.*

[*Demostració.*] *a*) Fem la mateixa construcció que en els dos casos anteriors.

Atès que AD és un [segment] tercer binomial,
AE i ED són [segments] racionals commensurables només en quadrat,
l'excés del quadrat de costat AE sobre el de [costat] ED és un quadrat de costat [un segment] commen- surable [en longitud] amb AE i ni AE ni ED ho són amb AB. [Dx 2.3]

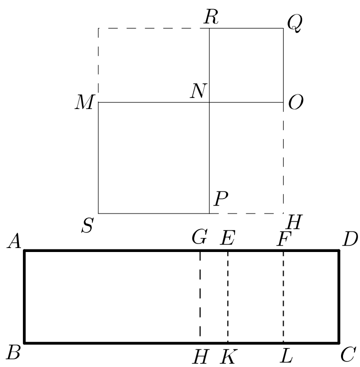


FIGURA EX 56

Amb una demostració semblant a la de la proposició precedent, podem veure que MO és l'arrel quadrada de $\square$ AC,

680. Si el segment racional és la unitat, aquesta proposició estableix que l'arrel quadrada d'un segment segon binomial és un primer bimedial. És a dir, un segment segon binomial té la longitud $\frac{q}{\sqrt{1-q'^2}} + q$. I la seva arrel quadrada es pot escriure, doncs, $\rho\,(\sqrt[4]{q''} + \sqrt[4]{q''^3})$, en què $\rho = \sqrt{\frac{q}{2}\frac{1+q'}{1-q'}}$ i $q'' = \frac{1-q'}{1+q'}$, cosa que correspon a la longitud d'un segment primer bimedial [Ex 37], atès que ρ és racional.

681. Vegeu la nota 673 (pàgina 298).

i que [els segments] MN i NO són medials commensurables només en quadrat.

En conseqüència, MO és bimedial. ♠

b) Podem veure que MO també és [un segment] segon [bimedial].

Atès que DE és incommensurable en longitud amb AB,
és a dir, amb EK,
i que DE és commensurable [en longitud] amb EF,
resulta que EF és incommensurable en longitud amb EK. [Ex 13]

I tots dos [segments] són racionals.

Per tant, FE i EK són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

En definitiva, ▭ EL, és a dir, [el quadrat] □ MR, és medial [Ex 21] i està format pels [segments] MN i NO.

Aleshores, el rectangle de [costats] MN i NO també ho és. ♠

c) Així doncs, MO és un [segment] segon bimedial. [Ex 38]

I això és el que volíem demostrar. ♠[682]

Ex 57. *Si una àrea rectangular està determinada per un segment racional i un quart binomial, la seva arrel quadrada és el segment irracional que anomenem* major.

Siguin ▭ AC l'àrea formada pel [segment] racional AB i el quart binomial AD,
i E el punt que en determina els components,[683]
el més gran dels quals és AE. [Ex 51 i 42]

Afirmo que l'arrel quadrada de [l'àrea] ▭ AC és el [segment] irracional que anomenem *major*.

[*Demostració*.] Atès que AD és un [segment] quart binomial,
resulta que AE i ED són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

---

682. Si el segment racional és la unitat, aquesta proposició estableix que l'arrel quadrada d'un segment tercer binomial és un segon segment bimedial. És a dir, un segment tercer binomial té la longitud $\sqrt{q}\,(1+\sqrt{1-q'^2})$. I la seva arrel quadrada es pot escriure, doncs, $\rho(\sqrt[4]{q}+\frac{\sqrt{q''}}{\sqrt[4]{q}})$, en què $\rho=\sqrt{\frac{1+q'}{2}}$ i $q''=q\frac{1-q'}{1+q'}$, cosa que correspon a la longitud d'un segment segon bimedial [Ex 38], atès que ρ és racional.

683. Vegeu la nota 673 (pàgina 298).

L'excés del quadrat de costat AE sobre el de [costat] ED és el quadrat de costat [un segment] incommensurable [en longitud] amb AE, i AE és commensurable en longitud amb AB. [Dx 2.4]

Ara dimidiem [el segment] DE per [el punt] F. [Ei 10]

Al segment AE hi apliquem per defecte el paral·lelogram de [costats] AG i GE equivalent al quadrat de [costat] EF,
de manera que el que hi falta és un quadrat. [Evi 28]

D'això en resulta que AG és incommensurable en longitud amb GE. [Ex 18]

Pels punts G, E i F, tirem [els segments] GH, EK i FL paral·lels al segment AB. [Ei 31]

Refem la construcció de la proposició precedent.

És clar que [el segment] MO és l'arrel quadrada de $\square\, AC$.

Hem d'establir, doncs, que MO és el [segment] irracional anomenat *major*.

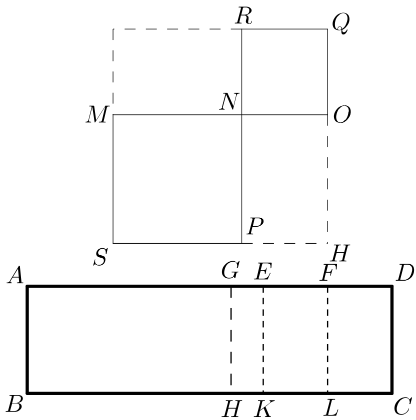


Figura Ex 57

a) Atès que [el segment] AG és incommensurable en longitud amb el EG,
els [rectangles] $\square\, AH$ i $\square\, GK$, és a dir, $\square\, SN$ i $\square\, NQ$, també són incommensurables. [Evi 1 i Ex 11]

Per tant, [els segments] MN i NO són incommensurables en quadrat. [Dx 1.2]

I, atès que [el segment] AE és commensurable en longitud amb el AB,
[el rectangle] $\square\, AK$ és racional. [Ex 19]

Però aquest rectangle equival a la suma dels quadrats de costats MN i NO. [per construcció]

En conseqüència, la suma dels quadrats de [costats] MN i NO també és racional. [per substitució]

I, com que [el segment] DE és incommensurable en longitud amb el AB, [Ex 13]
és a dir, amb el EK,
i DE i EF són [segments] commensurables [en longitud];
[el segment] EF és incommensurable en longitud amb el EK. [Ex 13]

Aleshores, [els segments] EK i EF són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

Per tant, [el rectangle] $\square\, LE$, que equival a $\square\, MR$,
és medial. [Ex 21] ♠

b) El rectangle $\square\, LE$ té els costats MN i NO.

En definitiva, el rectangle de [costats] MN i NO és medial,
la suma dels quadrats de [costats] MN i NO és racional
i [els segments] MN i NO són incommensurables en quadrat.

Si ajuntem[684] dos segments incommensurables en quadrat,[685]
la suma dels quadrats dels quals és racional
i el rectangle [que formen els seus costats] medial,
aleshores el total és [el segment] irracional anomenat *major*.
[Ex 39] ♠

c) Aleshores, MO és aquest segment
i la seva arrel quadrada és $\square\, AC$. ♠
I això és el que volíem demostrar. ♠[686]

Ex 58. *Si una àrea rectangular està determinada per un [segment] racional i un cinquè binomial, la seva arrel quadrada és el [segment] irracional que anomenem* arrel quadrada d'una [àrea] racional més una [àrea] medial.

684. Vegeu la nota 561 (pàgina 234).

685. Vegeu la nota 615 (pàgina 269).

686. Si el segment racional és la unitat, aquesta proposició estableix que l'arrel quadrada d'un segment quart binomial és un [segment] major. És a dir, un segment quart binomial té la longitud $q(1+\frac{1}{1+q'})$. La seva arrel quadrada es pot escriure, doncs, $\rho\sqrt{\frac{1}{2}\,(1+\frac{q''}{\sqrt{1+q''^2}})}+\rho\sqrt{\frac{1}{2}\,(1\frac{q''}{\sqrt{1+q''^2}})}$, en què $\rho=\sqrt{q}$ i $q'=q''^2$, cosa que correspon a la longitud d'un segment primer bimedial [Ex 39], atès que ρ és racional.

Sigui $\square AC$ l'àrea formada pel [segment] racional AB i el cinquè binomial AD
dividit per [el punt] E en els seus [components],[687]
el més gran dels quals és AE.

Afirmo que l'arrel quadrada de $\square AC$ és el [segment] irracional anomenat *arrel quadrada de l'àrea suma d'una racional i una medial.*

[*Demostració.*] Fem la mateixa construcció de les proposicions anteriors.

Aleshores, és clar que [el segment] MO és l'arrel quadrada de $\square AC$.

Per tant, volem demostrar que MO és l'arrel quadrada d'una [àrea] racional més una [àrea] medial.

a) Atès que [el segment] AG és incommensurable [en longitud] amb el GE, [Ex 18]
[l'àrea] $\square AH$ és incommensurable amb [la] $\square HE$,
és a dir, el quadrat de [costat] MN amb el de [costat] NO. [Evi 1 Ex 11]

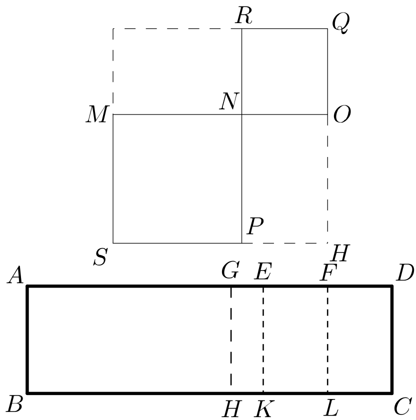


Figura Ex 58

Aleshores, MN i NO són incommensurables en quadrat. [Dx 1.2]

Atès que AD és un [segment] cinquè binomial
i ED és el [segment] més curt,
ED és commensurable en longitud amb AB. [Dx 2.5]

Però AE és incommensurable [en longitud] amb ED.

Per tant, AB és incommensurable en longitud amb AE
[i BA i AE són segments racionals commensurables només en quadrat]. [Ex 13]

Aleshores, $\square AK$,
és a dir, la suma dels quadrats de [costats] MN i NO és medial.
[Ex 21] ♠

687. Vegeu la nota 673 (pàgina 298).

b) Atès que [el segment] DE és commensurable en longitud amb el AB,
és a dir, amb el EK, [per substitució]
i [el segment] DE és commensurable [en longitud] amb el EF,
resulta que [el segment] EF també ho és amb el EK. [Ex 12]

Però EK és racional.

Per tant, [el rectangle] $\square\, EL$,
és a dir, [el rectangle] $\square\, MR$ de [costats] MN i NO,
també ho és. [Ex 19] ♠

c) En definitiva, [els segments] MN i NO són [segments] incommensurables en quadrat i, per tant, fan que la suma dels [seus] quadrats sigui medial
i el rectangle [que formen], racional. ♠

d) Finalment, doncs, [el segment] MO és l'arrel quadrada d'una àrea racional més [una àrea] medial. [Ex 40]

I és l'arrel quadrada de l'àrea $\square\, AC$. [per substitució] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠[688]

Ex 59. *Si una àrea rectangular està determinada per un segment racional i un sisè binomial, la seva arrel quadrada és el segment irracional que anomenem* arrel quadrada de [la suma de] dues [àrees] medials*.*

Sigui $\square\, ABCD$ l'àrea formada pel [segment] racional AB i el sisè binomial AD que el punt E divideix [en els seus components],[689]
el més gran dels quals és AE. [Ex 53 i 42]

Afirmo que l'arrel quadrada de $\square\, AC$ és l'arrel quadrada de la suma de dues àrees medials.

---

688. Si el segment racional és la unitat, aquesta proposició estableix que l'arrel quadrada d'un segment cinquè binomial és un segment major. És a dir, un segment quart binomial té la longitud $q(1+\sqrt{1+q'})$. La seva arrel quadrada es pot escriure, doncs, $\rho\sqrt{\frac{\sqrt{1+q''^2}+q''}{2\,(1+q''^2)}}+\rho\sqrt{\frac{\sqrt{1+q''^2}-q''}{2\,(1+q''^2)}}$, en què $\rho=\sqrt{q(1+q''^2)}$ i $q'=q''^2$, cosa que correspon a la longitud de l'arrel quadrada d'una àrea racional més la d'una medial [Ex 40], atès que ρ és racional.

689. Vegeu la nota 673 (pàgina 298).

[*Demostració.*] *a*) Fem la mateixa construcció de les proposicions anteriors.

És clar que MO és l'arrel quadrada de $\square\, AC$
i que [el segment] MN és incommensurable en quadrat amb el NO.

I, atès que [el segment] EA és incommensurable en longitud amb el AB, [Dx 2.6]
EA i AB són racionals commensurables només en quadrat. [Dx 1.2]

Aleshores, [el rectangle] $\square\, AK$,
és a dir, la suma dels quadrats de [costats] MN i NO,
és medial. [Ex 21] ♠

b) Novament, atès que el ED és incommensurable en longitud amb el AB, [Dx 2.6]
el FE també ho és amb el EK. [Ex 13]

Aleshores, [els segments] FE i EK són racionals commen- surables només en quadrat. ♠

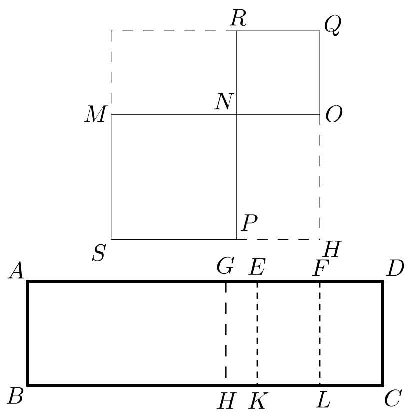


FIGURA Ex 59

Per tant, [el rectangle] $\square\, EL$,
és a dir, [el rectangle] $\square\, MR$ de [costats] MN i NO,
és medial. [Ex 21] ♠

c) I, atès que [el segment] AE és incommensurable [en longitud] amb el EF,
[el rectangle] $\square\, AK$ també ho és amb el $\square\, EL$.
[EVI 1 i VI 11] ♠

d) Però [el rectangle] $\square\, AK$ és la suma dels quadrats de [costats] MN i NO,
i el rectangle $\square\, EL$ té aquests costats.

Aleshores, la suma dels quadrats de [costats] MN i NO és incommensurable amb el rectangle de [costats] MN i NO,
cada [àrea] és medial
i [els segments] MN i NO són incommensurables en quadrat. ♠

En definitiva, MO, que és l'arrel quadrada de $\square\, AC$,
també ho és de la suma de dues [àrees] medials. [Ex 42]
I això és el que volíem demostrar. ♠[690]

Ex 59, lema. *Si dividim un segment en dues parts diferents, la suma dels quadrats d'aquestes parts és més gran que dues vegades el rectangle que formen.*[691]
Sigui AB un segment dividit en dues parts diferents per [el punt] C i sigui AC la [part] gran.

Afirmo que la suma dels quadrats de [costats] AC i CB és més gran que dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB.
[*Demostració.*] Dividim AB en dues parts iguals per [el punt] D. [Ei 10]

Atès que D dimidia el segment [AB] i C el divideix en dues parts diferents,

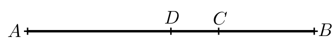


Figura Ex 59, lema

el rectangle de [costats] AC i CB més el quadrat de [costat] CD equival al quadrat de [costat] AD. [Eii 5]

Veiem que el rectangle de [costats] AC i CB és més petit que el quadrat de [costat] AD.

Per tant, dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB és més petit que el doble del quadrat de [costat] AD. [Nc 4′][692]

Però [la suma d]els quadrats de [costats] AC i CB és el doble de la dels quadrats de [costats] AD i DC. [Eii 9]

690. Si el segment racional és la unitat, aquesta proposició estableix que l'arrel quadrada d'un segment sisè binomial és un [segment] major. És a dir, un segment sisè binomial té la longitud $\sqrt{q} + \sqrt{q'}$. La seva arrel quadrada es pot escriure, doncs, en la forma $\sqrt{\frac{1}{2}\,(\sqrt{q} + \sqrt{q - q'}} + \sqrt{\frac{1}{2}\,(\sqrt{q} - \sqrt{q - q'}}$, cosa que correspon a la longitud de l'arrel quadrada de dues àrees medials [Ex 41].

691. Formalment: $x^2 + y^2 > 2\,x\,y$, en què $x + y = a$, amb a arbitrari.

692. De fet, n'és un porisma.

En definitiva, [la suma d]els quadrats de [costats] AC i CB és més gran que dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB.

I això és el que volíem demostrar. ♠[693]

EX 60. *Si apliquem un quadrat de costat un [segment] binomial a un [segment] racional, la seva amplada és un [segment] primer binomial.*[694]

Sigui AB un [segment] binomial dividit en els seus components per [el punt] C, el més gran dels quals és AC. [EX 36 i 42]

Considerem un [segment] racional [arbitrari] DE.

Apliquem el [rectangle] $\square\, DEFG$, equivalent al quadrat de [costat] AB, a[l segment] DE.

Sigui DG l'amplada que produeix.

Afirmo que [el segment] DG és un primer binomial.

[*Demostració.*] *a*) Siguin $\square\, DH$ equivalent al quadrat de [costat] AC, i $\square\, KL$ al de [costat] BC, aplicats tots dos a DE. [EII 14 o EVI 12]

Aleshores, el romanent —dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB— equival a $\square\, MF$. [EII 4]

Dimidiem MG per N [EI 10]

i tirem [el segment] NO paral·lel [a ML i a GF].[EI 31]

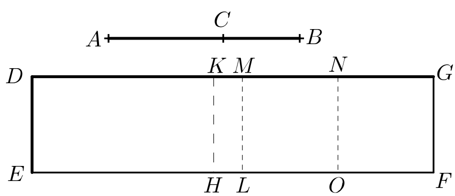


FIGURA EX 60

Aleshores, [els rectangles] $\square\, MO$ i $\square\, NF$ equivalen al de [costats] AC i BC.

Atès que AB és un [segment] binomial dividit en els seus [components] per [el punt] C,

---

693. De fet, correspon al llibre II però Euclides l'introdueix ara com a «element» de la proposició següent.

694. En altres paraules, el quadrat d'un binomial és [una àrea] primera binomial [EX 54].

Euclides inicia un grup de proposicions —EX 60, 61, 62, 63, 64 i 65— en el qual aplica un quadrat a un segment racional. I d'això n'obté una amplada. Les proposicions estableixen quina classe de segment és aquesta am- plada segons quina sigui la del segment que és el costat del quadrat.

[els segments] AC i CB són racionals commensurables només en quadrat. [Ex 36]

Aleshores, els quadrats de [costats] AC i CB són racionals i commensurables. [Dx 1.4]

Per tant, la suma dels quadrats de [costats] AC i CB també ho és. [Ex 15]

I, a més, equival a[l rectangle] $\square\, DL$.

Aleshores, $\square\, DL$, aplicat a[l segment] racional DE, és racional. [per substitució]

Per tant, [el segment] DM és racional i commensurable en longitud amb el DE. [Ex 20]

De bell nou, atès que [els segments] AC i CB són racionals commensurables només en quadrat,
dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB,
és a dir, [el rectangle] $\square\, MF$, aplicat a[l segment] racional ML,
és medial.

En definitiva, [el segment] MG és racional incommensurable en longitud amb ML, és a dir, amb DE, [Ex 22]
i el MD és racional i commensurable en longitud amb DE.

Així doncs, DM és incommensurable en longitud amb MG, [Ex 13]
i tots dos són racionals.

En definitiva, [els segments] DM i MG són racionals commensurables només en quadrat.

En conseqüència, [el segment] DG és binomial. [Ex 36] ♠

Volem demostrar, doncs, que és un [segment] primer [binomial].

b) Atès que el rectangle de [costats] AC i CB és la mitjana proporcional dels quadrats de costats AC i CB, [Ex 53, lema]
$\square\, MO$ és la mitjana proporcional de $\square\, DH$ i $\square\, KL$. [Ev 7, iterat]

Aleshores, $\square\, DH$ és a $\square\, MO$ com $\square\, MO$ a $\square\, KL$,
és a dir, DK és a MN com MN a MK. [Evi 1]

Per tant, el rectangle de [costats] DK i KM equival al quadrat de [costat] MN. [Evi 17]

I, atès que el quadrat de [costat] AC és commensurable amb el de [costat] CB,
DH també ho és amb KL. [Dv 5]

Per tant, DK també és commensurable amb KM. [Ev 1 i x 11]

I, atès que la suma dels quadrats de costats AC i CB és més gran que dues vegades el rectangle de costats AC i CB, [Ex 9, lema]
$\square\, DL$ és més gran que $\square\, MF$. [Nc 4′]

Per tant, [el rectangle] $\square\, DM$ és més gran que el $\square\, MG$. [Ev 1 i v 14]

Però el rectangle de [costats] DK i KM equival al quadrat de [costat] MN,
és a dir, a una quarta part del quadrat de [costat] MG,
i DK és commensurable [en longitud] amb KM.

Considerem dos segments diferents
i, al [segment] gran, hi apliquem per defecte un rectangle equivalent a la quarta part del quadrat de [costat] el [segment] petit,
fent que hi manqui un quadrat,
i el dividim en parts commensurables [en longitud].

Per tant, el quadrat de costat la [part] més gran és més gran que el quadrat de [costat] la part més petita, un quadrat de [costat] [un segment] commensurable [en longitud] amb el més gran. [Ex 17]

Aleshores, l'excés del quadrat de costat DM sobre el de [costat] MG és el quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud] amb DM,
DM i MG són racionals
i DM, que és la part més gran, és commensurable en longitud amb el [segment] racional DE.

En definitiva, DG és un [segment] primer binomial. [Dx 2.1] ♠
I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 61. *Si apliquem un quadrat de costat un [segment] primer bimedial a un [segment] racional, la seva amplada és un [segment] segon binomial.*[695]

Sigui AB un [segment] primer bimedial dividit per [el punt] C en els seus [components] medials, el més gran dels quals és AC.

695. En altres paraules, el quadrat d'un [segment] primer bimedial és [una àrea] segona binomial [Ex 55].

Considerem un [segment] racional DE i hi apliquem el paral·lelogram $\square DF$ equivalent al quadrat de costat AB. [E VI 12]

El paral·lelogram produeix una amplada DG.

Afirmo que DG és un [segment] segon binomial.

[*Demostració.*] *a*) Fem la mateixa construcció de la [proposició] anterior.

Atès que AB és un [segment] primer bimedial dividit per C,
AC i CB són [segments] medials commensurables només en quadrat que determinen una [àrea] racional. [E X 37]

Per tant, els quadrats de [costats] AC i CB també són [àrees] medials. [E X 37]

Aleshores, $\square DL$ és [una àrea] medial [E X 15 i 10, porisma]
aplicada al [segment] racional DE.

I [el segment] MD és racional i incommensurable en longitud amb DE. [E X 22]

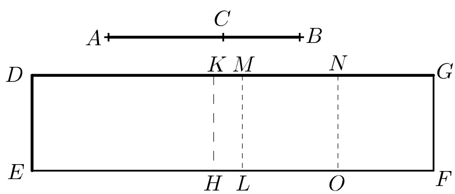


FIGURA E X 61

De bell nou, atès que dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB és racional,
[el rectangle] $\square MF$ és racional i està aplicat al [segment] racional ML.

Aleshores, [el segment] MG és racional i commensurable en longitud amb el ML,
és a dir, amb DE. [E X 20]

Per tant, [el segment] DM és incommensurable en longitud amb el MG, [E X 13]
i tots dos són racionals.

En definitiva, [els segments] DM i MG són racionals commensurables només en quadrat.

Per tant, DG és un [segment] binomial. [E X 36]

Concretament, hem vist que és un segon [binomial]. ♠

b) Atès que la suma dels quadrats de [costats] AC i CB és més gran que dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB, [Ex 59]
$\square\, DL$ és més gran que $\square\, MF$.

Per tant, DM també ho és que MG. [Evi 1]

I, atès que el quadrat de [costat] AC és commensurable amb el de [costat] CB,
[el rectangle] $\square\, DH$ també ho és amb el $\square\, KL$.

Per tant, [el segment] DK és commensurable [en longitud] amb el KM, [Evi 1 i x 11]
i el rectangle de [costats] DK i KM equival al quadrat de [costat] MN.

Aleshores, l'excés del quadrat de costat DM sobre el de [costat] MG és el quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud] amb DM, [Ex 17]
i MG és commensurable en longitud amb DE.

En definitiva, DG és un [segment] segon binomial. [Dx 2.2] ♠
I això és el que volíem demostrar. ♠[696]

Ex 62. *Si apliquem un quadrat de costat un [segment] segon bimedial a un [segment] racional, la seva amplada és un [segment] tercer binomial.*[697]

Sigui AB un [segment] segon bimedial dividit per [el punt] C en els seus [components] medials, el més gran dels quals és AC.

Considerem un [segment] DE racional.

I a[l segment] DE hi apliquem el paral·lelogram $\square\, DF$ equivalent al quadrat de [costat] AB. [Evi 12]

El paral·lelogram produeix una amplada DG.

Afirmo que DG és un [segment] tercer binomial.

[*Demostració.*] Fem la mateixa construcció d'abans.
a) Atès que AB és un [segment] segon bimedial dividit per C,
AC i CB són [segments] medials commensurables només en quadrat que formen una [àrea] medial. [Ex 38]

696. En aquest llibre, Euclides, a partir d'aquí, omet l'expressió: «I això és el que volíem demostrar».

697. En altres paraules, el quadrat d'un [segment] segon bimedial és [una àrea] tercera binomial [Ex 56].

Per tant, la suma dels quadrats de [costats] AC i CB,
que equival [al rectangle] $\square\, DL$,
també és medial. [Ex 15 i 23, porisma]

I $\square\, DL$ també ho és.

L'apliquem al [segment] racional DE. ♠

b) Aleshores, [el segment] MD és racional i incommensurable en longitud amb DE. [Ex 22]

Pel mateix [raonament], MG també ho és amb ML, és a dir, amb DE. [per substitució]

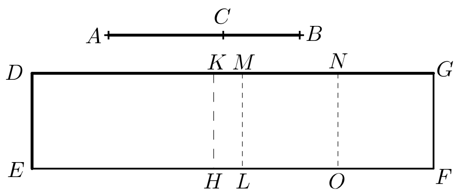


FIGURA Ex 62

I [els segments] DM i MG són racionals i incommensurables en longitud amb DE.

Atès que [el segment] AC és incommensurable en longitud amb [el segment] CB,
que AC és a CB com el quadrat de [costat] AC al rectangle de [costats] AC i CB, [Ex 21, lema]
i que el quadrat de [costat] AC és incommensurable amb el rectangle de [costats] AC i CB, [Ex 22]
resulta que la suma dels quadrats de [costats] AC i CB és incommensurable amb dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB,
és a dir, [el rectangle] $\square\, DL$ amb [el] $\square\, MF$. [Ex 12 i 13]

En conseqüència, [el segment] DM també és incommensurable [en longitud] amb el MG, [E VI 1 i Ex 11]
i tots dos són racionals.

I el [segment] DG és un binomial. [Ex 36] ♠

c) Volem demostrar que és un [segment] tercer [binomial].

De manera semblant a la [proposició] precedent,
concloem que [el segment] DM és més gran que el MG,
[els segments] DK i KM són commensurables [en longitud]
i el rectangle de [costats] DK i KM equival al quadrat de [costat] MN.

Aleshores, l'excés del quadrat de costat DM sobre el de [costat] MG és el quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud] amb DM, [Ex 17]
i ni DM ni MG són commensurables en longitud amb DE.

Per tant, DG és un [segment] tercer binomial. [Dx 2.3] ♠
[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 63. *Si apliquem un quadrat de costat un* [*segment*] *major a un* [*segment*] *racional, la seva amplada és un* [*segment*] *quart binomial.*[698]
Sigui AB un [segment] major dividit per C.

I siguin AC més gran que CB,
i DE un [segment] racional.

El rectangle $\square DF$, equivalent al quadrat de [costat] AB, aplicat a DE [Evi 12]
produeix una amplada DG.

Afirmo que DG és un [segment] quart binomial.

[*Demostració.*] *a*) Fem la mateixa construcció dels casos anteriors.

Atès que AB és un [segment] major dividit per [el punt] C,
AC i CB són [segments] incommensurables en quadrat,
la suma dels seus quadrats és racional
i el rectangle, medial. [Ex 39]

Per tant, atès que la suma dels [quadrats] de costats AC i CB és racional, $\square DL$ també ho és.

Aleshores, [el segment] DM és racional i commensurable en longitud amb DE. [Ex 20]

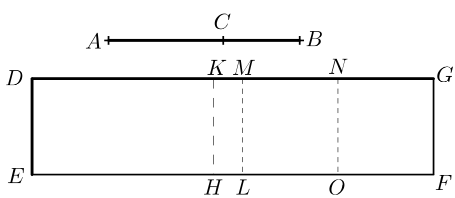


Figura Ex 63

Novament, atès que dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB, és a dir, [el rectangle] $\square MF$, és medial,
i que està aplicat al [segment] racional ML,

698. En altres paraules, el quadrat d'un [segment] major és [una àrea] quarta binomial [Ex 57].

resulta que MG és racional i incommensurable en longitud amb DE. [Ex 22]

Per tant, DM és incommensurable en longitud amb MG, [Ex 13] i DM i MG són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

Aleshores, DG és un [segment] binomial. [Ex 36] ♠

Volem demostrar que és un [segment] quart [binomial].

b) De manera anàloga a les [proposicions] anteriors,
veiem que DM és més gran que MG, i que el rectangle de [costats] DK i KM equival al quadrat de [costat] MN.

Per tant, atès que el quadrat de [costat] AC és incommensurable amb el quadrat de [costat] CB,
[el rectangle] $\square\, DH$ ho és amb [el rectangle] $\square\, KL$. [per substitució]

En conseqüència, [els segments] DK i KM també ho són. [Evi 1 i Ex 11]

Considerem dos segments diferents i al més gran hi apliquem per defecte un paral·lelogram equivalent a la quarta part del quadrat de [costat] el [segment] petit, al qual manca una figura quadrada.

Les dues parts són incommensurables [en longitud]
i l'excés del quadrat de costat més gran sobre el de [costat] més petit és el quadrat de costat [un segment] incommensurable en longitud amb el gran. [Ex 18]

En conseqüència, l'excés del quadrat de costat DM sobre el de [costat] MG és el quadrat de costat [un segment] incommensurable [en longitud] amb DM.

Però DM i MG són [segments] racionals commensurables només en quadrat,
i DM és commensurable [en longitud] amb el [segment] racional DE considerat inicialment.

De tot això en resulta que DG és un [segment] quart binomial. [Dx 2.4] ♠

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 64. *Si apliquem un quadrat de costat [un segment que és] l'arrel quadrada d'una [àrea] racional més una àrea [racional] medial, la seva amplada és un [segment] cinquè binomial.*[699]

Sigui AB l'arrel quadrada d'una àrea racional més una medial dividida [en components] per [el punt] C,
el més gran dels quals és AC.

Considerem un [segment] racional DE i el [paral·lelogram] $\square DF$, equivalent al quadrat de [costat] AB, aplicat al [segment] DE.

El paral·lelogram produeix una amplada DG.

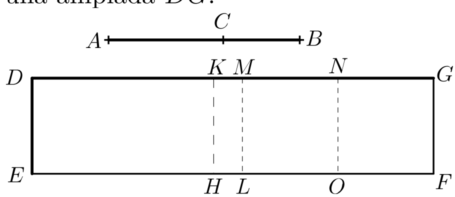


Figura Ex 64

Afirmo que DG és un [segment] cinquè binomial.

[*Demostració.*] Fem la mateixa construcció d'abans.

a) Atès que AB és l'arrel quadrada d'una [àrea] racional més una medial dividida per [el punt] C,
resulta que AC i CB són incommensurables en quadrat,
la suma dels quadrats de costats els segments anteriors és medial
i el rectangle [que els té com a costats], racional. [Ex 40]

En conseqüència, atès que la suma dels quadrats de [costats] AC i CB és medial,
[el rectangle] $\square DL$ també ho és.

Per tant, [el segment] DM és racional i incommensurable en longitud amb el DE. [Ex 22]

De bell nou, atès que dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB, que és $\square MF$, és racional;
[el segment] MG és racional i commensurable [en longitud] amb el DE. [Ex 20]

Per tant, [el segment] DM és incommensurable [en longitud] amb el MG. [Ex 13]

Aleshores, DM i MG són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

699. En altres paraules, el quadrat de l'arrel quadrada d'[una suma d']una àrea racional més una àrea medial és una cinquena binomial [Ex 58].

Per tant, DG és un [segment] binomial. [Ex 36] ♠

Afirmo que és un [segment] cinquè [binomial].

b) De manera anàloga [a les altres proposicions],
podem veure que el rectangle de [costats] DK i KM equival al quadrat de [costat] MN
i que [els segments] DK i KM són incommensurables en longitud.

Aleshores, l'excés del quadrat de costat DM sobre el de [costat] MG és un quadrat de costat [un segment] incommensurable [en longitud] amb [el segment] DM, [Ex 18]
DM i MG són [segments racionals] commensurables només en quadrat
i el petit, MG, és commensurable en longitud amb DE.

Per tant, [el segment] DG és un [segment] cinquè binomial.
[Dx 2.5] ♠

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 65. *Si apliquem un quadrat de costat* [*un segment que és*] *l'arrel quadrada de la suma de dues* [*àrees*] *medials, la seva amplada és un* [*segment*] *sisè binomial.*[700]

Sigui AB l'arrel quadrada de la suma de dues àrees medials i divindint-la per [el punt] C.

I sigui DE racional.

Apliquem el [paral·lelogram] $\varparallelogram DF$, equivalent al quadrat de [costat] AB, al [segment] DE.

El paral·lelogram produeix una amplada DG.

Afirmo que DG és un [segment] sisè binomial.

[*Demostració.*] *a*) Fem la mateixa construcció de les proposicions [precedents].

Atès que hem dividit per C [el segment] AB,
que és l'arrel quadrada de la suma de dues àrees medials,
[els segments] AC i CB són incommensurables en quadrat.

Per tant, la suma dels quadrats fets amb els seus costats és medial i el rectangle que els té de costats, també.

700. En altres paraules, el quadrat de l'arrel quadrada de [la suma de] dues àrees medials és una sisena binomial [Ex 59].

A més, aquesta suma de quadrats és incommensurable amb el rectangle [descrit]. [Ex 41]

Per tant, d'acord amb el que hem establert amb anterioritat,
els rectangles $\square DL$ i $\square MF$ són medials,
i [tots dos estan] aplicats a un [segment] racional DE.

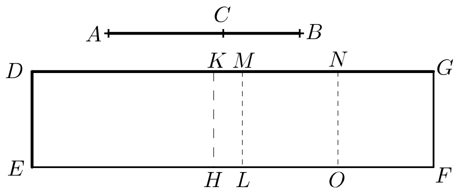


FIGURA EX 65

Aleshores, [els segments] DM i MG són racionals i incommensurables en longitud amb ell. [Ex 22]

Atès que la suma dels quadrats de [costats] AC i CB és incommensurable amb dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB, resulta que [els rectangles] $\square DL$ i $\square MF$ són incommensurables.

Aleshores, [el segment] DM és incommensurable [en longitud] amb el MG. [EVI 1 i EX 11]

En definitiva, [els segments] DM i MG són racionals commensurables només en quadrat.

I DG és un [segment] binomial. [Ex 36] ♠

Concretament, un sisè [binomial].

b) De manera anàloga a la de les proposicions anteriors,
podem veure que el rectangle de [costats] DK i KM equival al quadrat de [costat] MN. ♠

c) I, també, per un raonament anàleg al precedent,
el [segment] DK és incommensurable en longitud amb el KM,
i l'excés del quadrat de costat DM sobre el de [costat] MG és el quadrat de costat [un segment] incommensurable en longitud amb DM. [Ex 18]

I ni DM ni MG no són commensurables en longitud amb el [segment] racional DE, donat abans.

Per tant, DG és un [segment] sisè [binomial]. [Dx 2.6]

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 66. *Un [segment] commensurable en longitud amb un [segment] binomial també és binomial i de la mateixa classe.*[701]

Siguin AB un [segment] binomial
i CD [un segment] commensurable en longitud amb AB.

Afirmo que CD és un [segment] binomial de la mateixa classe que AB.

a) Atès que AB és un [segment] binomial dividit en els seus [components] per E, el més gran dels quals és AE,
resulta que AE i EB són [segments] racionals commensurables només en quadrat. [Ex 36]

Els hem elegit de manera que AB és a CD com AE a CF. [Evi 12]

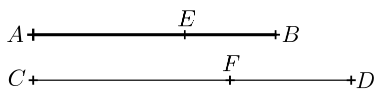


Figura Ex 66

Aleshores, el residu EB és al FD com AB a CD, [Evi 16 i Ev 19, porisma]
i AB és commensurable en longitud amb CD.

Per tant, AE també ho és amb CF,
i EB amb FD. [Ex 11]

I AE i EB són [segments] racionals.

Aleshores, CF i FD també ho són,
i AE és a CF com EB a FD. [Ev 11]

Alternando, AE és a EB com CF a FD, [Ev 16]
i AE i EB són commensurables només en quadrat.

Per tant, CF i FD també ho són, [Ex 11]
a més de racionals.

En definitiva, CD és un [segment] binomial. [Ex 36] ♠

Afirmo que és de la mateixa classe que AB.

b) L'excés del quadrat de costat AE sobre el de [costat] EB és el quadrat de costat [un segment] commensurable o incommensurable [en longitud] amb AE.

701. Amb aquesta proposició, Euclides inicia la demostració segons la qual la commensurabilitat de segments respecta la classe a la qual pertanyen.

En conseqüència, si l'excés del quadrat de costat AE sobre el de costat EB és el quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud] amb AE,
l'excés del quadrat de costat CF sobre el de [costat] FD també és el quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud] amb CF. [Ex 14]

I, si AE és commensurable [en longitud] amb un [segment] racional donat per endavant,
CF també ho és. [Ex 12]

I, per això, cada un [dels segments] AB i CD són [segments] primers binomials, [Dx 2.1]
és a dir, de la mateixa classe.

A més, si EB és commensurable [en longitud] amb el [segment] racional donat per endavant,
FD també ho és. [Ex 12]

I, de bell nou, per aquesta raó, [CD] és de la mateixa classe que AB.

Així doncs, tots són [segments] segons [binomials]. [Dx 2.2] ♠

c) I, si ni AE ni EB no són commensurables [en longitud] amb el [segment] racional donat per endavant,
ni CF ni FD no ho són, [Ex 13]
i AB i CD són tercers [binomials]. [Dx 2.3] ♠

d) Si l'excés del quadrat de costat AE sobre el de [costat] EB és el quadrat de costat [un segment] incommensurable [en longitud] amb AE,
l'excés del quadrat de costat CF sobre el de [costat] FD també és un quadrat de costat [un segment] incommensurable [en longitud] amb CF. [Ex 14]

Si AE és commensurable [en longitud] amb el [segment] racional donat per endavant,
CF també ho és, [Ex 12]
i [AB i CD] són [segments] quarts [binomials]. [Dx 2.4] ♠

I, si EB és commensurable en longitud amb el [segment] racional donat per endavant,
FD també ho és,

i [AB i CD] són [segments] cinquens [binomials]. [Dx 2.5] ♠

e) Si ni AE ni EB [no són commensurables en longitud amb el segment racional donat per endavant],
ni CF ni FD no ho són,
i [AB i CD] són [segments] sisens [binomials]. [Dx 2.6] ♠

Per tant, un [segment] commensurable en longitud amb un [segment] binomial és un [segment] binomial de la mateixa classe.
[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 67. *Un [segment] commensurable en longitud amb un [segment] bimedial també és bimedial i de la mateixa classe.*

Siguin AB un [segment] bimedial
i CD un segment commensurable en longitud amb AB.

Afirmo que CD és un [segment] bimedial de la mateixa classe que AB.

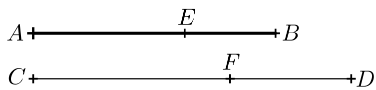


Figura Ex 67

a) AB és un [segment] bimedial dividit en [els seus components] medials per E.

Aleshores, AE i EB són [segments] medials commensurables només en quadrat, [Ex 37 i 38]
triats de manera que AB és a CD com AE a CF. [Evi 12]

En conseqüència, el residu EB és al FD com AB a CD,
[Ev 19 porisma, i Evi 16]
i AB és commensurable en longitud amb CD.

Per tant, AE i EB també són commensurables [en longitud] amb CF i FD, respectivament, [Ex 11]
i AE i EB són medials.

Aleshores, CF i FD també ho són. [Ex 23]

I, atès que AE és a EB com CF a FD,
i que AE i EB són commensurables només en quadrat,
resulta que CF i FD també ho són [Ex 11]
i, a més, medials.

Aleshores, CD és un [segment] bimedial. ♠

Afirmo també que és de la mateixa classe que AB.

b) Atès que AE és a EB com CF a FD,
com el quadrat de [costat] AE ho és al rectangle de [costats] AE i EB i com el quadrat de [costat] CF ho és al rectangle de [costats] CF i FD, [Ex 21, lema]
resulta que, *alternando*, el quadrat de [costat] AE és al de [costat] CF com el rectangle de [costats] AE i EB al de [costats] CF i FD, [Ev 16]
i el quadrat de [costat] AE és commensurable amb el de [costat] CF.

Aleshores, el rectangle de [costats] AE i EB també ho és amb el rectangle de [costats] CF i FD. [Ex 11]

En conseqüència, els rectangles de [costats] AE i EB,
i CF i FD són racionals.

D'això en resulta que o AE i CD són [segments] primers bimedials, o els rectangles de costats AE i EB, i CF i FD són medials;
i que cada un dels segments AB i CD és segon [bimedial].
[Ex 23, 37 i 38] ♠

c) Per tant, CD és de la mateixa classe que AB.
[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 68. *Un [segment] commensurable [en longitud] amb un [segment] major també ho és.*

Siguin AB un [segment] major
i CD un [segment] commensurable [en longitud] amb AB.

Afirmo que CD és un [segment] major.

Considerem [el segment] AB dividit [en els seus components] per [el punt] E.

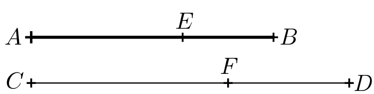


FIGURA Ex 68

Aleshores, AE i EB són incommensurables en quadrat,
la suma dels quadrats que tenen com a costats és racional
i el rectangle que els hi té, medial. [Ex 39]

Fem el mateix que hem fet en les [proposicions] prèvies.

Atès que AB és a CD com AE a CF, i EB a FD;

AE és a CF com EB a FD, [E v 11]
i AB és commensurable [en longitud] amb CD.

Per tant, AE i EB també ho són amb CF i FD, respectivament. [E x 11]

I, atès que AE és a CF com EB a FD,
alternando, AE és a EB com CF a FD. [E v 16]

Aleshores, *componendo*, AB és a BE com CD a DF. [E v 18]

Per tant, el quadrat de [costat] AB és al de [costat] BE com el de [costat] CD al de [costat] DF. [E vi 20]

Amb el mateix raonament, podem veure que el quadrat de [costat] AB és al de [costat] AE com el de [costat] CD al de [costat] CF.

I el quadrat de [costat] AB és a la suma dels quadrats de [costats] AE i EB com el quadrat de [costat] CD a la suma dels de [costats] CF i FD.

A més, *alternando*, el quadrat de [costat] AB és al de [costat] CD com la suma dels quadrats de [costats] AE i EB a la suma dels quadrats de [costats] CF i FD, [E v 16]
i el quadrat de [costat] AB és commensurable amb el de [costat] CD.

Aleshores, la suma dels quadrats de [costats] AE i EB també ho és amb la suma dels quadrats de [costats] CF i FD; [E x 11]
el quadrat de [costat] AE i el de [costat] EB, junts, són racionals,
i el quadrat de [costat] CF i el de [costat] FD, junts, també ho són.

Anàlogament, dues vegades el rectangle de [costats] AE i EB també és commensurable amb dues vegades el rectangle de [costats] CF i FD,
i dues vegades el rectangle de [costats] AE i EB és medial.

En conseqüència, dues vegades el rectangle de [costats] CF i FD també ho és, [E x 23, porisma]
CF i FD són [segments] incommensurables en quadrat [E x 13]
—simultàniament, la suma dels quadrats amb aquests costats és racional i dues vegades el rectangle que formen, medial—
i el total CD és [un segment] irracional que anomenem *major*. [E x 39]

Per tant, un [segment] commensurable [en longitud] amb un [segment] major també ho és.

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 69. *Un [segment] commensurable [en longitud] amb l'arrel quadrada d'una [àrea] racional més una [àrea] medial [també] és l'arrel quadrada d'una àrea racional més una àrea medial.*

Sigui AB l'arrel quadrada d'una [àrea] racional més una àrea medial.

I sigui CD commensurable [en longitud] amb AB.

Volem demostrar que CD també és l'arrel quadrada d'una [àrea] racional més una àrea medial.

[*Demostració.*] Dividim [el segment] AB en [els seus components] per E.

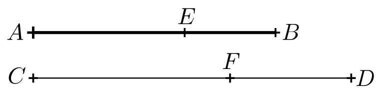


Figura Ex 69

[Els segments] AE i EB són incommensurables en quadrat;

la suma dels seus quadrats, [una àrea] medial, i el rectangle que formen, racional. [Ex 40]

Fem la mateixa construcció de les [proposicions] anteriors.

Aleshores, amb el mateix raonament, podem veure que CF i FD també són incommensurables en quadrat,

la suma dels quadrats de [costats] AE i EB és commensurable amb la suma dels quadrats de [costats] CF i FD,

i el rectangle de costats AE i EB ho és amb el [rectangle] de costats CF i FD.

Per tant, la suma dels quadrats de costats CF i FD és medial

i el rectangle de costats CF i FD, racional.

Aleshores, [el segment] CD és l'arrel quadrada d'una àrea racional més una àrea medial. [Ex 40]

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 70. *Un [segment] commensurable [en longitud] amb l'arrel quadrada de la suma de dues [àrees] medials també n'és l'arrel quadrada.*

Sigui AB l'arrel quadrada de la suma de dues [àrees] medials

i sigui CD commensurable [en longitud] amb AB.

Volem demostrar que CD també és l'arrel quadrada de la suma de dues [àrees] medials.

Atès que [el segment] AB és l'arrel quadrada de la suma de dues [àrees] medials
dividit en [els seus components] per E;
AE i EB són incommensurables en quadrat,
la suma dels seus quadrats és medial
i el rectangle que determinen també.

A més, la suma dels quadrats de [costats] AE i EB és incommensurable amb el rectangle de [costats] AE i EB. [Ex 41]

Fem la mateixa construcció de les [proposicions] anteriors.

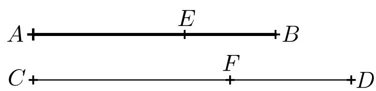


Figura Ex 70

Amb el mateix raonament, podem veure que CF i FD són incommensurables en quadrat,
la suma dels quadrats de [costats] AE i EB és commensurable amb la dels quadrats de [costats] CF i FD,
i el rectangle de [costats] AE i EB ho és amb el de [costats] CF i FD.

Per tant, la suma dels quadrats de [costats] CF i FD és [una àrea] medial,
el rectangle de [costats] CF i FD també ho és
i la suma dels quadrats de [costats] CF i FD és incommensurable amb el rectangle de [costats] CF i FD.

Així doncs, CD és l'arrel quadrada de la suma de dues [àrees] medials. [Ex 41]

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 71. *Si ajuntem una* [*àrea*] *racional i una* [*àrea*] *medial, obtenim quatre* [*segments*] *racionals* [*que són arrels quadrades de l'àrea conjunta*]. *Concretament:* a*) un* [*segment*] *binomial,* b*) un* [*segment*] *primer bimedial,* c*) un* [*segment*] *major o* d*) l'arrel quadrada d'una* [*àrea*] *racional més una* [*àrea*] *medial.*[702]

702. Aquesta proposició i la següent precisen la mena de segments que són les arrels quadrades de sumes d'àrees, d'acord amb la naturalesa d'aquestes àrees.

Siguin $\square\, AB$ una [àrea] racional i $\square\, CD$ una [àrea] medial.

Afirmo que l'arrel quadrada de $\square\, AD$ és una d'aquestes quatre possibilitats:

a) Binomial.
b) Primer bimedial.
c) Major.
d) Arrel quadrada d'una [àrea] racional més una de medial.

[*Demostració*.] El [rectangle] $\square\, AB$ és:[703]

a) més gran que [el rectangle] $\square\, CD$, o
b) més petit que aquest.

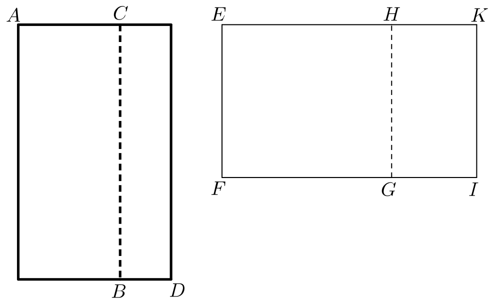


Figura Ex 71

a) En primer lloc, suposem que és més gran.

Considerem un [segment] racional EF. [Ex 1.3]

Hi apliquem [el rectangle] $\square\, EG$ equivalent a[l rectangle] $\square\, AB$. [Evi 12]

Aquest rectangle produeix una amplada EH.

Apliquem també [el rectangle] $\square\, HI$, equivalent a[l rectangle] $\square\, DC$, al [segment] EF. [Evi 12]

Aquest rectangle produeix una amplada HK.

Atès que $\square\, AB$ és [una àrea] racional i que [el rectangle] $\square\, EG$ equival a $\square\, AB$,
[el rectangle] $\square\, EG$ és racional.

Però l'hem aplicat al [segment] racional EF
i ha produït una amplada equivalent a EH.

Per tant, EH és un [segment] racional commensurable en longitud amb el EF. [Ex 20]

Novament, atès que $\square\, CD$ és medial i equivalent a $\square\, HI$,
[el rectangle] $\square\, HI$ també és [una àrea] medial.

L'hem aplicat al [segment] racional EF i ha produït una amplada equivalent al HK.

703. Disjunció de casos.

Per tant, [el segment] HK és racional incommensurable en longitud amb el EF. [Ex 22]

I, com que $\square\, CD$ és [una àrea] medial i $\square\, AB$ és racional, [els rectangles] $\square\, AB$ i $\square\, CD$ són incommensurables.

Per tant, $\square\, EG$ també és incommensurable amb $\square\, HI$, i $\square\, EG$ és a $\square\, HI$ com EH a HK. [Evi 1]

Aleshores, [el segment] EH és incommensurable en longitud amb el HK, [Ex 11] i tots dos són racionals.

Així doncs, [els segments] EH i HK són racionals i commensurables només en quadrat.

[El segment] EK és binomial dividit [en els seus components] per [el punt] H. [Ex 3]

I, atès que [el rectangle] $\square\, AB$ és més gran que el $\square\, CD$, que [el rectangle] $\square\, AB$ equival al $\square\, EG$ i que $\square\, CD$ ho és al $\square\, HI$, resulta que $\square\, EG$ també és més gran que $\square\, HI$. [per substitució]

Aleshores, [el segment] EH també ho és que el HK. [Ev 24]

En conseqüència, l'excés del quadrat de costat EH sobre el de [costat] HK és un quadrat de costat:[704]

a_1) [Un segment] commensurable en longitud amb EH.

a_2) [Un segment] incommensurable [en longitud amb EH].

a_1) En primer lloc, considerem el cas en el qual l'excés és el quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud amb el segment EH], i que el més gran [dels dos components de EK], HE, és commensurable [en longitud] amb el [segment] EF donat per endavant.

Aleshores, EK és un [segment] primer binomial [Dx 2.1] i [el segment] EF és racional.

I, si una àrea està determinada per un [segment] racional i un [segment] primer binomial, la seva arrel quadrada és un segment binomial. [Ex 54]

Aleshores, l'arrel quadrada de $\square\, EI$ també ho és.

Per tant, l'arrel quadrada de $\square\, AD$, també. ♠

704. Disjunció de casos.

a_2) Si l'excés del quadrat de costat EH sobre el de [costat] HK és el quadrat de costat [un segment] incommensurable [en longitud] amb EH,
i el component més gran [de EK], EH, és commensurable en longitud amb el [segment] racional EF donat per endavant;
[el segment] EK és un [segment] quart binomial [Dx 2.4]
i EF és racional.

I, si una àrea està determinada per un [segment] racional i un quart binomial,
la seva arrel quadrada és un [segment] irracional anomenat *major*. [Ex 57]

Així doncs, l'arrel quadrada de $\square\, EI$ és un [segment] major.

Per tant, l'arrel quadrada de $\square\, AD$ també ho és. ♠

b) Sigui $\square\, AB$ més petit que $\square\, CD$.

Aleshores, $\square\, EG$ també ho és que $\square\, HI$.

Per tant, EH també és més petit que HK, [Evi 1 i Ev 14]
i l'excés del quadrat de costat HK sobre el de [costat] EH és un quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud] amb HK o [de costat un segment] incommensurable [en longitud] amb aquest.

b_1) Sigui l'excés un quadrat de costat [un segment] commensurable en longitud amb HK.

I sigui el petit [dels dos components de EK], EH, commensurable en longitud amb el [segment] racional EF donat per endavant.

Aleshores, EK és un [segment] segon binomial [Dx 2.2]
i EF és racional. ♠

b_2) Si una àrea està determinada per un [segment] racional i un segon binomial,
la seva arrel quadrada és un primer bimedial. [Ex 55]

Aleshores, l'arrel quadrada de $\square\, EI$ és un [segment] primer bimedial.

Per tant, l'arrel quadrada de $\square\, AD$ també ho és. ♠

Sigui l'excés del quadrat de costat HK sobre el de [costat] HE un quadrat de costat [un segment] incommensurable [en longitud] amb HK.

I sigui el petit [dels dos components de EK], EH, commensurable [en longitud] amb el [segment] racional EF donat per endavant.

Aleshores, EK és un [segment] cinquè binomial [Dx 2.5]
i EF és racional. ♠

b_3) Si una àrea està determinada per un [segment] racional i un cinquè binomial,
la seva arrel quadrada ho és també d'una [àrea] racional més una [àrea] medial. [Ex 58]

Aleshores, l'arrel quadrada de $\square\, EI$ també ho és d'una [àrea] racional més una àrea medial.

Per tant, l'arrel quadrada de $\square\, AD$ també ho és d'una [àrea] racional més una [àrea] medial. ♠

En definitiva, quan ajuntem una àrea racional i una àrea medial, hi ha quatre [segments] racionals [arrels quadrades de l'àrea conjunta]:
un binomial, un primer bimedial, un major o una arrel quadrada d'una [àrea] racional més una [àrea] medial.
[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 72. *Si ajuntem dues* [*àrees*] *medials incommensurables entre si, obtenim dos segments racionals* [*arrels quadrades de l'àrea total*]. *Concretament:* a*) un* [*segment*] *segon bimedial o* b*) l'arrel quadrada de* [*la suma de*] *dues* [*àrees*] *medials.*

Ajuntem dues [àrees] medials $\square\, AB$ i $\square\, CD$ incommensurables entre si.

Afirmo que l'arrel quadrada [conjunta] de $\square\, AD$ és
un [segment] segon bimedial
o l'arrel quadrada de la suma de les dues [àrees] medials.

I es poden donar aquestes dues possibilitats:[705]

a) [El rectangle] $\square\, AB$ és més gran que el $\square\, CD$.
b) [El rectangle] $\square\, AB$ és més petit que el $\square\, CD$.

[*Demostració.*] *a*) En primer lloc, suposem que el $\square\, AB$ és més gran que el $\square\, CD$.

Considerem un [segment] racional EF. [Dx 1.3]

705. Disjunció de casos.

Hi apliquem [el rectangle] $\square\, EG$ equivalent al $\square\, AB$.

Aquest rectangle produeix l'amplada EH.

I [el rectangle] $\square\, HI$, equivalent a[l rectangle] $\square\, CD$, produeix l'amplada HK.

Atès que [les àrees] $\square\, AB$ i $\square\, CD$ són medials,
[les àrees] $\square\, EG$ i $\square\, HI$ també ho són.

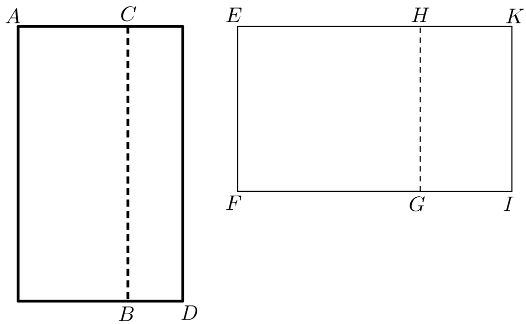


Figura Ex 72

Les hem aplicat al segment racional FE,
i produeixen les amplades [respectives] EH i HK.

Aleshores, [els segments] EH i HK són racionals incommensurables en longitud amb EF. [Ex 22]

I, atès que [el rectangle] $\square\, AB$ és incommensurable amb [el rectangle] $\square\, CD$,
$\square\, AB$ i $\square\, CD$ són equivalents a $\square\, EG$ i $\square\, HI$[, respectivament],
i $\square\, EG$ també és incommensurable amb $\square\, HI$. [per substitució]

A més, $\square\, EG$ és a $\square\, HI$ com EH a HK. [Evi 1]

Per tant, [el segment] EH és incommensurable en longitud amb el HK. [Ex 11]

Així doncs, EH i HK són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

En definitiva, EK és un [segment] binomial. [Ex 36]

L'excés del quadrat de costat EH sobre el de [costat] HK pot ser un quadrat:[706]

a_1) Amb [un segment] commensurable [en longitud] amb EH com a costat.

a_2) Amb [un segment] incommensurable [en longitud] amb EH com a costat.

a_1) D'entrada, suposem que l'excés és el quadrat de costat [un segment] commensurable en longitud amb [EH].

706. Disjunció de casos.

Ni EH ni HK són commensurables en longitud amb el [segment] racional EF.

Aleshores, EK és un [segment] tercer binomial [Dx 2.3]
i EF és racional.

Però, si una àrea està determinada per un [segment] racional i un tercer binomial,
la seva arrel quadrada és un segon bimedial. [Ex 56]

Aleshores, l'arrel quadrada de [l'àrea] $\square\, EI$ —és a dir, de $\square\, AD$— és un [segment] segon bimedial.

a_2) Suposem que l'excés del quadrat de costat EH sobre el de [costat] HK és el quadrat de costat [un segment] incommensurable en longitud amb EH,
i que [els segments] EH i HK són incommensurables en longitud amb el EF.

Aleshores, EK és un [segment] sisè binomial. [Dx 2.6]

I, si una àrea està determinada per un [segment] racional i un sisè binomial,
la seva arrel quadrada ho és de [la suma de] dues [àrees] medials. [Ex 59]

Per tant, l'arrel quadrada de $\square\, AD$ també ho és de [la suma de] dues [àrees] medials.

[Amb el mateix raonament, podem veure que, si $\square\, AB$ és més petit que $\square\, CD$,
l'arrel quadrada de $\square\, AD$ és un [segment] segon bimedial
o l'arrel quadrada de [la suma de] dues [àrees] medials.] ♠

Així doncs, quan ajuntem dues [àrees] medials incommensurables entre si,
els dos [segments] racionals que obtenim [com a arrels quadrades de l'àrea total]
són un [segment] segon bimedial
o l'arrel quadrada de [la suma de] dues [àrees] medials. ♠

Un [segment] binomial i els [segments] irracionals que se'n deriven no són un [segment] medial ni són iguals entre si,
ja que:

a) El quadrat de costat un [segment] medial, aplicat a un [segment] racional, produeix l'amplada corresponent a un segment racional incommensurable en longitud amb [el segment] al qual s'ha aplicat. [Ex 22]

b) El quadrat de costat un [segment] binomial, aplicat a un [segment] racional, produeix l'amplada corresponent a un [segment] primer binomial. [Ex 60]

c) El quadrat de [costat] un [segment] primer bimedial, aplicat a un [segment] racional, produeix l'amplada corresponent a un [segment] segon binomial. [Ex 61]

d) El quadrat de [costat] un [segment] segon bimedial, aplicat a un [segment] racional, produeix l'amplada corresponent a un [segment] tercer binomial. [Ex 62]

e) El quadrat de [costat] un [segment] major, aplicat a un [segment] racional, produeix l'amplada corresponent a un [segment] quart binomial. [Ex 63]

f) El quadrat de [costat] l'arrel quadrada d'una àrea racional més una [àrea] medial, aplicat a un [segment] racional, produeix l'amplada corresponent a un [segment] cinquè binomial. [Ex 64]

g) El quadrat de [costat] l'arrel quadrada de [la suma de] dues [àrees] medials, aplicat a un [segment] racional, produeix l'amplada corresponent a un [segment] sisè binomial. [Ex 65]

I totes aquestes amplades difereixen de la primera i de les altres.

De la primera perquè és racional,
i de les altres perquè no són de la mateixa classe.

En definitiva, els [segments] esmentats abans també difereixen entre si.

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 73. *Si, d'un segment racional, en sostraiem un altre que, a més, és commensurable només en quadrat amb el total, el residu és un [segment] irracional que s'anomena* apòtom.[707]

707. Les proposicions Ex 73, 74, 75, 76, 77 i 78 estableixen la forma dels segments obtinguts restant certes classes de segments. Preparen el camí de les definicions Dx 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 i 3.6.

Sigui BC un [segment] racional commensurable només en quadrat amb el total [racional AB].

El sostraiem del total AB.

Afirmo que el [segment] residual AC és irracional.

S'anomena *apòtom*.

[*Demostració*.] Atès que AB és incommensurable en longitud amb BC,

i que AB és a BC com el quadrat de [costat] AB al rectangle de [costats] AB i BC, [Ex 21, lema]

resulta que el quadrat de [costat] AB és incommensurable amb el rectangle de [costats] AB i BC. [Ex 11]

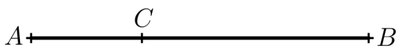


Figura Ex 73

Però la suma dels quadrats de [costats] AB i BC és commensurable amb el quadrat de [costat] AB, [Ex 15]

i dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC ho és amb el de [costats] AB i BC. [Ex 6]

I, a més, com que la suma dels quadrats de [costats] AB i BC equival a dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC més el quadrat de [costat] CA, [Eii 7]

resulta que la suma dels quadrats de [costats] AB i BC és incommensurable amb el [quadrat] residual de costat AC. [Ex 13 i 16]

Però la suma dels [quadrats] de [costats] AB i BC és racional.

Per tant, AC és un [segment] irracional. [Dx 1.4]

L'anomenarem [*segment*] *apòtom*.[708]

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 74. *Si, d'un segment medial, en sostraiem un altre que, a més, és commensurable només en quadrat amb el total i tots dos determinen una* [*àrea*] *racional, el residu és un* [*segment*] *irracional que s'anomena* primer apòtom d'un [segment] medial.

Sigui BC un [segment] medial commensurable només en quadrat amb [el total] AB amb el qual determina un [rectangle] racional.

708. Vegeu la nota 616 (pàgina 270).

El sostraiem del [segment] medial AB. [Ex 27]

Afirmo que el [segment] residual AC és irracional.

S'anomena el *primer apòtom d'un* [*segment*] *medial.*

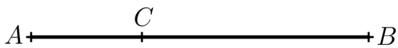


Figura Ex 74

[*Demostració.*] Atès que AB i BC són [segments] medials,
la suma dels quadrats de [costats] AB i BC també ho és,
i dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC, racional.

Per tant, la suma dels quadrats de [costats] AB i BC és incommensurable amb dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC.

Aleshores, dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC també ho és amb el [quadrat] residual de costat AC; [Eii 7]
atès que, si el total és incommensurable amb una de les magnituds [constituent],
la magnitud original també ho és amb l'altra. [Ex 16]

Però dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC és racional.

Aleshores, el quadrat de [costat] AC és irracional.

Per tant, AC és un [segment] irracional. [Dx 1.4]

L'anomenarem *primer apòtom d'un* [*segment*] *medial.*[709]

[I això és el que volíem demostrar.] ♠[710]

Ex 75. *Si, d'un segment medial, en sostraiem un altre que, a més, és commensurable només en quadrat amb el total i tots dos determinen una* [*àrea*] *medial, la diferència és un* [*segment*] *irracional que s'anomena* segon apòtom d'un [segment] medial.

Sigui CB el [segment] medial commensurable només en quadrat amb el total AB amb el qual determina un [rectangle] medial.

El sostraiem del [segment] medial AB. [Ex 28]

Afirmo que el [segment diferència] AC és irracional.

S'anomena [*segment*] *segon apòtom d'un* [*segment*] *medial.*

[*Demostració.*] Agafem un [segment] racional DI. [Dx 1.3]

A[l segment] DI hi apliquem el $\square$ DE,
equivalent a la suma dels quadrats de [costats] AB i BC. [Evi 12]

709. Vegeu la nota 619 (pàgina 271).
710. Vegeu Ex 37 (pàgina 270).

Aquest rectangle produeix l'amplada DG.

A[l segment] DI hi apliquem [el rectangle] $\square\, DH$, equivalent a dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC. [Evi 12]

Aquest rectangle produeix l'amplada DF.

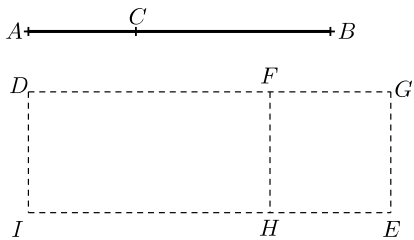


Figura Ex 75

El rectangle diferència $\square\, FE$ equival al quadrat de [costat] AC. [Eii 7]

Atès que els quadrats de [costats] AB i BC, commensurables [entre si], són medials, [el rectangle] $\square\, DE$ també ho és. [Ex 15 i 23, porisma]

Quan l'apliquem al [segment] racional DI [Evi 12] produeix l'amplada DG.

Per tant, [el segment] DG és racional i incommensurable en longitud amb DI. [Ex 22]

De bell nou, atès que el rectangle de [costats] AB i BC és medial, dues vegades el rectangle d'aquests costats també ho és, [Ex 23, porisma]

i equival al $\square\, DH$.

Aleshores, $\square\, DH$ també és medial.

L'hem aplicat a un [segment] racional DI i ha produït una amplada DF.

Per tant, [el segment] DF és racional i incommensurable en longitud amb DI. [Ex 22]

I, atès que AB i BC són commensurables només en quadrat, AB és incommensurable en longitud amb BC.

Aleshores, el quadrat de [costat] AB també és incommensurable amb el rectangle de [costats] AB i BC. [Ex 21, lema, i Ex 11]

Però la suma dels quadrats de [costats] AB i BC és commensurable amb el quadrat de [costat] AB, [Ex 15]

i dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC ho és amb el rectangle d'aquests costats. [Ex 6]

Per tant, dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC és incommensurable amb la suma dels quadrats de [costats] AB i BC, [Ex 13] [el rectangle] $\square\, DE$ equival a la suma dels [quadrats] de [costats] AB i BC

i [el rectangle] $\square\, DH$ equival a dues vegades el de [costats] AB i BC.

Per tant, [el rectangle] $\square\, DE$ és incommensurable amb [el rectangle] $\square\, DH$

i [el rectangle] $\square\, DE$ és al $\square\, DH$ com GD a DF. [Evi 1]

Aleshores, [el segment] GD és incommensurable amb DF, [Ex 11]

i tots dos [segments] són racionals.

En definitiva, GD i DF són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

Per tant, [el segment] FG és un apòtom, [Ex 73]

[el segment] DI és racional

i l'àrea que determinen un [segment] racional i un [segment] irracional és irracional. [Ex 20]

A més, la seva arrel quadrada també ho és.

I AC és l'arrel quadrada de $\square\, FE$.

En definitiva, AC és un [segment] irracional. [Dx 1.4]

L'anomenarem [*segment*] *segon apòtom d'un* [*segment*] *medial.*[711]

[I això és el que volíem demostrar.] ♠[712]

Ex 76. *Considerem un segment incommensurable en quadrat amb el total. Suposem que el seu quadrat més el del total és racional i que* [*dues vegades*][713] *el rectangle* [*determinat per aquests costats*] *és medial. Si el sostraiem d'un* [*altre*] *segment, el residu és un* [*segment*] *irracional que s'anomena* [segment] menor.

Suposem que hem sostret del segment AB un segment BC incommensurable en quadrat amb el total [AB],

i que BC compleix les [condicions] prescrites. [Ex 13]

Afirmo que el residu AC és un [segment] irracional anomenat *menor.*

[*Demostració.*] Atès que la suma dels quadrats de [costats] AB i BC és racional,

i que dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC és medial;

711. Vegeu la nota 624 (pàgina 273).

712. Vegeu Ex 38 (pàgina 271).

713. Euclides omet aquest fet.

la suma dels quadrats de [costats] AB i BC és incommensurable amb dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC.

I, *convertendo*, la [suma dels quadrats] de costats AB i BC és incommensurable amb el [quadrat] restant de costat AC,[Eɪɪ 7 i Ex 16]
la suma dels quadrats de [costats] AB i BC és racional
i el quadrat de [costat] AC, irracional.

En definitiva, AC és un [segment] irracional. [Dx 1.4]

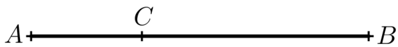


Figura Ex 76

L'anomenarem [*segment*] *menor*.

[I això és el que volíem demostrar.] ♠[714]

Ex 77. *Si, d'un segment total, en sostraiem un d'incommensurable en quadrat amb el total, la suma dels quadrats de* [*costats*] *el segment i el total és* [*una àrea*] *medial i dues vegades el rectangle amb aquests costats és racional; aleshores el residu és un* [*segment*] *irracional que s'anomena* [segment] que amb una [àrea] racional determina una [àrea] medial.[715]

Sigui BC el [segment] incommensurable en quadrat amb [el total] AB que compleix les condicions prescrites.

El sostraiem de[l segment] AB. [Ex 34]

Afirmo que el residu AC és el segment irracional esmentat.

[*Demostració.*] Atès que la suma dels quadrats de costats AB i BC és medial,

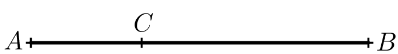


Figura Ex 77

i dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC, racional;
la suma dels quadrats de [costats] AB i BC és incommensurable amb dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC.

Aleshores, el quadrat restant de [costat] AC també ho és amb dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC, [Eɪɪ 7 i Ex 16]
i dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC és racional.

Aleshores, el quadrat de [costat] AC és irracional.

En definitiva, AC és un [segment] irracional. [Dx 1.4]

714. Vegeu Ex 39 (pàgina 273).

715. És el segment que és l'arrel quadrada de la diferència de dues àrees, una racional i l'altra medial, és a dir, el seu quadrat equival a la diferència de les dues àrees. Vegeu Vera (1970), volum ɪ, p. 905.

I hem vist que [el segment] que produeix aquesta [àrea] és medial. [I això és el que volíem demostrar.] ♠[716]

Ex 78. *Si, d'un segment total, en sostraiem un d'incommensurable en quadrat amb el total, la suma dels quadrats de [costats] el segment i el total és [una àrea] medial i, a més, la suma dels quadrats és incommensurable amb dues vegades el rectangle de [costats] aquests dos [segments]; aleshores el residu és un [segment] irracional que s'anomena* segment que amb una àrea medial determina una [àrea] entera medial.[717]

Sigui BC el segment incommensurable en quadrat amb AB amb les condicions prescrites.

El sostraiem del [segment] AB. [Ex 35]

Afirmo que el residu AC és un [segment] irracional que amb un [altre segment] medial fa una [àrea] medial.

[*Demostració.*] Sigui DI un [segment] racional donat per endavant.

Al segment DI hi apliquem [el rectangle] $\square DE$ equivalent a la suma dels quadrats de [costats] AB i BC.

Aquest rectangle produeix l'amplada DG.

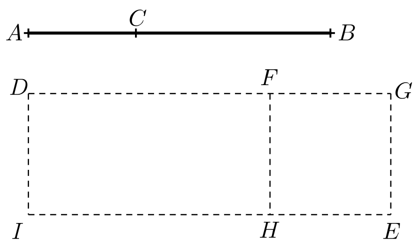


Figura Ex 78

Sigui $\square DH$ equivalent a dues vegades el rectangle de [costats] AB i BC.

Sostraiem DH [de $\square DE$].

[El rectangle diferència produeix l'amplada GF.]

Aleshores, el residu $\square FE$ equival al quadrat de [costat] AC. [Eii 7]

Per tant, AC és l'arrel quadrada de $\square FE$.

Atès que la suma dels quadrats de [costats] AB i BC és medial i equivalent a $\square DE$,

$\square DE$ és [una] àrea medial.

716. Vegeu Ex 40 (pàgina 274).

717. Vegeu la nota 715 (pàgina 341).

Però hem aplicat $\square\, DE$ a un [segment] racional DI i hem produït una amplada DG.

Per tant, DG és [un segment] racional incommensurable en longitud amb DI. [Ex 22]

De bell nou, atès que dues vegades el [rectangle] de [costats] AB i BC és medial i equivalent a $\square\, DH$,
i que $\square\, DH$ és [una àrea] medial, aplicada a[l segment] racional DI que genera l'amplada DF,
resulta que DF també és racional incommensurable en longitud amb DI. [Ex 22]

Atès que la [suma dels quadrats] de costats AB i BC és incommensurable amb dues vegades el [rectangle] de [costats] AB i BC,
el [rectangle] $\square\, DE$ també ho és amb $\square\, DH$.

I $\square\, DE$ és a $\square\, DH$ com DG a DF. [Evi 1]

Per tant, [el segment] DG és incommensurable [en longitud] amb el DF, [Ex 11]
i tots dos són racionals.

D'això en resulta que [els segments] DG i DF són racionals commensurables només en quadrat.

Aleshores, [el segment] FG és un apòtom, [Ex 73]
[el segment] FH és racional,
i el [rectangle] format per [un segment] racional i un apòtom és irracional. [Ex 20]

Com que l'arrel quadrada [d'aquest rectangle] és irracional, [Dx 1.4]
i AC és l'arrel quadrada de $\square\, FE$,
resulta que [el segment] AC és irracional.

L'anomenarem [*segment*] *que amb una* [*àrea*] *medial determina una* [*àrea*] *entera medial.*

[I això és el que volíem demostrar.] ♠[718]

Ex 79. *A un* [*segment*] *apòtom tan sols hi podem associar un component racional commensurable només en quadrat amb el total.*[719]

718. Vegeu Ex 41 (pàgina 274).

719. Aquesta proposició equival a Ex 42 (pàgina 277) amb el signe menys en lloc de més.

Sigui AB un [segment] apòtom.

Hi afegim [el segment] BC.

[Els segments] AC i CB són [segments] racionals commensurables només en quadrat. [Ex 73]

Afirmo que no és possible afegir a AB cap altre [segment] racional commensurable només en quadrat amb el total.

[*Demostració.*] Suposem que és possible.[720]

Afegim [el segment] BD [a AB].

Aleshores, AD i DB també són [segments] racionals commensurables només en quadrat. [Ex 73]

Atès que l'àrea suma dels quadrats de [costats] AD i DB excedeix dues vegades [l'àrea d]el rectangle de [costats] AD i DB;
la [suma] dels quadrats de [costats] AC i CB excedeix la mateixa [àrea] dues vegades [l'àrea d]el rectangle de [costats] AC i CB.

Sigui aquest excedent comú el quadrat de costat AB. [EII 7]

De manera alternativa, si l'[àrea] suma dels quadrats de [costats] AD i DB excedeix l'[àrea] suma dels [quadrats],
dues vegades el [rectangle] de [costats] AD i DB [també] excedeix aquesta mateixa àrea dues vegades el de [costats] AC i CB.

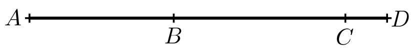


FIGURA Ex 79

I l'excés de la suma dels quadrats de [costats] AD i DB sobre la dels quadrats de [costats] AC i CB és una [àrea] racional,
ja que totes dues [àrees] ho són.

Per tant, l'excés de dues vegades el rectangle de [costats] AD i DB sobre dues vegades el de [costats] AC i CB també és una [àrea] racional.

I això és impossible perquè les dues [àrees] són medials [Ex 21]
i l'excés d'una [àrea] medial sobre una [altra] no és mai [una àrea] racional. [Ex 26] ♠

Aleshores, AC i CB són [segments] medials commensurables només en quadrat que determinen una [àrea] racional. [Ex 74]

720. Hipòtesi de l'absurd.

En definitiva, no podem associar a AB cap [segment] racional commensurable només en quadrat amb el total.[721]

I, per tant, a un [segment] apòtom només hi podem associar un únic [segment] racional commensurable només en quadrat amb el total.

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 80. *A un [segment] primer apòtom d'un medial tan sols hi podem associar un component medial commensurable només en quadrat amb el total amb el qual forma una [àrea] racional.*[722]

Siguin AB un primer apòtom d'un [segment] medial
i BC [el segment] que hi està associat.

Afirmo que no és possible associar a AB cap altre [segment] medial commensurable només en quadrat amb el total i amb el qual determini una [àrea] racional.

[*Demostració.*] Si és possible,[723]
hi ha [un altre segment] DB associat a AB.

Aleshores, AD i DB són [segments] medials commensurables només en quadrat que determinen una [àrea] racional. [Ex 74]

I, si l'[àrea] suma dels quadrats de [costats] AD i DB excedeix dues vegades el rectangle de [costats] AD i DB,

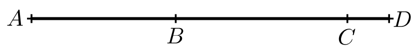


Figura Ex 80

la suma dels quadrats de [costats] AC i CB també excedeix la [mateixa àrea] dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB.

Per tant, tots dos tenen el mateix excés —[l'àrea d]el quadrat de [costat] AB. [Eii 7]

Alternativament, si l'[àrea] suma [dels quadrats] de [costats] AD i DB excedeix l'[àrea] suma [dels quadrats] de [costats] AC i CB, aleshores dues vegades el rectangle de [costats] AD i DB també excedeix aquesta [mateixa àrea] dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB.

721. És a dir, fer-hi correspondre, com a component, un altre segment.

722. Aquesta proposició equival a Ex 43 (pàgina 279) amb el signe menys en lloc de més.

723. Hipòtesi de l'absurd.

Ara bé, l'excés de dues vegades el rectangle de [costats] AD i DB sobre dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB és una [àrea] racional, ja que les dues [àrees] ho són.

Aleshores, l'excés de la [suma] dels quadrats de costats AD i DB sobre l'[àrea] suma dels de [costats] AC i CB també és una [àrea] racional.

I això és impossible, ja que les dues són [àrees] medials

[Ex 15 i 30, porisma]

i l'excés d'una [àrea] medial sobre una [altra] no és mai [una àrea] racional. [Ex 26] ♠

En definitiva, només hi ha un [segment] medial commensurable [només] en quadrat amb el total que formi una [àrea] racional que pugui ser associada a un [segment] primer apòtom d'un [segment] medial.

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 81. *A un segon apòtom d'un [segment] medial tan sols hi podem associar un [segment] medial commensurable [només] en quadrat amb el qual forma una [àrea] medial.*[724]

Siguin AB un segon apòtom d'un [segment] medial i BC el seu component.

Aleshores, AC i CB són [segments] medials commensurables només en quadrat que determinen una [àrea] medial —la del rectangle de costats AC i CB.

[Ex 75]

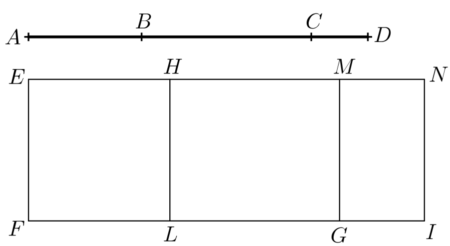


FIGURA Ex 81

Afirmo que no és possible associar-hi cap altre segment medial commensurable només en quadrat amb el total
de manera que [tots dos] formin una [àrea] medial.

724. Aquesta proposició equival a Ex 44 (pàgina 280) amb el signe menys en lloc de més.

[*Demostració.*] Si és possible,[725]
sigui BD el [component] associat.

Aleshores, AD i DB també són [segments] medials commensurables només en quadrat i determinen una [àrea] medial —la de costats AD i DB. [Ex 75]

Considerem un segment racional EF.[726]

Al [segment] EF hi apliquem [el rectangle] $\square\, EG$ equivalent a la suma dels quadrats de [costats] AC i CB.

Aquest rectangle produeix l'amplada EM.

De[l rectangle] $\square\, HG$ en sostraiem el $\square\, HG$ equivalent a dues vegades el de [costats] AC i CB.

Aquest rectangle produeix una amplada HM.

Aleshores, el residu $\square\, EL$ equival al quadrat de [costat] AB. [Eii 7]

Per tant, AB és l'arrel quadrada de $\square\, EL$.

A[l segment] EF hi apliquem [el rectangle] $\square\, EI$ equivalent a la suma dels quadrats de [costats] AD i DB.

Aquest rectangle produeix l'amplada EN.

I [el rectangle] $\square\, EL$ equival al quadrat de [costat] AB.

Aleshores, el residu és igual a dues vegades el rectangle de [costats] AD i DB. [Eii 7]

I, atès que AC i CB són [segments] medials,
la [suma] dels quadrats de [costats] AC i CB també ho és,
i igual a EG.

Per tant, [el segment] EG també és medial. [Ex 15 i 23, porisma]

Hi apliquem el [rectangle] racional $\square\, EF$,
i produeix l'amplada EM.

Aleshores, EM és racional i incommensurable en longitud amb EF. [Ex 22]

Novament, atès que el rectangle de [costats] AC i CB és medial;
dues vegades el de [costats] AC i CB també ho és, [Ex 23]
i equival a $\square\, HG$.

I [el rectangle] $\square\, HG$ també ho és.

L'apliquem al [segment] racional EF i produeix l'amplada HM.

---

725. Hipòtesi de l'absurd.

726. Vegeu el problema 20 (pàgina 23).

Per tant, HM també és racional i incommensurable en longitud amb EF. [Ex 22]

I, atès que AC i CB són commensurables només en quadrat,
AC és incommensurable en longitud amb CB.

I, com que AC és a CB com el quadrat de [costat] AC al rectangle de [costats] AC i CB, [Ex 21]
el quadrat de [costat] AC és incommensurable amb el rectangle de [costats] AC i CB. [Ex 11]

Però la suma dels quadrats de [costats] AC i CB és commensurable amb el quadrat de [costat] AC,
i dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB ho és amb el rectangle de [costats] AC i CB. [Ex 6]

Per tant, la suma dels quadrats de [costats] AC i CB és incommensurable amb dues vegades el rectangle d'aquests costats, [Ex 13]
[el rectangle] $\square\, EG$ equival a la suma dels quadrats de [costats] AC i CB,
i $\square\, GH$ a dues vegades el rectangle de [costats] AC i CB.

D'això en resulta que $\square\, EG$ és incommensurable amb $\square\, HG$,
i $\square\, EG$ és a $\square\, HG$ com EM a HM. [Evi 1]

A més, EM és incommensurable en longitud amb MH [Ex 11]
i tots dos són [segments] racionals.

En conseqüència, EM i MH són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

Per tant, EH és un apòtom [Ex 73]
i té associat [el segment] HM. ♠

De manera anàloga, podem establir també que HN és commensurable només en quadrat amb EN i que està associat a [EH].

En definitiva, segments diferents commensurables només en quadrat amb el total són associats a un apòtom. I això és impossible. [Ex 79]

Així doncs, a un segon apòtom d'un [segment] medial
només hi podem associar un segment medial commensurable només en quadrat amb el total,
amb el qual determina una [àrea] medial.
[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 82. *A un segment menor tan sols hi podem associar un segment, incommensurable en quadrat amb el total, que fa que la suma dels quadrats de* [*costats*] *el segment i el segment més el total sigui racional, i que dues vegades el rectangle amb aquests costats sigui medial.*[727]

Sigui AB un [segment] menor.

De AB, sostraiem BC. [Ei 2]

Aleshores, AC i CB són incommensurables en quadrat,
fan racional la suma dels quadrats dels seus costats,
i medial dues vegades el rectangle que determinen. [Ex 76]

Afirmo que cap altre segment que satisfaci les mateixes [condicions] pot ser [un component] associat a AB.

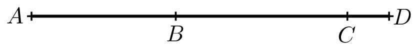


Figura Ex 82

[*Demostració.*] Si és possible,[728]
sigui BD aquest segment associat.

Aleshores, AD i DB també són incommensurables en quadrat i satisfan les [condicions] esmentades. [Ex 76]

Sigui quina sigui l'àrea amb la qual la suma dels quadrats de [costats] AD i DB excedeix la dels quadrats de [costats] AC i CB,
dues vegades el rectangle de [costats] AD i DB també excedeix amb aquesta àrea dues vegades el de [costats] AC i CB. [Eii 7]

I l'excés de la suma dels quadrats de [costats] AD i DB sobre la suma dels quadrats de [costats] AC i CB és una [àrea] racional,
ja que totes dues són [àrees] racionals.

Per tant, l'excés de dues vegades el rectangle de [costats] AD i DB sobre dues vegades el de [costats] AC i CB també és una [àrea] racional. I això és impossible, ja que són [àrees] medials. [Ex 26] ♠

En definitiva, el segment incommensurable en quadrat amb el total que fa que la suma dels quadrats que els tenen com a costats sigui [una àrea] racional,

727. Aquesta proposició equival a Ex 45 (pàgina 282) amb el signe menys en lloc de més.

728. Hipòtesi de l'absurd.

i que dues vegades el rectangle amb aquests [costats] sigui medial, és l'únic [segment] associat a[l segment] menor.

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 83. *A un segment incommensurable en quadrat amb el total, que fa que l'*[*àrea*] *suma dels quadrats de* [*costats*] *ell mateix i ell mateix més el total sigui medial, i que dues vegades el* [*rectangle que formen*] *sigui racional, tan sols hi podem associar* [*com a component*] *un segment, de manera que* [*el quadrat del segment inicial*][729] *més una* [*àrea*] *racional en produeixi una de medial.*[730]

Sigui AB un [segment] que amb una [àrea] racional en produeix una de [total] medial.[729]

Hi adjuntem BC. [Ei 2]

Aleshores, AC i CB són incommensurables en quadrat i satisfan les altres [condicions]. [Ex 77]

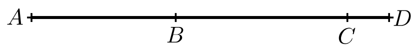


Figura Ex 83

Afirmo que a AB no hi podem associar cap altre [component] que compleixi les condicions esmentades.

[*Demostració.*] Si és possible,[731]

sigui BD aquest component associat.

Aleshores, AD i DB són segments incommensurables en quadrat que satisfan les altres condicions esmentades. [Ex 77]

En conseqüència, de manera anàloga a la de les [proposicions] anteriors,

atès que, per a qualsevol [àrea], la [suma] dels quadrats de [costats] AD i DB excedeix la [suma] dels quadrats de [costats] AC i CB, resulta que dues vegades el [rectangle] de [costats] AD i DB excedeix dues vegades el de AC i CB.

729. Euclides omet que cal considerar el quadrat del segment inicial. Diu: Τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῳση μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν π′ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ′ αὐτῶν ῥητόν.

730. Aquesta proposició equival a Ex 46 (pàgina 283) amb el signe menys en lloc de més.

731. Hipòtesi de l'absurd.

Però l'excés de dues vegades el rectangle de [costats] AD i DB sobre dues vegades el de [costats] AC i CB és una [àrea] racional, ja que totes dues són [àrees] racionals.

Per tant, l'excés de la suma dels quadrats de [costats] AD i DB sobre la dels quadrats de [costats] AC i CB és una [àrea] racional. I això és impossible, ja que totes dues [àrees] són medials. [Ex 26]

Per tant, a AB no hi podem asssociar cap altre component incommensurable en quadrat amb el total que satisfaci les altres condicions.

En definitiva, només hi podem associar un component.

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 84. *A un segment incommensurable en quadrat amb el total, que fa que la suma dels quadrats de [costats] ell mateix i ell mateix més el total sigui una [àrea] medial, i que dues vegades el [rectangle que formen] fa una [àrea] medial i, a més, incommensurable amb aquesta suma; només s'hi pot associar [com a component] un segment, de manera que [el quadrat del segment inicial]*[732] *més una [àrea] racional en produeix una de medial.*[733]

Sigui AB un [segment] que amb una [àrea] medial en fa una altra.

Hi adjuntem BC. [Ei 2]

Aleshores, AC i CB són incommensurables en quadrat i satisfan les condicions esmentades. [Ex 78]

Afirmo que a AB no hi podem associar cap altre [component] que compleixi les [condicions] esmentades.

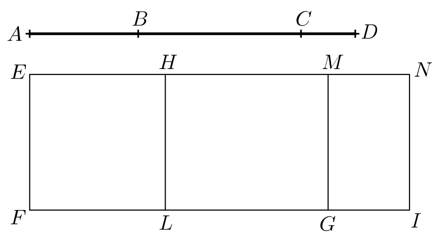


Figura Ex 84

[*Demostració.*] Si és possible,[734] hi associem BD com a component.

Aleshores, AD i DB són incommensurables en quadrat, fan els quadrats de costats AD més DB medials,

732. Vegeu la nota 729 (pàgina 350).
733. Vegeu la nota d'Ex 48 (pàgina 287).
734. Hipòtesi de l'absurd.

fan dues vegades el [rectangle] de [costats] AD i DB medial,
i, a més, fan que la [suma] dels quadrats de [costats] AD i DB sigui incommensurable amb dues vegades el [rectangle] d'aquests costats. [Ex 78]

Considerem un [segment] EF racional.[735]

Al segment EF hi apliquem un [rectangle] $\square\, EG$ equivalent a la [suma] dels quadrats de [costats] AC i CB.

Aquest rectangle produeix l'amplada EM.

També hi apliquem un [rectangle] $\square\, HG$ equivalent a dues vegades el de [costats] AC i CB.

Aquest rectangle produeix l'amplada HM.

Aleshores, el quadrat de [costat] AB que queda equival a $\square\, EL$. [EII 7]

Per tant, AB és l'arrel quadrada de $\square\, EL$.

De bell nou, hi apliquem $\square\, EI$ equivalent a la [suma] dels quadrats de [costats] AD i DB.

Aquest rectangle produeix l'amplada EN.

I el quadrat de [costat] AB equival a $\square\, EL$.

Per tant, el residu, [que és] dues vegades el [rectangle] de [costats] AD i DB, equival a $\square\, HI$. [EII 7]

I, atès que la suma dels quadrats de [costats] AC i CB equival a $\square\, EG$ i és medial; $\square\, EG$ també ho és. [Ex 23, porisma]

$\square\, EG$ està aplicat al [segment] racional EF i produeix l'amplada EM.

Per tant, [el segment] EM és racional i incommensurable en longitud amb EF. [Ex 22]

De bell nou, atès que dues vegades el [rectangle] de [costats] AC i CB és medial,
aquest rectangle equival al $\square\, HG$,
que també és medial. [Ex 23, porisma]

A més, està aplicat a un [segment] racional EF i produeix l'amplada HM.

Per tant, [el segment] HM és racional i incommensurable en longitud amb EF. [Ex 22]

735. Vegeu la nota 732 (pàgina 351).

I, atès que la [suma] dels quadrats de [costats] AC i CB és incommensurable amb dues vegades el [rectangle] de [costats] AC i CB, [el rectangle] $\square\, EG$ també ho és amb $\square\, HG$. [Dx 1.4]

Aleshores, [el segment] EM també ho és en longitud amb el MH, [Evi 1 i Ex 11]
i tots dos són [segments] racionals.

Així doncs, EM i MH són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

Per tant, [el segment] EH és un apòtom [Ex 73]
amb HM associat [com a component].

De manera anàloga, podem veure que EH és un apòtom amb HN associat [com a component].

En conseqüència, hem associat[, com a components] a un apòtom, dos segments racionals diferents commensurables només en quadrat amb el total. I això és impossible. [Ex 79]

Per tant, a AB no hi podem associar cap altre component.

En definitiva, a AB només hi podem associar[, com a component,] un únic segment incommensurable en quadrat amb el total,
que [juntament] amb ell fa que els quadrats de costats aquests segments siguin una [àrea] medial,
que dues vegades el [rectangle] d'aquests costats sigui medial
i, a més, que la suma dels quadrats [d'aquests costats] sigui incommensurable amb el rectangle que determinen.
[I això és el que volíem demostrar.] ♠

A.2a_3 El tercer grup de definicions (Ὅροι) p. 32

Dx 3.1. Donats un [segment] racional i un apòtom, si l'excés del quadrat de [costat] el total sobre el [de costat] el [component] adjunt associat a l'apòtom és el quadrat de [costat] un [segment] commensurable en longitud amb [el total], i el total és commensurable en longitud amb el [segment] racional [donat per endavant], aleshores [el segment] s'anomena *primer apòtom*.

Dx 3.2. Si el [component] adjunt és commensurable en longitud amb el [segment] racional [donat per endavant] i l'excés del quadrat de [costat] el total sobre [el quadrat de costat] el [component] adjunt és el de [costat] un [segment] commensurable [en longitud] amb [el total], aleshores [el segment] s'anomena *segon apòtom*.

Dx 3.3. Si ni el segment total ni el component associat no són commensurables en longitud amb el [segment] racional [donat] i l'excés del quadrat de [costat] el total sobre [el quadrat de costat] el [component] associat és el quadrat de [costat] un [segment] commensurable [en longitud] amb [el total], aleshores [el segment] s'anomena *tercer apòtom*.

Dx 3.4. Si l'excés del quadrat de [costat] el total sobre el de [costat] el [component] associat és el de [costat] un [segment] incommensurable [en longitud] amb [el total], i el total és commensurable en longitud amb el [segment] racional [donat], aleshores [el segment] s'anomena *quart apòtom*.

Dx 3.5. Si el [component] associat és commensurable, [el segment] s'anomena *cinquè apòtom*.

Dx 3.6. Si ni el total ni el component associat no són commensurables, [el segment] s'anomena *sisè apòtom*.

p. 32 **A.2b_3 El tercer grup de proposicions**

Ex 85. *Volem determinar un [segment] primer apòtom.*[736]

[*Construcció* i *demostració*.] *a*) Considerem un [segment] racional A.[737]

Sigui BG [un segment] commensurable en longitud amb ell.

Aleshores, BG també és racional. [Dx 1.3]

Considerem dos nombres quadrats DE i EF la diferència FD dels quals no és [un] quadrat. [Ex 29, lemes]

Aleshores, la raó entre ED i DF és la raó de dos nombres quadrats. [Ev 17]

736. Les sis proposicions següents —Ex 85, 86, 87, 88, 89 i 90— són d'existència, és a dir, problemes.

737. Sempre és possible fer-ho. Vegeu Dx 1.3.

Sabem que ED és a DF com el quadrat de [costat] BG al de [costat] GC. [Ex 6, porisma][738]

Per tant, el quadrat de [costat] BG és commensurable amb el de [costat] GC [Ex 6], i el quadrat de [costat] BG és racional.

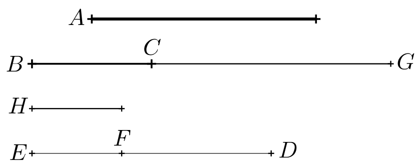


FIGURA EX 85

Aleshores, el quadrat de [costat] GC també ho és. [Dx 1.4]

Per tant, GC també. [Dx 1.3]

I, atès que la raó entre ED no és la de dos nombres quadrats, la raó entre els quadrats de [costats] BG i G, tampoc.

Així doncs, BG és incommensurable en longitud amb GC [Ex 9] i tots dos són [segments] racionals.

Per tant, BG i GC són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

En definitiva, BC és un [segment] apòtom. [Ex 73] ♠ ♣

Afirmo que[, concretament,] és un primer [apòtom]. [Dx 3.1]

b) Sigui el quadrat de [costat] H l'excés del quadrat de [costat] BG sobre el de [costat] GC. [Ex 13, lema]

Atès que ED és a FD com el quadrat de [costat] BG al de [costat] GC,

convertendo, resulta que DE és a EF com el quadrat de [costat] GB al de [costat] H, [Ev 19, porisma]

i la raó entre DE i EF és la de dos quadrats, ja que tots dos ho són.

Aleshores, el quadrat de [costat] GB és al de [costat] H com un [nombre] quadrat a un altre.

D'això en resulta que BG és commensurable en longitud amb H [Ex 9]

i l'excés del quadrat de [costat] BG sobre el de [costat] GC és el quadrat de [costat] H.

738. Per veure l'ús de dues expressions gregues diferents en aquestes sis proposicions i en les que van d'Ex 48 a Ex 53 —πεποιήσθω i γεγονέτω—, respectivament, consulteu VITRAC (1998), nota 468, p. 310.

Per tant, l'excés del quadrat de [costat] BG sobre el de [costat] GC és un quadrat de costat commensurable en longitud amb el [segment] racional A donat per endavant.

En definitiva, BC és un primer apòtom. [Dx 3.1][739] ♣ ♠

Hem construït, doncs, el primer apòtom BC. ♣

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 86. *Volem determinar un* [*segment*] *segon apòtom.*

[*Construcció* i *demostració*.] *a*) Considerem [un segment] racional A.

Sigui GC commensurable en longitud amb A. [Dx 1.4]

Aleshores GC és [un segment] racional. [Dx 1.3]

Considerem dos [nombres] quadrats DE i EF [Dvii 18] la diferència dels quals no és [un] quadrat. [Ex 28, lemes]

Hem establert que FD és a DE com el quadrat de [costat] CG al de [costat] GB. [Ex 6, porisma]

Aleshores, el quadrat de [costat] CG és commensurable amb el de [costat] GB [Ex 6] i el de [costat] CG és racional.

Per tant, el quadrat de [costat] GB també ho és [Dx 1.4] i, de retruc, també ho és el [segment] GB. [Dx 1.3]

Atès que la raó entre el quadrat de [costat] GC i el de [costat] GB no és la de dos nombres quadrats, CG és incommensurable en longitud amb GB [Ex 9] i tots dos són racionals.

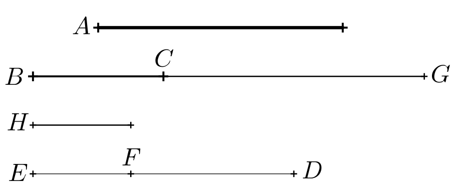


Figura Ex 86

D'això en resulta que CG i GB són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

En definitiva, BC és un apòtom. [Ex 73] ♠ ♣

Afirmo que és un segon [apòtom]. [Dx 3.2]

b) Sigui el quadrat de [costat] H l'excés del quadrat de [costat] BG sobre el de [costat] GC. [Ex 13, lema]

739. Vegeu la nota d'Ex 48 (pàgina 287).

En conseqüència, atès que el quadrat de [costat] BG és al de [costat] GC com el nombre ED al DF,

resulta que, *convertendo*, el quadrat de [costat] BG és al de [costat] H com DE a EF, [Ev 19, porisma]

i DE i EF són [nombres] quadrats.

Així doncs, el quadrat de [costat] BG és al de [costat] H com un nombre quadrat a un altre.

Per tant, BG és commensurable en longitud amb H, [Ex 9]

i l'excés del quadrat de [costat] BG sobre el de [costat] GC és el quadrat de [costat] H.

En conseqüència, l'excés del quadrat de [costat] BG sobre el de [costat] GC és el quadrat de costat [un segment] commensurable en longitud amb BG,

i el residu CG és commensurable [en longitud] amb el [segment] racional A.

En definitiva, hem pogut construir BC, i és un segon apòtom. [Dx 3.2][740] ♠

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 87. *Volem determinar un* [*segment*] *tercer apòtom.*

[*Construcció* i *demostració*.] *a*) Sigui A un [segment] racional.[741]

Considerem tres nombres, E, BC i CD, que no tinguin entre si la raó que hi ha entre nombres quadrats.

Siguin CB i BD [dos segments] amb la raó d'un [nombre] quadrat i un altre.

Hem vist la manera de fer que E sigui a BC com el quadrat de [costat] A al de [costat] FG,

i que BC sigui a CD com el quadrat de [costat] FG al de [costat] GH. [Ex 6, porisma]

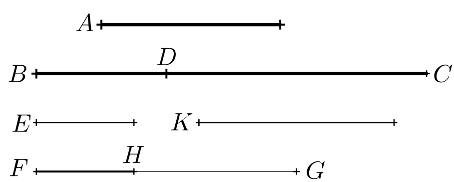


Figura Ex 87

Per tant, atès que E és a BC com el quadrat de [costat] A al de [costat] FG,

740. Vegeu la nota d'Ex 49 (pàgina 288).

741. Vegeu la nota 732 (pàgina 351).

el quadrat de [costat] A és commensurable amb el de [costat] FG [Ex 6]
i el de [costat] A és racional.

D'això en resulta que el quadrat de [costat] FG també ho és. [Dx 1.4]

Aleshores, FG és [un segment] racional. [Dx 1.3 i 1.4]

I, atès que la raó entre E i BC no és la de [dos] nombres quadrats, la raó entre el quadrat de [costat] A i el de [costat] FG no és la de dos [nombres] quadrats.

Per tant, A és incommensurable en longitud amb FG. [Ex 9]

De bell nou, atès que BC és a CD com el quadrat de [costat] FG al de [costat] GH,
el quadrat de [costat] FG és commensurable amb el de [costat] GH [Ex 6]
i el quadrat de [costat] FG és racional.

Així doncs, el quadrat de [costat] GH també ho és. [Dx 1.4]

I GH és [un segment] racional. [Dx 1.3 i 1.4]

A més, atès que la raó entre BC i CD no és la de [dos nombres] quadrats,
tampoc no ho és la que hi ha entre el quadrat de [costat] FG i el de [costat] GH.

Aleshores, FG és incommensurable en longitud amb GH [Ex 9]
i tots dos són [segments] racionals.

D'això en resulta que FG i GH són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

Per tant, FH és un apòtom. [Ex 73] ♣ ♠

Afirmo que[, concretament,] és un tercer [apòtom]. [Dx 3.3]

b) Atès que E és a BC com el quadrat de [costat] A al de [costat] FG, i que BC és a CD com el quadrat de [costat] FG al de [costat] HG, resulta que, *ex æquali*, E és a CD com el quadrat de [costat] A al de [costat] HG, [Ev 22]
i la raó entre E i CD no és la de dos [nombres] quadrats.

Per tant, la raó entre el quadrat de [costat] A i el de [costat] GH tampoc no és la de dos [nombres] quadrats.

D'això en resulta que A és incommensurable en longitud amb GH. [Ex 9]

En conseqüència, ni FG ni GH no són commensurables en longitud amb el segment racional A.

Sigui el quadrat de [costat] K l'excés del quadrat de [costat] FG sobre el de [costat] GH. [Ex 13, lema]

Aleshores, atès que BC és a CD com el quadrat de [costat] FG al de [costat] GH,
convertendo, BC és a BD com el quadrat de [costat] FG al de [costat] K, [Ev 19, porisma]
i la raó entre BC i BD és la de dos [nombres] quadrats.

Aleshores, la raó entre el quadrat de [costat] FG i el de [costat] K també ho és. [Nc 1]

Per tant, FG és commensurable en longitud amb K, [Ex 9]
l'excés del quadrat de [costat] FG sobre el de [costat] GH és el quadrat de [costat] un segment commensurable [en longitud] amb FG,
i ni FG ni GH no són commensurables en longitud amb el segment racional A.

En definitiva, hem pogut construir FH,
i és un tercer apòtom. [Dx 3.3][742] ♠
[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 88. *Volem determinar un [segment] quart apòtom.*

[*Construcció* i *demostració*.] *a*) Siguin A un [segment] racional[743]
i BG [un segment] commensurable en longitud amb ell. [Ex 5]

Aleshores, BG també és racional. [Dx 1.3 i 1.4]

Considerem dos nombres DF i FE, de manera que el total DE no hi tingui, amb cap d'ells, la raó de dos nombres quadrats.

Hem establert que DE és a EF com el quadrat de [costat] BG al de [costat] GC, [Ex 6, porisma]
sent el quadrat de [costat] BG commensurable amb el de [costat] GC, [Ex 16]
i el quadrat de [costat] BG, racional.

742. Vegeu la nota d'Ex 50 (pàgina 290).
743. Vegeu la nota 732 (pàgina 351).

Aleshores, el de [costat] GC també ho és [Dx 1.4]
i, de retruc, GC. [Dx 1.3 i 1.4]

I, atès que la raó que hi ha entre DE i EF no és la de [dos nombres] quadrats,
tampoc no és la que hi ha entre el quadrat de [costat] BG i el de [costat] GC.

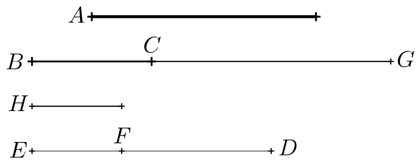


Figura Ex 88

Per tant, BG és incommensurable en longitud amb GC [Ex 9]
i tots dos [segments] són racionals.

D'això en resulta que BG i GC són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

Per tant, BC és un apòtom. [Ex 73] ♣ ♠

[Afirmo que, concretament, és un quart apòtom.] [Dx 3.4]

b) Sigui el quadrat de [costat] H l'excés del quadrat de [costat] BG sobre el de [costat] GC. [Ex 13, lema]

Aleshores, atès que DE és a EF com el quadrat de [costat] BG al de [costat] GC;
convertendo, ED és a DF com el quadrat de [costat] GB al de [costat] H, [Ev 19, porisma]
i la raó entre ED i DF no és la de [dos nombres] quadrats.

Per tant, tampoc no ho és la que hi ha entre el quadrat de [costat] GB i el de [costat] H. [Nc 1]

En conseqüència, BG és incommensurable en longitud amb H, [Ex 9]
i el quadrat de [costat] H és l'excés del quadrat de [costat] BG sobre el de [costat] GC.

De tot això en resulta que el quadrat de [costat] BG excedeix el de [costat] GC en el de [costat] un segment incommensurable [en longitud] amb BG,
i que el total BG és commensurable en longitud amb el racional A.

En definitiva, hem pogut construir BC
i és un quart apòtom. [Dx 3.4][744] ♣ ♠

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

744. Vegeu la nota d'Ex 51 (pàgina 292).

Ex 89. *Volem determinar un [segment] cinquè apòtom.*

[*Construcció* i *demostració*.] *a*) Siguin A [un segment] racional[745] i CG [un segment] commensurable en longitud amb ell. [Ex 5]

Aleshores, CG també és racional. [Dx 1.3]

Considerem dos nombres DF i FE la raó dels quals amb DE no és la que hi ha ha entre [dos nombres] quadrats.

Hem establert que FE és a ED com el quadrat de [costat] CG al de [costat] GB. [Ex 6, porisma]

Per tant, el quadrat de [costat] GB també és racional [Ex 6] i, de retruc, BG també. [Dx 1.3 i 1.4]

Atès que DE és a EF com el quadrat de [costat] BG al de [costat] GC,
i que la raó entre DE i EF no és la de dos nombres quadrats, tampoc no ho és la que hi ha entre el quadrat de [costat] BG i el de [costat] GC.

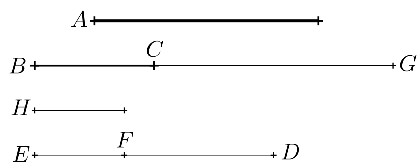


Figura Ex 89

Aleshores, BG és incommensurable en longitud amb GC [Ex 9] i tots dos són racionals.

Per tant, BG i GC són racionals i commensurables només en quadrat.

En definitiva, BC és un apòtom. [Ex 73] ♣ ♠

Afirmo que[, concretament,] és un cinquè [apòtom]. [Dx 3.5]

b) Sigui el quadrat de [costat] H l'excés del quadrat de [costat] BG sobre el de [costat] GC. [Ex 13, lema]

Aleshores, atès que el quadrat de [costat] BG és al de [costat] GC com DE a EF;
convertendo, ED és a DF com el quadrat de [costat] BG al de [costat] H, [Ev 19, porisma]
i la raó entre ED i DF no és la de [dos nombres] quadrats.

Per tant, la raó entre el quadrat de [costat] BG i el de [costat] H tampoc no ho és.

745. Vegeu la nota 732 (pàgina 351).

Aleshores, BG és incommensurable en longitud amb H, [Ex 9]
i el quadrat de [costat] H és l'excés del quadrat de [costat] BG sobre el de [costat] GC.

Per tant, l'excés del quadrat de [costat] GB sobre el de [costat] GC és el quadrat de [costat] un [segment] incommensurable en longitud amb GB,
i el component [o adjunt] CG és commensurable en longitud amb el [segment] racional A.

En definitiva, hem pogut construir BC,
i és un cinquè apòtom. [Dx 3.5][746]
[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 90. *Volem determinar un* [*segment*] *sisè apòtom.*
[*Construcció* i *demostració*.] *a*) Considerem un [segment] racional A, tres nombres E, BC i CD que no tinguin entre si la raó que hi ha entre els [nombres] quadrats,
i CB i BD que tampoc no la tinguin.

Hem establert que E és a BC com el quadrat de [costat] A al de [costat] FG,
i que BC és a CD com el quadrat de [costat] FG al de [costat] GH. [Ex 6, porisma]

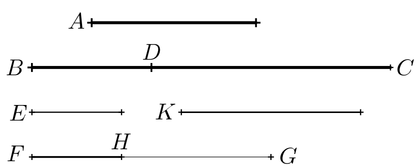


FIGURA EX 90

Per tant, atès que E és a BC com el quadrat de [costat] A al de [costat] FG;
el quadrat de [costat] A és commensurable amb el de [costat] FG [Ex 6]
i el de [costat] A és racional. [Dx 1.4]

En conseqüència, el quadrat de [costat] FG també ho és. [Dx 1.3 i 1.4]

I FG és un [segment] racional.

746. Vegeu la nota d'Ex 52 (pàgina 293).

Però la raó entre E i BC no és la de [dos nombres] quadrats,
i tampoc no ho és la que hi ha entre el quadrat de [costat] A i el de [costat] FG.

Així doncs, A és incommensurable en longitud amb FG. [Ex 9]

De bell nou, com que [el segment] BC és al CD com el quadrat [de costat] FG al de [costat] GH;
el quadrat de [costat] FG és commensurable amb el de [costat] GH [Ex 6]
i el quadrat de [costat] FG és racional. [Dx 1.4]

D'això en resulta que el quadrat de [costat] GH també ho és. [Dx 1.4]

Per tant, [el segment] GH, també. [Dx 1.3 i 1.4]

I, atès que la raó entre BC i CD no és la de [dos nombres] quadrats,
tampoc no ho és la que hi ha entre el quadrat de [costat] FG i el de [costat] GH. [Ev 7, iterat]

Així doncs, FG és incommensurable en longitud amb GH [Ex 6]
i tots dos són [segments] racionals.

En conseqüència, FG i GH són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

I, en definitiva, FH és un apòtom. [Ex 73] ♣ ♠

Afirmo que[, concretament,] és un [segment] sisè [apòtom]. [Dx 3.6]

b) Atès que E és a BC com el quadrat de [costat] A al de [costat] FG,
i que BC és a CD com el quadrat de [costat] FG al de [costat] GH,
resulta que, *ex æquali*, E és a CD com el quadrat de [costat] A al de [costat] GH. [Ev 22]

Però la raó entre E i CD no és la de [dos nombres] quadrats.

Per tant, la raó entre el quadrat de [costat] A i el de [costat] GH, tampoc. [Ev 7, iterat]

En conseqüència, A és incommensurable en longitud amb GH. [Ex 9]

Aleshores, ni FG ni GH no són commensurables en longitud amb el [segment] racional A.

Sigui, doncs, el quadrat de [costat] K l'excés del quadrat de [costat] FG sobre el de [costat] GH. [Ex 13, lema]

I, atès que BC és a CD com el quadrat de [costat] FG al de [costat] GH;
convertendo, CB és a BD com el quadrat de [costat] FG al de [costat] K, [Ev 19, porisma]
i CB no té amb BD la raó de [dos nombres] quadrats.

Per tant, tampoc no ho és la que hi ha entre el quadrat de [costat] FG i el de [costat] K.

En conseqüència, FG és incommensurable en longitud amb K, [Ex 19]
i l'excés del quadrat de [costat] FG sobre el de [costat] GH és el de [costat] K.

En conseqüència, l'excés del quadrat de [costat] FG sobre el de [costat] GH és un de costat incommensurable en longitud amb FG, i ni FG ni GH no són commensurables en longitud amb el [segment] racional A.

En definitiva, hem pogut construir FH,
i és un sisè apòtom. [Dx 3.6][747]
[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 91. *Si una àrea està determinada per un [segment] racional i un primer apòtom, la seva arrel quadrada és un apòtom.*[748]
Sigui $\square AB$ l'àrea formada pel [segment] racional AC i el primer apòtom AD.

Afirmo que l'arrel quadrada de $\square AB$ és un apòtom.
[*Construcció* i *demostració*.] *a*) Atès que AD és un primer apòtom, considerem el seu component DG. [Ex 80]

747. Vegeu la nota d'Ex 53 (pàgina 295).

748. Les sis proposicions següents —Ex 91, 92, 93, 94, 95 i 96— analitzen la mena de segment que és l'arrel quadrada que correspon a un rectangle, d'acord amb la classe dels costats que el determinen.

Recordem que l'arrel quadrada de[l rectangle] $\square AB$ és el costat del quadrat equivalent.

Aleshores, AG i DG són [segments] racionals commensurables només en quadrat, [Ex 73]
el total AG és commensurable [en longitud] amb el racional AC
i l'excés del quadrat de costat AG sobre el de [costat] GD és el quadrat de costat commensurable en longitud amb [AG]. [Dx 3.1]

En conseqüència, si a[l segment] AG hi apliquem per defecte [una àrea] igual a la quarta part del quadrat de [costat] DG, fent que hi manqui un quadrat,
aleshores [el segment AG] queda dividit en parts [que són] commensurables [en longitud].[749] [Ex 17]

Dimidiem DG per [el punt] E, [Ei 10]
i a[l segment] AG hi apliquem per defecte [una àrea] equivalent al quadrat de [costat] EG, fent que hi manqui un quadrat. [Eii 5 o Evi 28]

Considerem el rectangle de [costats] AF i FG.

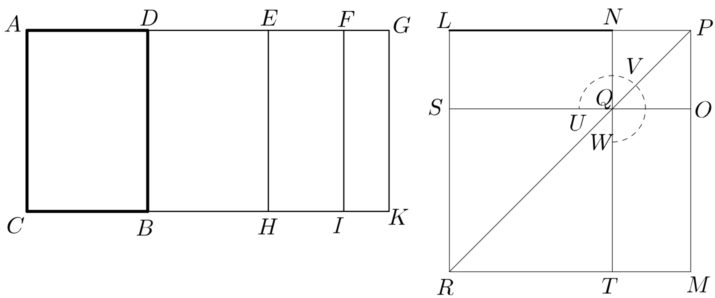


Figura Ex 91

Aleshores, AF és commensurable [en longitud] amb FG.

Pels punts E, F i G tirem [els segments] EH, FI i GK paral·lels a AC. [Ei 31]

I, atès que AF és commensurable en longitud amb FG,
AG també ho és amb cada un de[ls segments] AF i FG. [Ex 15]

Però AG és commensurable [en longitud] amb AC.

Per tant, [els segments] AF i FG també ho són [Ex 12]
i AC és un [segment] racional.

749. Pel punt F.

Aleshores, [els dos segments] AF i FG també són racionals.

Per tant, [les dues àrees] ▭ AI i ▭ FK també. [Ex 19]

Atès que [el segment] DE és commensurable en longitud amb EG, que DG també ho és amb DE i amb EG, [Ex 15]
i que DG és racional i incommensurable en longitud amb AC,
resulta que DE i EG són racionals i incommensurables en longitud amb AC. [Ex 13]

Aleshores, [les dues àrees] ▭ DH i ▭ EK són medials. [Ex 21]

Considerem el quadrat $\square LM$ que equival a[l rectangle] ▭ AI donat per endavant. [Evi 13]

Hi sostraiem el quadrat $\square NO$ equivalent a[l rectangle] ▭ FK.

Tots dos quadrats comparteixen l'angle $\widehat{LPM}$.

Sabem que els quadrats $\square LM$ i $\square NO$ comparteixen una diagonal. [Evi 26]

Sigui PR aquesta diagonal comuna.

Completem la resta de la figura. [P 5]

Atès que el rectangle de [costats] AF i FG equival al quadrat $\square EG$, AF és a EG com EG a FG. [Evi 17]

Però AF és a EG com ▭ AI a ▭ EK,
i EG a FG com ▭ EK a ▭ KF. [Evi 1]

El rectangle ▭ EK és la mitjana proporcional de ▭ AI i ▭ KF. [Ev 11]

I, com hem establert abans, ▭ MN ho és de $\square LM$ i de $\square NO$, [Ex 53, lema]
i [els rectangles] ▭ AI i ▭ KF equivalen als quadrats $\square LM$ i $\square NO$.

Per tant, [el rectangle] ▭ MN també equival a ▭ EK.[750]

Però [el rectangle] ▭ EK també ho és a ▭ DH i [el rectangle] ▭ MN a ▭ LO. [Ei 43]

Aleshores, [el rectangle] ▭ DK equival al gnòmon $\urcorner UVW$ i $\square NO$.

Però [el rectangle] ▭ AK també ho és a la suma dels quadrats $\square LM$ i $\square NO$.

Per tant, el residu ▭ AB equival a[l quadrat] $\square ST$, que és el quadrat de costat LN.

750. Euclides pressuposa que la mitjana proporcional de dues àrees és única.

De tot això en resulta que el quadrat de costat LN equival a[l rectangle] $\square\, AB$.

En definitiva, LN és l'arrel quadrada de[l rectangle] $\square\, AB$.

♣ ♠

Afirmo que [el segment] LN és un apòtom.

b) Atès que [els rectangles] $\square\, AI$ i $\square\, FK$ són racionals
i equivalents a[ls quadrats] $\square\, LM$ i $\square\, NO$[, respectivament],
resulta que aquests quadrats
—que són els quadrats de [costats] LP i PN[, respectivament,]—
també són [àrees] racionals.

Per tant, LP i PN són [segments] racionals.

De bell nou, atès que [el rectangle] $\square\, DH$ és [una àrea] medial
i equival a[l rectangle] $\square\, LO$,
aquest rectangle també ho és.

Així doncs, atès que [l'àrea] $\square\, LO$ és medial i [la] $\square\, NO$ racional, $\square\, LO$ és incommensurable amb $\square\, NO$.[751]

I [el rectangle] $\square\, LO$ és a $\square\, NO$ com [el segment] LP a PN. [EVI 1]

Per tant, LP és incommensurable en longitud amb PN, [EVI 11]
i tots dos són [segments] racionals.

Aleshores, LP i PN són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

Per tant, LN és un apòtom [EVI 73]
i l'arrel quadrada de [l'àrea] $\square\, AB$.

En definitiva, l'arrel quadrada de [l'àrea] $\square\, AB$ és un apòtom.

♣ ♠

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

EX 92. *Si una àrea està determinada per un [segment] racional i un segon apòtom, la seva arrel quadrada és un primer apòtom d'un [segment] medial.*

Sigui $\square\, AB$ l'àrea formada pel [segment] racional AC i el segon apòtom AD.

Afirmo que l'arrel quadrada de $\square\, AB$ és el primer apòtom d'un [segment] medial.

751. Per reducció a l'absurd, ja que la commensurabilitat conserva la classe.

[*Construcció* i *demostració*.] *a*) Sigui DG el component de AD.

Aleshores, AG i GD són [segments] racionals commensurables només en quadrat, [Ex 73]
el component DG és commensurable [en longitud] amb el [segment] racional AC,
i l'excés del quadrat de costat el total AG sobre el [quadrat] de [costat] el component GD és el quadrat de costat un segment commensurable en longitud amb AG. [Dx 3.2]

I, atès que l'excés del quadrat de costat AG sobre el de [costat] GD és el quadrat de costat un segment commensurable [en longitud] amb AG,
resulta que, si a[l segment] AG hi apliquem [una àrea] equivalent a la quarta part del quadrat de costat GD, fent que hi manqui un quadrat,
[AG] queda dividit [pel punt F] en [parts que són] commensurables [en longitud]. [Ex 17]

Dimidiem DG per E. [Ei 11]

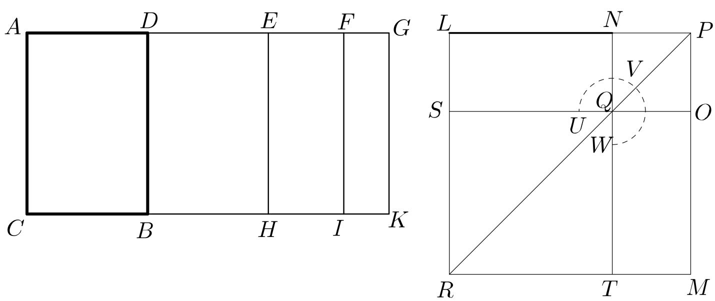


Figura Ex 92

A[l segment] AG hi apliquem per defecte [una àrea] equivalent al quadrat de [costat] EG, fent que hi manqui un quadrat.

Considerem el rectangle de [costats] AF i FG.

Aleshores, AF és commensurable en longitud amb FG,
[el segment] AG també ho és amb AF i FG, [Ex 15]
i AG és un [segment] racional incommensurable en longitud amb AC.

D'això en resulta que AF i FG també són [segments] racionals incommensurables en longitud amb AC. [Ex 13]

Per tant, ▭ AI i ▭ FK són [àrees] medials. [Ex 21]

De bell nou, atès que DE és commensurable [en longitud] amb EG, DG també ho és amb [els segments] DE i EG. [Ex 15]

Però DG és commensurable en longitud amb AC,
[i, de retruc, DE i EG també són segments racionals commensurables en longitud amb AC].

Aleshores, ▭ DH i ▭ EK són [àrees] racionals. [Ex 19]

Ara construïm els quadrats $\square\, LM$ i $\square\, NO$ equivalents a[ls rectangles] ▭ AI i ▭ FK[, respectivament], [Evi 13]
de manera que comparteixin l'angle $\widehat{LPM}$ i [el segment] LM.

Aleshores, els quadrats $\square\, LM$ i $\square\, NO$ també comparteixen una diagonal. [Evi 26]

Sigui PR aquesta diagonal comuna.

Completem la figura. [P 5]

Atès que ▭ AI i ▭ FK són [àrees] medials equivalents als quadrats de [costats] LP i PN[, respectivament],
els quadrats de [costats] LP i PN són medials.

I de retruc, [els segments] LP i PN també ho són
a més de commensurables «només» en quadrat.[752]

I, atès que el rectangle de [costats] AF i FG equival al quadrat de [costat] EG,
AF és a EG com EG a FG. [Ex 17]

Però AF és a EG com ▭ AI a ▭ EK,
i EG és a FG com ▭ EK a ▭ FK. [Evi 1]

Per tant, ▭ EK és la mitjana proporcional de ▭ AI i ▭ FK, [Ev 11]
i ▭ MN ho és dels quadrats $\square\, LM$ i $\square\, NO$. [Ex 53, lema]

Però ▭ AI equival a $\square\, LM$, i ▭ FK a $\square\, NO$.

Per tant, [el rectangle] ▭ MN ho és a ▭ EK.[753]

Però [el rectangle] ▭ DH també ho és a ▭ EK,
i ▭ LO equival a ▭ MN. [Ei 43]

752. En aquest argument hi ha un error. Seria més adequat dir que LP i PN són commensurables en quadrat, en lloc de dir «només en quadrat», ja que establirem que LP i PN són incommensurables en longitud.

753. Vegeu la nota 750 (pàgina 366).

Aleshores, el total ▭ DK equival al gnòmon ⌐ UVW i □ NO.

Per tant, atès que el total ▭ AK equival a □ LM i □ NO,
i que ▭ DK ho és al gnòmon ⌐ UVW i □ NO,
resulta que el residu ▭ AB equival a □ TS,
que és el quadrat de costat [el segment] LN.

De tot això en resulta que LN és l'arrel quadrada de [l'àrea] ▭ AB,
ja que el quadrat de [costat] LN equival a [l'àrea] ▭ AB. ♣ ♠

Afirmo que LN és el primer apòtom d'un [segment] medial.

b) Atès que ▭ EK és una [àrea] racional equivalent a ▭ LO,
[el rectangle] ▭ LO —de costats LP i PN— és una [àrea] racional.

Però hem vist que □ NO és una [àrea] medial.

En conseqüència, ▭ LO és incommensurable amb □ NO,[754]
i ▭ LO és a □ NO com LP a PN. [Evi 1]

D'això en resulta que LP i PN són incommensurables en longitud. [Ex 11]

En conseqüència, LP i PN són [segments] medials commensurables només en quadrat i determinen una [àrea] racional.

Per tant, [el segment] LN és el primer apòtom d'un [segment] medial, [Ex 71]
a més de l'arrel quadrada de ▭ AB.

Així doncs, l'arrel quadrada ▭ AB és el primer apòtom d'un [segment] medial. ♣ ♠

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 93. *Si una àrea està determinada per un* [*segment*] *racional i un tercer apòtom, la seva arrel quadrada és un segon apòtom d'un* [*segment*] *medial.*

Sigui ▭ AB el rectangle format pel [segment] racional AC i el tercer apòtom AD.

Afirmo que l'arrel quadrada de ▭ AB és el segon apòtom d'un [segment] medial.

[*Construcció* i *demostració*.] *a*) Sigui DG el component de AD.

Aleshores, AG i GD no són [segments] racionals commensurables només en quadrat, [Ex 73]

754. Vegeu la nota 751 (pàgina 367).

ni AG ni GD no són commensurables en longitud amb el [segment] racional AC,
i l'excés del quadrat de costat el total AG sobre el de [costat] el component DG és el quadrat de costat un [segment] commensurable [en longitud amb AG]. [Dx 3.3]

I, com que l'excés del quadrat de costat AG sobre el de [costat] GD és el quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud amb AG],
si al segment AG hi apliquem per defecte una [àrea] equivalent al quadrat de costat DG, fent que hi manqui un quadrat,
[aquest segment] queda dividit [pel punt F] en [parts que són] commensurables [en longitud]. [Ex 17]

Dimidiem DG per E. [Ei 10]

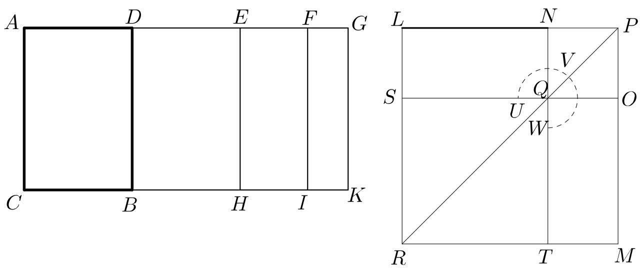


Figura Ex 93

Al segment AG hi apliquem per defecte [una àrea] equivalent al quadrat de [costat] EG, fent que hi manqui un quadrat.

Considerem el rectangle de [costats] AF i FG. [P 5]

Pels punts E, F i G, tirem els segments EH, FI i GK paral·lels a AC. [Ei 31]

Aleshores, AF i FG són commensurables [en longitud],
i [les àrees] $\square\, AI$ i $\square\, FK$ també. [Evi 1 i x 11]

I, atès que AF i FG són commensurables en longitud,
AG també ho és amb AF i FG, [Ex 15]
i AG és racional i incommensurable en longitud amb AC.

Per tant, AF i FG també [ho són]. [Ex 13]

Aleshores, totes dues [àrees], $\square\, AI$ i $\square\, FK$, són medials. [Ex 21]

De bell nou, atès que DE és commensurable en longitud amb EG, que DG també ho és amb [els segments] DE i EG, [Ex 15] i que GD és racional i incommensurable en longitud amb AC, resulta que els dos [segments] DE i EG també ho són amb AC. [Ex 13]

De tot això en resulta que [els rectangles] ▭ DH i ▭ EK són [àrees] medials. [Ex 21]

I, atès que AG i GD són commensurables només en quadrat, AG és incommensurable en longitud amb GD.

Però AG és commensurable en longitud amb AF, i DG amb EG.

Per tant, AF és incommensurable en longitud amb EG, [Ex 13]
i AF és a EG com ▭ AI a ▭ EK. [Evi 1]

I, en conseqüència, ▭ AI és incommensurable amb ▭ EK.
[Ex 13] ♣ ♠

b) Construïm els quadrats □ LM i □ NO equivalents a[ls rectangles] ▭ AI i ▭ FK [Eii 13]
que comparteixen l'angle $\widehat{LPM}$.

Aleshores, □ LM i □ NO també comparteixen una diagonal.
[Evi 26]

Sigui PR aquesta diagonal comuna.

Completem la figura. [P 5]

Atès que el rectangle de [costats] AF i FG equival al quadrat de costat EG,
AF és a EG com EG a FG. [Evi 17]

Però AF és a EG com ▭ AI a ▭ EK, [Evi 1]
i EG és a FG com ▭ EK a ▭ FK. [Evi 1]

Per tant, ▭ AI és a ▭ EK com ▭ EK a ▭ FK. [Ev 11]

De tot això en resulta que [el rectangle] ▭ EK és la mitjana proporcional de[ls rectangles] ▭ AI i ▭ FK,
▭ MN també ho és dels quadrats □ LM i □ NO, [Ex 53, lema]
i [els rectangles] ▭ AI i ▭ FK equivalen a[ls quadrats] □ LM i □ NO.

Així doncs, ▭ EK també equival a ▭ MN.[755]

Però ▭ MN ho és a ▭ LO, ▭ EK a ▭ DH, [Ei 43]
▭ DK al gnòmon ⌝UVW i □ NO, junts,
i el total ▭ AK a □ LM i □ NO.

755. Vegeu la nota 750 (pàgina 366).

Per tant, el residu ▭ AB equival a $\square\, ST$, que és el quadrat de costat LN.

En definitiva, LN és l'arrel quadrada de [l'àrea] ▭ AB. ♠

Afirmo que LN és el segon apòtom d'un [segment] medial.

I, atès que hem vist que ▭ AI i ▭ FK són [àrees] medials equivalents als quadrats de [costats] LP i PN[, respectivament], aquests [quadrats] també són medials. [Ex 21]

Per tant, [els segments] LP i PN són [segments] medials. [Ex 21]

I, atès que ▭ AI és commensurable amb ▭ FK, [Evi 1 i x 11]
el quadrat de costat LP també ho és amb el de costat PN.

De bell nou, com que hem establert que [el rectangle] ▭ AI és incommensurable amb ▭ EK,
$\square\, LM$ també ho és amb $\square\, MN$,
és a dir, el quadrat de costat LP ho és amb el rectangle de [costats] LP i PN.

Per tant, LP és incommensurable en longitud amb PN.
[Evi 1 i x 11]

Aleshores, LP i PN són [segments] medials commensurables només en quadrat. [Dx 1.3 i 1.4] ♣ ♠

Afirmo que aquests segments determinen una [àrea] medial.

c) Hem vist que ▭ EK és una [àrea] medial equivalent al rectangle de [costats] LP i PN.

Per tant, el rectangle de [costats] LP i PN també ho és. [Ex 21]

En conseqüència, LP i PN són [segments] medials commensurables només en quadrat [Ex 21]
i determinen una [àrea rectangular] medial.

En definitiva, LN és el [segment] segon apòtom d'un [segment] medial [Ex 75]
i l'arrel quadrada de ▭ AB. ♠

Així doncs, l'arrel quadrada de ▭ AB és el segon apòtom d'un [segment] medial.

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 94. *Si una àrea està determinada per un [segment] racional i un quart apòtom, la seva arrel quadrada és un [segment] menor.*

Sigui $\square\, AB$ el rectangle format pel [segment] racional AC i el quart apòtom AD.

Afirmo que l'arrel quadrada de $\square\, AB$ és un [segment] menor.

[*Construcció* i *demostració*.] *a*) Sigui DG el component de AD.

Aleshores, AG i GD són [segments] racionals commensurables només en quadrat, [Ex 73]
AG és commensurable en longitud amb el [segment] racional AC,
i l'excés del quadrat de costat el total AG sobre el de [costat] el component DG és el quadrat de costat un [segment] incommensurable [en longitud] amb [AG]. [Dx 3.4]

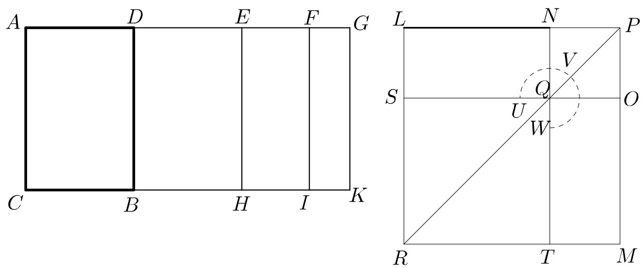


FIGURA EX 94

I, com que l'excés del quadrat de costat AG sobre el de [costat] GD és el quadrat de costat un segment incommensurable [en longitud] amb AG;
si al segment AG hi apliquem per defecte una [àrea] equivalent a la quarta part del quadrat de costat DG, fent que hi manqui un quadrat,
resulta que [el segment] [AG] queda dividit [per F] en [parts] incommensurables. [Ex 18]

Dimidiem DG per E. [Ei 10]

Al segment AG hi apliquem per defecte una àrea equivalent al quadrat de [costat] EG, fent que hi manqui un quadrat.

Obtenim el rectangle de [costats] AF i FG. [P 5]

D'això en resulta que AF és incommensurable en longitud amb FG.

Pels punts E, F i G, tirem els [segments] EH, FI i GK paral·lels a AC. [Ei 31]

Com que AG és [un segment] racional commensurable en longitud amb AC, el total AK és racional. [Ex 19]

De bell nou, atès que DG és incommensurable en longitud amb AC i tots dos són racionals,
DK és [un segment] medial. [Ex 21]

Però AF també és incommensurable en longitud amb FG.

Per tant, $\sqsubset AI$ i $\sqsubset FK$ són incommensurables. [Evi 1 i x 11]

♣ ♠

b) Construïm el quadrat $\square LM$ equivalent a[l rectangle] $\sqsubset AI$. [Eii 14]

Hi sostraiem el quadrat $\square NO$ amb el qual comparteix l'angle $\widehat{LPM}$.

$\square NO$ equival a[l rectangle] $\sqsubset FK$.

I [els quadrats] $\square LM$ i $\square NO$ comparteixen una diagonal. [Evi 26]

Sigui PR aquesta diagonal [comuna].

Completem la figura. [P 5]

Aleshores, atès que el rectangle de [costats] AF i FG equival al quadrat de costat EG,
AF és a EG com EG a FG. [Evi 17]

Però AF és a EG com $\sqsubset AI$ a $\sqsubset EK$, [Evi 1]
i EG és a FG com $\sqsubset EK$ a $\sqsubset FK$. [Evi 1]

Per tant, [el rectangle] $\sqsubset EK$ és la mitjana proporcional de[ls rectangles] $\sqsubset AI$ i $\sqsubset FK$. [Evi 11]

Però $\sqsubset MN$ també ho és dels quadrats $\square LM$ i $\square NO$, [Ex 53, lema]
i [els rectangles] $\sqsubset AI$ i $\sqsubset FK$ equivalen a[ls quadrats] $\square LM$ i $\square NO$.

Així doncs, $\sqsubset EK$ també equival a $\sqsubset MN$.[756]

Però $\sqsubset DH$ i $\sqsubset LO$ ho són a $\sqsubset EK$ i $\sqsubset MN$.

Per tant, el total $\sqsubset DK$ equival al gnòmon ⌝UVW i $\square NO$,
i el total $\sqsubset AK$ a[ls quadrats] $\square LM$ i $\square NO$.

Per tant, el residu $\sqsubset AB$ equival a $\square ST$, que és el quadrat de costat LN.

En definitiva, LN és l'arrel quadrada de [l'àrea] $\sqsubset AB$. ♠

756. Vegeu la nota 750 (pàgina 366).

Afirmo que LN és el [segment] irracional anomenat *menor*.

c) Atès que $\square\, AK$ és racional i equivalent als quadrats de [costats] LP i PN,
la suma d'aquests dos quadrats és racional.

De bell nou, com que [el rectangle] $\square\, DK$ és medial
i dues vegades el rectangle [de costats] LP i PN,
tenim que dues vegades el rectangle [de costats] LP i PN és medial.

I, com que hem establert que $\square\, AI$ és incommensurable amb [el rectangle] $\square\, FK$,
el quadrat de costat LP també ho és amb el de costat PN.

Per tant, els [segments] LP i PN són incommensurables en quadrat i fan que la suma dels quadrats sigui racional.

Però dues vegades el rectangle que determinen és medial.

En definitiva, LN és el [segment] anomenat *menor*. [Ex 76] ♠

Així doncs, l'arrel quadrada de $\square\, AB$ és menor.
[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 95. *Si una àrea està determinada per un* [*segment*] *racional i un cinquè apòtom, la seva arrel quadrada és un* [*segment*] *que, amb una altra* [*àrea*] *racional, en produeix una de total medial.*

Sigui $\square\, AB$ el rectangle format pel [segment] racional AC i el cinquè apòtom AD.

Afirmo que l'arrel quadrada de $\square\, AB$ és un [segment] que, amb una àrea racional, produeix una [àrea total] medial.

[*Construcció* i *demostració*.] *a*) Sigui DG el component de AD.

Aleshores, AG i GD són [segments] racionals commensurables només en quadrat, [Ex 73]
el component GD és commensurable en longitud amb el [segment] racional AC,
i l'excés del quadrat de costat el total AG sobre el de [costat] el component DG és el quadrat de costat un [segment] incommensurable [en longitud amb] AG. [Dx 3.5]

Per tant, si al segment AG hi apliquem per defecte una [àrea] equivalent a la quarta part del quadrat de costat DG, fent que hi manqui un quadrat, [el segment AG] queda dividit [per F] en [parts] incommensurables. [Ex 18]

Dimidiem DG per E. [Ei 10]

I al segment AG hi apliquem per defecte [una àrea] equivalent al quadrat de [costat] EG, fent que hi manqui un quadrat.

Obtenim el rectangle de [costats] AF i FG. [P 5]

De tot això en resulta que AF és incommensurable en longitud amb FG.

I, com que AG és [un segment] racional incommensurable en longitud amb AC,
el total $\square\, AK$ és racional. [Ex 21]

De bell nou, atès que DG és racional i commensurable en longitud amb AC,
$\square\, DK$ és [una àrea] racional. [Ex 19] ♣ ♠

b) Construïm els quadrats $\square\, LM$ i $\square\, NO$ equivalents a[ls rectangles] $\square\, AI$ i $\square\, FK$, respectivament, [Eii 14]
que comparteixen l'angle $\widehat{LPM}$.

Aleshores, $\square\, LM$ i $\square\, NO$ també comparteixen una diagonal. [Evi 26]

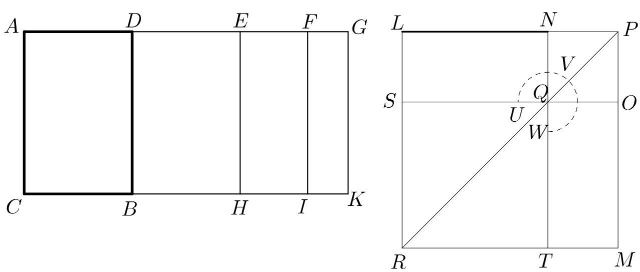


Figura Ex 95

Sigui PR aquesta diagonal [comuna].

Del gran [$\square\, LM$] en sostraiem el petit [$\square\, NO$].

Completem la figura. [P 5]

Anàlogament, podem veure que LN és l'arrel quadrada de $\square\, AB$.
♣ ♠

Afirmo que LN és el [segment] que, amb una àrea racional, produeix una [àrea total] medial.

c) Atès que $\square\, AK$ és medial i equivalent als quadrats de [costats] LP i PN,
la suma d'aquests dos quadrats és medial.

De bell nou, com que [el rectangle] $\square\, DK$ és racional
i equival a dues vegades el rectangle [de costats] LP i PN,
tenim que aquest darrer també és racional.

I, com que $\square\, AI$ és incommensurable amb [el rectangle] $\square\, FK$,
el quadrat de costat LP també ho és amb el de costat PN.

Per tant, els [segments] LP i PN són incommensurables en quadrat i fan que la suma dels quadrats sigui medial.

Però dues vegades el rectangle que determinen és racional.

En definitiva, el residu LN és el [segment] irracional que anomenem *el* [*segment*] *que, amb una àrea racional, produeix una total medial*,[757]
i és l'arrel quadrada de $\square\, AB$. [Ex 77] ♠

Hem establert que l'arrel quadrada $\square\, AB$ és un segment que, amb una àrea racional, produeix una [àrea total] medial.
[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 96. *Si una àrea està determinada per un* [*segment*] *racional i un sisè apòtom, la seva arrel quadrada és un* [*segment*] *que, amb una* [*àrea*]*, produeix una* [*àrea total*] *medial.*

Sigui $\square\, AB$ l'àrea formada pel [segment] racional AC i el sisè apòtom AD.

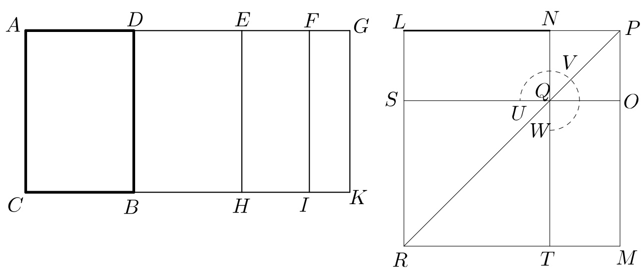


Figura Ex 96

Afirmo que l'arrel quadrada de $\square\, AB$ és un [segment] que, amb una [àrea] medial, produeix una [àrea total] medial.

757. Vegeu la nota 715 (pàgina 341).

[*Construcció* i *demostració*.] *a*) Sigui DG el component de AD.

Aleshores, AG i GD són [segments] racionals commensurables només en quadrat, [Ex 73]
cap dels dos no és commensurable en longitud amb el [segment] racional AC,
i l'excés del quadrat de costat el total AG sobre el [quadrat] de [costat] el component DG és el quadrat de costat [un segment] incommensurable en longitud amb AG. [Dx 3.6]

Atès que l'excés del quadrat de costat AG sobre el de [costat] GD és el quadrat de costat [un segment] incommensurable en longitud amb AG;
si al segment AG hi apliquem per defecte [una àrea] equivalent a la quarta part del quadrat de costat DG, fent que hi manqui un quadrat,
el segment [AG] queda dividit [en dues parts que són] incommensurables [en longitud]. [Ex 18]

Dimidiem DG per [el punt] E. [Ei 11]

Al [segment] AG hi apliquem per defecte una [àrea] equivalent a[l quadrat] de costat EG, fent que hi manqui un quadrat.

Considerem el rectangle de [costats] AF i FG. [Eii 14]

Resulta que AF és incommensurable en longitud amb FG,
i AF és a FG com $\square AI$ a $\square FK$. [Evi 1]

Aleshores, [el rectangle] $\square AI$ és incommensurable amb $\square FK$. [Ex 11]

I, atès que AG i AC són [segments] racionals commensurables només en quadrat,
l'àrea $\square AK$ és medial. [Ex 21]

De bell nou, atès que AC i DG són [segments] racionals incommensurables en longitud,
[el rectangle] $\square DK$ també és [una àrea] medial. [Ex 21]

I, com que AG i GD són commensurables només en quadrat,
AG és incommensurable en longitud amb GD,
i AG és a GD com $\square AK$ a $\square KD$. [Evi 1]

Per tant, $\square AK$ és incommensurable amb $\square KD$. [Ex 11]

♣ ♠

b) Construïm els quadrats $\square LM$ i $\square NO$ equivalents a[ls rectangles] ▭ AI i ▭ FK [EII 14]
que comparteixen el mateix angle $\widehat{LPM}$.

Aleshores també comparteixen una diagonal. [EVI 26]

Sigui PR aquesta diagonal [comuna].

Del gran en sostraiem el petit.

Completem la figura. [P 5]

De manera semblant a l'anterior, podem veure que LN és l'arrel quadrada de ▭ AB. ♠

Afirmo que LN és el [segment] que, amb una [àrea] medial, produeix una [àrea total] medial.

c) Atès que hem vist que ▭ AK és una [àrea] medial equivalent a la suma dels quadrats de [costats] LP i PN,
la suma d'aquests quadrats és medial.

De bell nou, atès que hem vist que ▭ DK és una [àrea] medial equivalent a dues vegades el rectangle de [costats] LP i PN,
dues vegades aquest rectangle també ho és.

I, com que hem establert que AK és incommensurable amb DK, la suma dels quadrats de [costats] LP i PN també ho és amb dues vegades el rectangle d'aquests costats.

I, a més, com que ▭ AI és incommensurable amb ▭ FK,
el quadrat de costat LP ho és amb el quadrat de [costat] PN.

Així doncs, LP i PN són [segments] incommensurables en quadrat,
la suma dels quadrats d'aquests costats és medial
i dues vegades el [rectangle] d'aquests [costats] també.

A més, la suma dels quadrats és incommensurable amb dues vegades el rectangle esmentat.

LN és, doncs, un [segment] irracional que, amb una [àrea] medial, produeix una [àrea total] medial total [EX 78]
i és l'arrel quadrada de ▭ AB.

Hem establert, doncs, que LN, l'arrel quadrada de ▭ AB, és un [segment] que anomenem *el* [*segment*] *que, amb una* [*àrea*] *medial, produeix una* [*àrea total*] *medial.*[758]

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

758. Vegeu la nota 715 (pàgina 341).

Ex 97. *El [quadrat] de [costat] un apòtom, aplicat a un [segment] racional, produeix un primer apòtom d'amplada.*[759]

Siguin AB un [segment] apòtom i CD un [segment] racional.

Considerem [el rectangle] $\square\, CE$
equivalent al quadrat de [costat] AB aplicat al [segment] CD. [Eɪɪ 14]

Aquest rectangle produeix l'amplada CF.

Afirmo que CF és un primer apòtom.

[*Demostració.*] *a*) Sigui BG el component de AB.

Aleshores, AG i GB són [segments] racionals commensurables només en quadrat. [Ex 73]

Al segment CD hi apliquem [els rectangles] $\square\, CH$ i $\square\, KL$ equivalents als quadrats de [costat] AG i GB[, respectivament]. [Eɪɪ 14]

Aleshores, el rectangle total $\square\, CL$ equival a la suma dels quadrats de [costats] AG i GB, [Nc 2]
i $\square\, CE$ al quadrat de [costat] AB.

Per tant, el residu $\square\, FL$ equival a dues vegades el rectangle de [costats] AG i GB. [Eɪɪ 7]

Dimidiem [el segment] FM pel punt N. [Eɪ 11]

Per aquest punt, tirem [el segment] NO paral·lel a CD. [Eɪ 31]

Aleshores, cada un de[ls rectangles] $\square\, FO$ i $\square\, LN$ equival al [rectangle] de costats AG i GB.

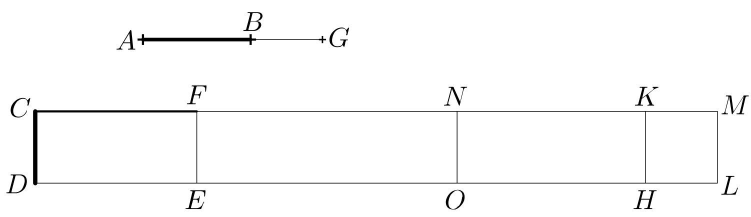


Figura Ex 97

Atès que la [suma dels quadrats] de costats AG i GB és racional, i que el $\square\, DM$ equival a la [suma dels quadrats] de costats AG i GB, [el rectangle] $\square\, DM$ és racional. [per substitució]

759. Les sis proposicions següents —Ex 97, 98, 99, 100, 101 i 102— analitzen la mena d'amplada que produeix un rectangle aplicat a un segment, d'acord amb les classes del rectangle i del segment.

Ara bé, aplicat al [segment] racional CD, produeix l'amplada CM.

Per tant, CM és racional i commensurable en longitud amb CD.
[Ex 20]

De bell nou, atès que dues vegades el [rectangle] de costats AG i GB és medial,
i que el $\square\, FL$ equival a dues vegades el de [costats] AG i GB,
resulta que [el rectangle] $\square\, FL$ [és una àrea] medial. [per substitució]

Ara bé, aplicat al [segment] racional CD, produeix l'amplada FM.

Per tant, FM és [un segment] racional incommensurable en longitud amb CD. [Ex 22]

I, atès que la suma dels quadrats de costats AG i GB és racional
i que dues vegades el rectangle d'aquests costats és medial,
resulta que la suma [dels quadrats] de costats AG i GB és incommensurable amb dues vegades el rectangle d'aquests costats.

A més, [el rectangle] $\square\, CL$ equival a la suma dels quadrats de [costats] AG i GB,
i $\square\, FL$ a dues vegades el rectangle d'aquests costats.

Per tant, $\square\, DM$ és incommensurable amb $\square\, FL$,
i $\square\, DM$ és a $\square\, FL$ com CM a FM. [Evi 1]

De tot això en resulta que CM és incommensurable en longitud amb FM. [Ex 11]

Ara bé, els dos [segments] són racionals.

Per tant, CM i MF són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

En definitiva, [el segment] CF és un apòtom. [Ex 73] ♠

Afirmo que és un primer [apòtom].

b) Atès que el rectangle de [costats] AG i GB és la mitjana proporcional dels quadrats de [costats] AG i GB, [Ex 21, lema]
que $\square\, CH$ i $\square\, KL$ equivalen a aquests quadrats[, respectivament],
i que $\square\, NL$ ho és al rectangle d'aquests costats;
resulta que $\square\, NL$ és la mitjana proporcional de $\square\, CH$ i $\square\, KL$.
[Ev 17, iterat]

O sigui, $\square\, CH$ és a $\square\, NL$ com $\square\, NL$ a $\square\, KL$.

Però $\square\, CH$ és a $\square\, NL$ com CK a NM,
i $\square\, NL$ és a $\square\, KL$ com NM a KM. [Evi 1]

Aleshores, el rectangle de [costats] CK i KM equival al quadrat de [costat] NM,
és a dir, a la quarta part del quadrat de [costat] FM. [EVI 17]

I, atès que el quadrat de [costat] AG és commensurable amb el de [costat] GB,
$\square CH$ també ho és amb $\square KL$. [DX 1.1]

A més, $\square CH$ és a $\square KL$ com CK a KM. [EVI 1]

Per tant, CK és commensurable [en longitud] amb KM. [EX 11]

Aleshores, atès que CM i MF són segments diferents,
a[l segment] CM hi hem aplicat per defecte el rectangle de [costats] CK i KM, equivalent a la quarta part del quadrat de [costat] FM, fent que hi manqui un quadrat,
i CK i KM són commensurables en longitud;
resulta que l'excés del quadrat de costat CM sobre el de costat MF és el quadrat de costat [un segment] commensurable en longitud amb CM.

I CM també ho és amb el [segment] racional CD.

En definitiva, CF és un primer apòtom. [DX 3.1] ♠

Per tant, el quadrat de [costat] un apòtom, aplicat a un [segment] racional, produeix un primer apòtom d'amplada.

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

EX 98. *El* [*quadrat*] *de* [*costat*] *un primer apòtom d'un* [*segment*] *medial, aplicat a un* [*segment*] *racional, produeix un segon apòtom d'amplada.*

Siguin AB un [segment] primer apòtom d'un [segment] medial i CD un [segment] racional.

Al [segment] CD hi apliquem [el rectangle] $\square CE$ equivalent al quadrat de [costat] AB. [EII 14]

Aquest rectangle produeix l'amplada CF.

Afirmo que CF és un segon apòtom.

[*Demostració.*] *a*) Sigui BG el component de AB.

Aleshores, AG i GB són [segments] medials commensurables només en quadrat que determinen un rectangle racional. [EX 74]

Al segment CD hi apliquem [els rectangles] $\square CH$ i $\square KL$ equivalents als [quadrats] de costats AG i BG[, respectivament]. [EII 14]

Aquests rectangles produeixen les amplades CK i KM.

Aleshores, el [rectangle] total $\square CL$ equival a la [suma dels quadrats] de costats AG i GB. [Nc 2]

Per tant, [el rectangle] $\square CL$ també és medial.

[EX 15 i 23, porisma]

I, atès que l'hem aplicat al [segment] racional CD
i que ha produït l'amplada CM,
[el segment] CM és racional i incommensurable en longitud amb CD.

[EX 22]

Ara bé, $\square CL$ equival als quadrats de [costats] AG i GB
que contenen el de [costat] AB, equivalent a[l rectangle] $\square CE$.

Per tant, el residu $\square FL$ equival a dues vegades el rectangle de [costats] AG i GB. [EII 7]

Però dues vegades el rectangle de [costats] AG i GB és [una àrea] racional.

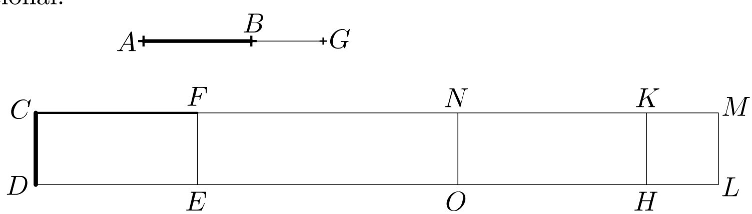


FIGURA EX 98

Per tant, [el rectangle] $\square FL$ també ho és [DX 1.4]
i, aplicat al [segment] racional EF, produeix l'amplada FM.

Per tant, FM és racional i commensurable en longitud amb CD.

[EX 20]

Atès que la suma dels quadrats de costats AG i GB, que és $\square CL$, és medial,
i que dues vegades el rectangle de [costats] AG i GB, que és $\square FL$, és racional;
resulta que $\square CL$ és incommensurable amb $\square FL$. [DX 1.4]

Però $\square CL$ és a $\square FL$ com CM a FM. [EVI 1]

Per tant, CM és incommensurable en longitud amb FM. [EX 11]

Ara bé, els dos [segments] són racionals.

Per tant, CM i MF són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

En definitiva, [el segment] CF és un apòtom. [Ex 73] ♠

Afirmo que és un segon apòtom.

b) Dimidiem [el segment] FM pel punt N. [Ei 11]

Per aquest punt N, tirem [el segment] NO paral·lel a CD. [Ei 31]

Aleshores cada un dels rectangles $\square\, FO$ i $\square\, NL$ equival a[l rectangle de costats] AG i GB.

I, com que el rectangle [de costats] AG i GB és la mitjana proporcional dels quadrats de [costats] AG i GB, [Ex 21, lema]
que el quadrat de costat AG equival a $\square\, CH$,
que el rectangle de [costats] AG i GB ho és a $\square\, NL$
i que el quadrat de costat BG ho és a[l rectangle] $\square\, KL$;
resulta que $\square\, NL$ també és la mitjana proporcional de $\square\, CH$ i $\square\, KL$. [Ev 17, iterat]

És a dir, $\square\, CH$ és a $\square\, NL$ com $\square\, NL$ a $\square\, KL$.

Però $\square\, CH$ és a $\square\, NL$ com CK a NM
i $\square\, NL$ és a $\square\, KL$ com NM a MK. [Evi 1]

Per tant, CK és a NM com NM a KM. [Ev 11]

En conseqüència, el rectangle de [costats] CK i KM equival al quadrat de costat NM, [Ev 17]
és a dir, a la quarta part del quadrat de costat FM.

I, com que [els segments] CM i MF són diferents,
el rectangle de [costats] CK i KM equival a la quarta part del quadrat de costat MF,
i l'hem aplicat per defecte, fent que hi manqui un quadrat, al segment més llarg CM,
el qual divideix en dues parts commensurables;
tenim que l'excés del quadrat de costat CM sobre el de costat MF és el quadrat de costat [un segment] commensurable en longitud amb CM. [Ex 17]

I, a més, el component FM és commensurable en longitud amb el segment racional CD.

Per tant, CF és un segon apòtom. [Dx 3.2] ♠

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 99. *El [quadrat] de [costat] un segon apòtom d'un segment medial, aplicat a un [segment] racional, produeix un tercer apòtom d'amplada.*

Siguin AB un [segment] segon apòtom d'un segment medial
i CD un [segment] racional.

A[l segment] CD hi apliquem [el rectangle] $\square CE$ equivalent al quadrat de [costat] AB. [Eii 14]

Aquest rectangle produeix l'amplada CF.

Afirmo que CF és un tercer apòtom.

[*Demostració.*] *a*) Sigui BG el component de AB.

Aleshores, AG i GB són [segments] medials commensurables només en quadrat que determinen un rectangle medial. [Ex 75]

Als segments CD i KH hi apliquem [els rectangles] $\square CH$ i $\square KL$ equivalents als quadrats de [costat] AG i GB[, respectivament]. [Eii 14]

Aleshores, el total $\square CL$ equival a la [suma dels quadrats] de costats AG i GB. [Nc 2]

Per tant, $\square CL$ és medial. [Ex 15 i 23, lema]

I, aplicat al segment racional CD, produeix l'amplada CM,
cosa que fa que CM sigui un segment racional i incommensurable en longitud amb CD. [Ex 22]

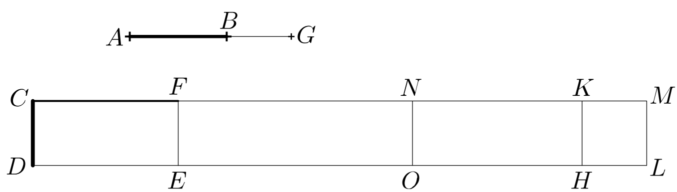


Figura Ex 99

Ara, atès que el total $\square CL$ equival als [quadrats] de [costats] AG
i GB
i que, en ells, el [rectangle] $\square CE$ equival al quadrat de costat AB, resulta que el residu $\square FL$ equival a dues vegades el rectangle de [costats] AG i GB. [Eii 7]

Dimidiem [el segment] FM pel punt N. [Ei 11]

Per aquest punt N, tirem [el segment] NO paral·lel a CD. [Ei 31]

Aleshores, cada un de[ls rectangles] $\square FO$ i $\square LN$ equival a[l rectangle] de costats AG i GB.

Però aquest rectangle és medial.

Per tant, $\square FL$ és medial [per substitució]
i, aplicat al [segment] racional EF, produeix l'amplada FM.

Per tant, FM és racional i incommensurable en longitud amb CD. [Ex 22]

I, atès que AG i GB són solament commensurables en quadrat,
AG és incommensurable en longitud amb GB. [Dx 1.1 i 1.2]

Per tant, el quadrat de costat AG també és incommensurable amb el d'aquests costats. [Evi 1 i Ex 11]

Però la suma dels quadrats de costats AG i GB és commensurable amb el [quadrat] de costat AG,
i dues vegades el rectangle d'aquests costats ho és amb el de [costats] AG i GB. [Dx 1.1]

Per tant, la suma dels [quadrats] de costats AG i GB és incommensurable amb dues vegades el rectangle d'aquests costats. [Ex 13]

Ara bé, [el rectangle] $\square CL$ equival a la suma dels quadrats de [costats] AG i GB,
i $\square FL$ ho és a dues vegades el rectangle d'aquests costats AG i GB.

Per tant, $\square CL$ és incommensurable amb $\square FL$.[760]

I $\square CL$ és a $\square FL$ com CM a FM. [Evi 1]

D'això en resulta que CM és incommensurable en longitud amb FM. [Ex 11]

Ara bé, els dos [segments] són racionals.

Per tant, CM i MF són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

En definitiva, [el segment] CF és un apòtom. [Ex 73] ♠

Afirmo que és un tercer [apòtom].

b) Atès que el quadrat de costat AG és commensurable amb el de [costat] GB,
$\square CH$ ho és amb $\square KL$. [Ev 17, iterat]

Per tant, [els segments] CK i KM també ho són entre si. [Evi 1 i x 11]

I, atès que el rectangle de [costats] AG i GB és la mitjana proporcional dels quadrats d'aquests costats,

760. Són rectangles de classes diferents.

que $\square CH$ equival al quadrat de costat AG,
que $\square KL$ ho és al de costat BG
i $\square NL$ al rectangle de [costats] AG i GB,
resulta que $\square NL$ també és la mitjana proporcional de $\square CH$ i $\square KL$. [Ev 17, iterat]

O sigui, [el rectangle] $\square CH$ és a $\square NL$ com $\square NL$ a $\square KL$.

Però [el rectangle] $\square CH$ és a $\square NL$ com [el segment] CK a NM, i [el rectangle] $\square NL$ a $\square KL$ com [el segment] NM a KM. [Evi 1]

En conseqüència, CK és a MN com MN a KM. [Ev 11]

Aleshores, el rectangle de [costats] CK i KM equival al quadrat de [costat] NM,
és a dir, a la quarta part del quadrat de [costat] FM. [Evi 17]

Com que [els segments] CM i MF són diferents,
el rectangle de [costats] CK i KM equival a la quarta part del quadrat de costat MF,
i hem aplicat aquest rectangle per defecte, fent que hi manqui un quadrat, al segment més llarg CM, al qual divideix en dues parts commensurables;
l'excés del quadrat de costat CM sobre el de costat MF és el quadrat de costat [un segment] commensurable en longitud amb CM. [Ex 17]

Però ni CM ni MF no són commensurables en longitud amb el segment racional CD.

En definitiva, CF és un tercer apòtom. [Dx 3.3] ♠

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 100. *El quadrat de [costat] un menor, aplicat a un racional, produeix un quart apòtom d'amplada.*

Siguin AB un [segment] menor i CD un [segment] racional.

Considerem [el rectangle] $\square CE$ equivalent al quadrat de [costat] AB aplicat al [segment] CD. [Eii 14]

Aquest rectangle produeix l'amplada CF.

Afirmo que CF és un quart apòtom.

[*Demostració.*] *a*) Sigui BG el component de AB.

Aleshores, AG i GB són [segments] racionals incommensurables només en quadrat. [Ex 76]

Al segment CD hi apliquem [els rectangles] $\square CH$ i $\square KL$ equivalents als quadrats de costats AG i GB[, respectivament]. [EII 14]

Aquests rectangles produeixen les amplades CK i KM.

Aleshores, el rectangle total $\square CL$ equival a la suma dels quadrats de [costats] AG i GB, [Nc 2]

i aquesta suma és racional.

Per tant, $\square CL$ també ho és. [Dx 1.4]

Apliquem $\square CL$ al segment CD.

Aquest rectangle produeix l'amplada CM.

En conseqüència, CM és un [segment] racional commensurable en longitud amb CD. [Ex 20]

Ara, atès que el total $\square CL$ equival als quadrats de [costats] AG i GB

i, en ells, el [rectangle] $\square CE$ equival al quadrat de [costat] AB,

resulta que el residu $\square FL$ ho és a dues vegades el rectangle de [costats] AG i GB. [EII 7]

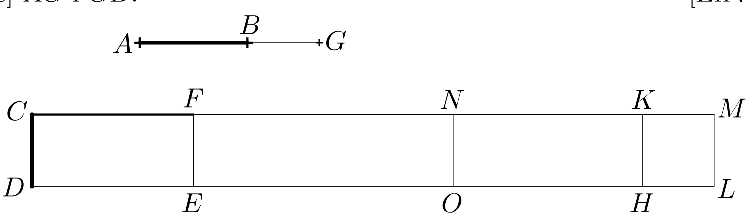


Figura Ex 100

Dimidiem [el segment] FM pel punt N. [EI 11]

Per aquest punt N, tirem [el segment] NO paral·lel a CD o a ML. [EI 31]

Aleshores, cada un de[ls rectangles] $\square FO$ i $\square LN$ equival al [rectangle] de costats AG i GB.

I, com que dues vegades el [rectangle] de costats AG i GB és medial,

i equival a $\square FL$;

$\square FL$ és medial. [per substitució]

Ara bé, aplicat al [segment] racional FE,

produeix l'amplada FM,

i FM és racional i incommensurable en longitud amb CD. [Ex 22]

I, atès que la suma dels quadrats de costats AG i GB és racional
i que dues vegades el rectangle d'aquests costats és medial,
resulta que la suma dels quadrats d'aquests costats és incommensurable amb dues vegades el rectangle d'aquests costats.[761]

Però [el rectangle] $\square\, CL$ equival a la suma dels quadrats de costats AG i GB,
i [el rectangle] $\square\, FL$ a dues vegades el rectangle d'aquests costats.

Per tant, $\square\, CL$ és incommensurable amb $\square\, FL$. [Dx 1.1]

Però [el rectangle] $\square\, CL$ és a $\square\, FL$ com [el segment] CM a MF. [Evi 1]

Per tant, CM és incommensurable en longitud amb MF. [Ex 11]

I els dos segments són racionals.

Per tant, [els segments] CM i MF són racionals commensurables només en quadrat.

En definitiva, [el segment] CF és un apòtom. [Ex 73] ♠

Afirmo que és un quart [apòtom].

b) Atès que AG i GB són incommensurables en quadrat,
el quadrat de costat AG és incommensurable amb el de costat GB. [Dx 1.3 i 1.4]

A més, [els rectangles] $\square\, CH$ i $\square\, KL$ equivalen als quadrats de [costats] AG i GB.

Per tant, $\square\, CH$ és incommensurable amb $\square\, KL$. [per substitució]

Però [el rectangle] $\square\, CH$ és a $\square\, KL$ com CK a KM. [Evi 1]

Per tant, CK és incommensurable en longitud amb KM. [Ex 11]

I, atès que el rectangle de [costats] AG i GB és la mitjana proporcional dels quadrats d'aquests costats,
que $\square\, CH$ equival al quadrat de costat AG,
$\square\, KL$ al de costat GB
i $\square\, NL$ al rectangle de [costats] AG i GB,
resulta que $\square\, NL$ també és la mitjana proporcional de $\square\, CH$ i $\square\, KL$. [Ev 7, iterat]

O sigui, $\square\, CH$ és a $\square\, NL$ com $\square\, NL$ a $\square\, KL$.

Però $\square\, CH$ és a $\square\, NL$ com [el segment] CK a NM,
i $\square\, NL$ a $\square\, KL$ com [el segment] NM a KM. [Evi 1]

761. Són àrees de classes diferents.

Per tant, CK és a MN com MN a KM. [Ev 11]

En conseqüència, el rectangle de [costats] CK i KM equival al quadrat de costat MN, [Evi 17]
que és la quarta part del quadrat de costat FM.

Atès que [els segments] CM i MF són dos segments diferents,
que a CM hi hem aplicat per defecte, fent que hi manqui un quadrat, el rectangle de [costats] CK i KM, equivalent a la quarta part del quadrat de costat MF,
i que aquest queda dividit en parts incommensurables,
resulta que l'excés del quadrat de costat CM sobre el de costat MF és el quadrat de costat [un segment] incommensurable amb CM. [Ex 18]

I el total CM és commensurable en longitud amb el [segment] racional CD.

En definitiva, CF és un quart apòtom. [Dx 3.4] ♠

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 101. *El* [*quadrat*] *de* [*costat*] *un segment que amb una àrea racional produeix una àrea medial, aplicat a un* [*segment*] *racional, produeix un cinquè apòtom d'amplada.*

Siguin AB un [segment] que, amb una àrea racional, produeix una àrea medial, i CD un [segment] racional.

Considerem [el rectangle] $\square\, CE$ equivalent al quadrat de [costat] AB aplicat a[l segment] CD. [Eii 14]

Aquest rectangle produeix l'amplada CF.

Afirmo que CF és un cinquè apòtom.

[*Demostració.*] *a*) Sigui BG el component de AB.

Aleshores, AG i GB són [segments] racionals incommensurables només en quadrat que fan, de la suma dels seus quadrats, una àrea medial.

El rectangle que hi determinen és racional. [Ex 77]

Al segment CD hi apliquem [els rectangles] $\square\, CH$ i $\square\, KL$ equivalents als [quadrats] de costats AG i GB[, respectivament]. [Eii 14]

Aleshores, el rectangle total $\square\, CL$ equival a la [suma dels quadrats] de costats AG i GB.

Però aquesta suma és medial.

Per tant, [el rectangle] $\square\, CL$ també ho és. [per substitució] ♠

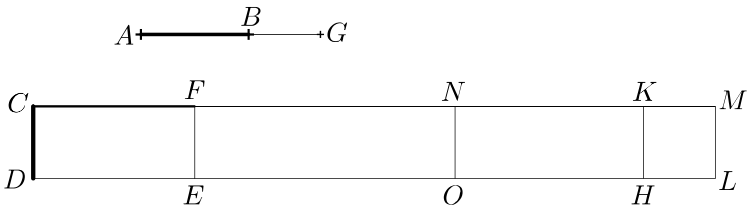


FIGURA EX 101

b) Apliquem [el rectangle] $\square\, CL$ al segment CD.

Aquest rectangle produeix l'amplada CM.

Per tant, CM és racional i incommensurable amb CD. [EX 22]

Ara, atès que el total $\square\, CL$ equival als [quadrats] de [costats] AG i GB

i que, en ells, el [rectangle] $\square\, CE$ ho fa al quadrat de costat AB;

el residu $\square\, FL$ equival a dues vegades el rectangle de [costats] AG i GB. [EII 7]

Dimidiem [el segment] FM pel punt N. [EI 11]

Per aquest punt, tirem [el segment] NO paral·lel a CD o a ML. [EI 31]

Aleshores, cada un de[ls rectangles] $\square\, FO$ i $\square\, LN$ equival al de costats AG i GB.

I, com que dues vegades aquest rectangle és racional i equival a $\square\, FL$,

$\square\, FL$ és racional. [DX 1.4]

Apliquem $\square\, FL$ al [segment] racional FE.

Aquest rectangle produeix l'amplada FM.

Per tant, FM és racional i incommensurable en longitud amb CD. [EX 20]

Ara, com que $\square\, CL$ és medial i $\square\, FL$ racional,

[el rectangle] $\square\, CL$ és incommensurable amb $\square\, FL$.[762]

Però [el rectangle] $\square\, CL$ és a[l rectangle] $\square\, FL$ com [el segment] CM al MF. [EVI 1]

762. Són àrees de classes diferents.

Per tant, CM és incommensurable en longitud amb MF [Ex 11] i tots dos són racionals.

En conseqüència, CM i MF són segments racionals commensurables només en quadrat.

Per tant, [el segment] CF és un apòtom, ♠
concretament, un cinquè apòtom.

c) De manera semblant, podem veure que el rectangle de [costats] CK i KM equival al quadrat de costat NM,
que és igual a la quarta part del quadrat de costat FM.

I, atès que els quadrats de costats AG i GB són incommensurables,
que el quadrat de [costat] AG equival al rectangle $\square\, CH$
i que el de [costat] GB ho és a $\square\, KL$;
[els rectangles] $\square\, CH$ i $\square\, KL$ també són incommensurables.
[per substitució]

Però [el rectangle] $\square\, CH$ és a $\square\, KL$ com [el segment] CK a KM.
[Evi 1]

Per tant, CK és incommensurable en longitud amb KM. [Ex 11]

I, atès que [els segments] CM i MF són segments diferents
i que hem aplicat una àrea equivalent a la quarta part del quadrat de costat MF
a[l segment] CM fent que hi manqui un quadrat;
aquest [segment] queda dividit en parts incommensurables.

De tot això en resulta que l'excés del quadrat de costat CM sobre el de costat MF és un quadrat de costat un [segment] incommensurable amb CM. [Ex 18]

I el component FM és commensurable en longitud amb el [segment] racional CD.

En definitiva, CF és un cinquè apòtom. [Dx 3.5] ♠
I això és el que volíem demostrar. ♠

Ex 102. *El* [*quadrat*] *de* [*costat*] *un segment que, amb una àrea medial, produeix una àrea total medial, aplicat a un* [*segment*] *racional, produeix un sisè apòtom d'amplada.*

Siguin AB un [segment] que, amb una àrea medial, produeix una àrea total medial, i CD un [segment] racional.

Considerem [el rectangle] $\square CE$ equivalent al quadrat de [costat] AB aplicat al [segment] CD. [EII 14]

Aquest rectangle produeix l'amplada CF.

Afirmo que CF és un sisè apòtom.

[*Demostració.*] *a*) Sigui GB el component de AB.

Aleshores, AG i GB són [segments] incommensurables només en quadrat,

la suma dels seus quadrats és [una àrea] medial,

dues vegades el rectangle que determinen també,

i [la suma d']aquests quadrats és incommensurable amb dues vegades el rectangle. [EX 78]

Al segment CD hi apliquem [els rectangles] $\square CH$ i $\square KL$ equivalents als [quadrats] de costats AG i GB.

Aquests rectangles produeixen les amplades CK [i KM, respectivament].

Aleshores, el total $\square CL$ equival a la [suma dels quadrats] de costats AG i GB. [NC 2]

Per tant, [el rectangle] $\square CL$ és medial. [per substitució] ♠

b) Apliquem [el rectangle $\square CL$] al segment CD.

Aquest rectangle produeix l'amplada CM.

Per tant, CM és racional i incommensurable en longitud amb CD. [EX 22]

Ara, atès que el total $\square CL$ equival als [quadrats] de costats AG i GB,

i que, en ells, el [rectangle] $\square CE$ equival al quadrat de costat AB;

el residu $\square FL$ equival a dues vegades el rectangle de [costats] AG i GB. [EII 7]

I, com que dues vegades aquest rectangle és medial,

$\square FL$ també ho és. [per substitució]

Apliquem $\square FL$ al [segment] racional FE.

Aquest rectangle produeix l'amplada FM.

Per tant, FM és racional i incommensurable en longitud amb CD. [EX 22]

I, com que els quadrats de [costats] AG i GB són incommensurables amb el rectangle fet amb aquests costats,
[el rectangle] $\square\, CL$ equival als quadrats de [costats] AG i GB,
i [el rectangle] $\square\, FL$ a dues vegades el de [costats] AG i GB;
[els rectangles] $\square\, CL$ i $\square\, FL$ també són incommensurables.
[per substitució o Dv 5]

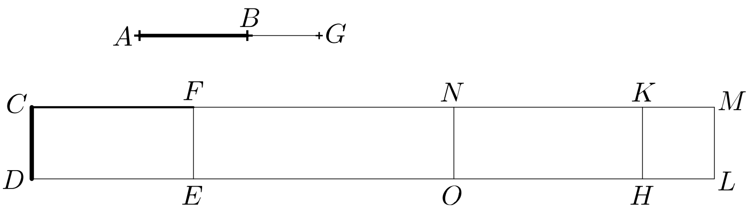


FIGURA Ex 102

Però [el rectangle] $\square\, CL$ és al $\square\, FL$ com [el segment] CM al MF. [Evi 1]

Per tant, CM és incommensurable en longitud amb MF [Ex 11]
i tots dos són racionals.

En conseqüència, CM i MF són segments racionals commensurables només en quadrat.

Per tant, [el segment] CF és un apòtom. ♠

Afirmo que és un sisè apòtom.

c) De manera semblant, atès que $\square\, FL$ equival a dues vegades el rectangle de [costats] AG i GB, [Eii 7]
si dimidiem [el segment] FM pel punt N, [Ei 11]
i per aquest punt tirem [el segment] NO paral·lel a CD, [Ei 31]
resulta que cada un de[ls rectangles] $\square\, FO$ i $\square\, LN$ equival al [rectangle] de costats AG i GB.

I, atès que [els segments] AG i GB són incommensurables en quadrat,
els quadrats fets amb aquests segments són incommensurables.
[Dx 1.2]

I, com que el quadrat de costat AG equival a[l rectangle] $\square\, CH$,
i el de costat GB al $\square\, KL$,
[els rectangles] $\square\, CH$ i $\square\, KL$ també són incommensurables.
[per substitució]

Però [el rectangle] $\square\, CH$ és a $\square\, KL$ com [el segment] CK al KM. [EVI 1]

Per tant, CK i KM són incommensurables. [EX 11]

I, atès que el rectangle de [costats] AG i GB és la mitjana proporcional dels quadrats fets amb aquests costats AG i GB, [EX 21, lema] que [els rectangles] $\square\, CH$ i $\square\, KL$ equivalen als quadrats de costats AG i GB[, respectivament],
i $\square\, NL$ ho és al rectangle de [costats] AG i GB,
resulta que $\square\, NL$ també és la mitjana proporcional de $\square\, CH$ i $\square\, KL$. [EV 17, iterat]

O sigui, $\square\, CH$ és a $\square\, NL$ com $\square\, NL$ a $\square\, KL$.

I, per les mateixes raons d'abans, l'excés del quadrat de costat CM sobre el de costat MF és el quadrat de costat [un segment] incommensurable amb CM. [EX 18]

I cap segment és commensurable en longitud amb el [segment] racional CD.

En definitiva, CF és un sisè apòtom. [DX 3.6] ♠
[I això és el que volíem demostrar.] ♠

EX 103. *Un [segment] commensurable en longitud amb un apòtom és un apòtom de la mateixa classe.*[763]

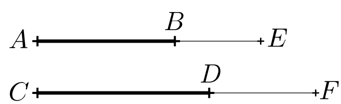


FIGURA EX 103

Siguin AB un apòtom i CD [un segment] commensurable en longitud amb ell.

Afirmo que CD també és un apòtom de la mateixa classe que AB.

[*Demostració.*] *a*) Atès que AB és un apòtom
i BE el component,
AE i EB són [segments] racionals commensurables només en quadrat. [EX 73]

Hem vist que BE és a DF com AB a CD. [EVI 12]

I també [hem vist] que un és a un com tots a tots. [EV 12]

763. Amb aquesta proposició s'inicien les que estableixen que la commensurabilitat en longitud respecta el tipus de segments i, dins d'un tipus, l'ordre quan n'hi ha.

Per tant, el total AE és al total CF com AB a CD,
i AB és commensurable en longitud amb CD.

D'això en resulta que AE també ho és amb CF, [Dx 1.1]
i BE amb DF. [Ex 11]

I AE i BE són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

Per tant, CF i FD també ho són, [Ex 13]
i[, de retruc,] CD és un apòtom. ♠

Afirmo que és de la mateixa classe que AB.

b) Atès que AE és a CF com BE a DF,
alternando, AE és a EB com CF a FD. [Ev 16]

Així doncs, l'excés del quadrat de costat AE sobre el de [costat] EB és el quadrat de costat:[764]

b_1) [Un segment] commensurable [en longitud] amb AE.
b_2) [Un segment] incommensurable [en longitud] amb AE.

b_1) Si l'excés del quadrat de [costat] AE sobre el de costat EB és el quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud] amb AE,
aleshores l'excés del quadrat de costat CF sobre el de [costat] FD és el quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud] amb CF. [Ex 14]

$b_{1.1}$)[764] Si AE és commensurable en longitud amb un [segment] racional donat per endavant,
CF també ho és. [Ex 12]

I, si BE és commensurable, DF també.

$b_{1.2}$) Però, si ni AE ni EB no són commensurables en longitud amb un [segment] racional donat per endavant, ni CF ni FD [no ho són]. [Ex 13] ♠

b_2) Si l'excés del quadrat de [costat] AE sobre el de [costat] EB és el quadrat de costat [un segment] incommensurable [en longitud] amb AE,

764. Disjunció de casos.

aleshores l'excés del [quadrat] de [costat] CF sobre el de [costat] FD és el quadrat de costat [un segment] incommensurable [en longitud] amb CF. [Ex 14]

$b_{2.1}$)[765] Si AE és commensurable en longitud amb un [segment] racional [donat per endavant],
[aquest segment] és CF. [Ex 12]

I, si BE [és commensurable], aquest segment és DF.

$b_{2.2}$) I, finalment, si ni AE ni EB [no són commensurables], ni CF ni FD no ho són. [Ex 13]

En definitiva, CD és un apòtom de la mateixa classe que AB.
[Dx 3.1 a 3.6] ♠

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 104. *Un [segment] commensurable [en longitud] amb un apòtom d'un [segment] medial és un apòtom d'un [segment] medial, i de la mateixa classe.*

Siguin AB un apòtom d'un [segment] medial
i CD un segment commensurable en longitud amb AB.

Afirmo que CD també és un apòtom d'un [segment] medial,
i de la mateixa classe que AB.

[*Demostració.*] *a*) Atès que AB és un apòtom d'un [segment] medial
i EB el component,
AE i EB són [segments] medials commensurables només en quadrat.
[Ex 74 i 75]

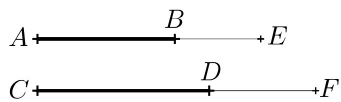


FIGURA Ex 104

Hem vist que AB és a CD com BE a DF. [Evi 12]

Aleshores, AE també és commensurable [en longitud] amb CF,
i BE amb DF. [Ev 12 i Ex 11]

I, a més, AE i EB són [segments] medials commensurables només en quadrat.

Per tant, CF i FD també ho són. [Ex 23 i Ex 13]

Aleshores, CD és un apòtom d'un [segment] medial.
[Ex 74 i Ex 75] ♠

765. Disjunció de casos.

Afirmo que és de la mateixa classe que AB.

b) Atès que AE és a EB com CF a FD, [Ev 12 i 16]
[però que AE és a EB com el quadrat de costat AE al rectangle de costats AE i EB,
i que CF és a FD com el quadrat de costat CF al rectangle de costats CF i FD],
resulta que el quadrat de costat AE és al rectangle de [costats] AE i EB com el [quadrat] de costat CF al [rectangle] de [costats] CF i FD. [Ex 10, lema]

[I, *convertendo*,] el quadrat de costat AE és al de costat CF com el rectangle de [costats] AE i EB al de [costats] CF i FD.

Però el quadrat de costat AE és commensurable amb el de costat CF.

Per tant, el rectangle de [costats] AE i EB també ho és amb el de [costats] CF i FD. [Ev 16 i Ex 11]

En conseqüència, els rectangles de [costats] AE i EB, i CF i FD són racionals o medials. [Dx 1.4 i Ex 23, porisma]

En definitiva, CD és l'apòtom d'un [segment] medial,
i de la mateixa classe que AB. [Ex 74 i 75] ♠

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 105. *Un* [*segment*] *commensurable* [*en longitud*] *amb un* [*altre*] *menor és menor.*

Siguin AB un [segment] menor i CD un [segment] commensurable en longitud amb ell.

Afirmo que CD també és un [segment] menor.

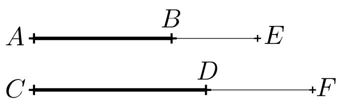


Figura Ex 105

[*Demostració.*] Considerem la mateixa construcció feta abans.

Atès que AE i EB són [segments] incommensurables en quadrat, [Ex 76]
CF i FD també ho són. [Ex 13]

Per tant, atès que AE és a EB com CF a FD, [Ev 12 i 16]
el quadrat de costat AE és al de [costat] EB com [el de costat] CF a[l de costat] FD. [Evi 22]

Aleshores, *componendo*, la suma dels quadrats de [costats] AE i EB és al quadrat de costat EB com la suma dels quadrats de [costats] CF i FD al de costat FD. [Ev 18]

Però el quadrat de [costat] BE és commensurable amb el de [costat] DF, [Ex 104]

i[, *alternando*,] la suma dels quadrats de [costats] AE i EB també ho és amb la suma dels quadrats de costats CF i FD, [Ev 16 i Ex 11]

i la suma dels quadrats de [costats] AE i EB és racional. [Ex 76]

Per tant, la suma dels quadrats de [costats] CF i FD també és racional. [Dx 1.4]

De bell nou, atès que el quadrat de [costat] AE és al rectangle de [costats] AE i EB com el [quadrat] de [costat] CF al [rectangle] de [costats] CF i FD, [Ex 21]

i que el quadrat de [costat] AE és commensurable amb el de [costat] CF,

resulta que el [rectangle] de [costats] AE i EB també ho és amb el de [costats] CF i FD.

I el [rectangle] de [costats] AE i EB és medial. [Ex 76]

En conseqüència, el de [costats] CF i FD també ho és.

[Ev 23, porisma]

Així doncs, [els segments] CF i FD són incommensurables en quadrat,

la suma dels quadrats fets amb aquests costats és racional

i el rectangle [que determinen], medial.

En definitiva, CD és un [segment] menor. [Ex 76]

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 106. *Un [segment] commensurable [en longitud] amb un [segment] que, amb una [àrea] racional, produeix una [àrea] total medial, és un [segment] que, amb una [àrea] racional, també en produeix una de total medial.*

Siguin AB un [segment] que amb una [àrea] racional produeix una [àrea total] medial

i CD un [segment] commensurable [en longitud] amb AB.

Afirmo que CD també és un [segment] que, amb una [àrea] racional, produeix una [àrea total] medial.

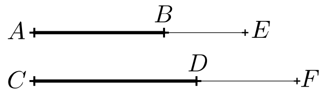


Figura Ex 106

[*Demostració.*] Considerem el component BE de AB.

Aleshores, AE i EB són incommensurables en quadrat,
la suma dels quadrats de costats AE i EB és [una àrea] medial
i el rectangle [que determinen], racional. [Ex 77]

Considerem la mateixa construcció feta abans [en les proposicions anteriors].

De manera semblant [a la que hem fet servir en les proposicions precedents],
podem establir que entre CF i FD hi ha la mateixa raó que entre AE i EB,
la suma dels quadrats de [costats] AE i EB és commensurable amb la dels quadrats de [costats] CF i FD,
i que el rectangle de [costats] AE i EB ho és amb el de [costats] CF i FD.

D'això en resulta que CF i FD són incommensurables en quadrat, que la suma dels quadrats de costats CF i FD és medial
i el rectangle [que determinen], racional.

En definitiva, CD és un [segment] que, amb una [àrea] racional, fa una [àrea total] medial. [Ex 77]

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 107. *Un [segment] commensurable [en longitud] amb un [segment] que, amb una [àrea] medial, produeix una [àrea total] medial també és un [segment] que, amb una [àrea] medial, en produeix una altra de medial.*

Siguin AB un [segment] que amb una [àrea] medial produeix una [àrea total] medial
i CD, commensurable [en longitud] amb AB.

Afirmo que CD també és un [segment] que, amb una [àrea] medial, en produeix una [de total] medial.

[*Demostració.*] Considerem el component BE de AB
i la mateixa construcció que hem fet [en les proposicions precedents].

Aleshores, AE i EB són incommensurables en quadrat,
la suma dels quadrats de costats AE i EB és [una àrea] medial,
el rectangle [que determinen] és medial
i la suma dels quadrats [anteriors], incommensurable amb el [rectangle]. [Ex 78]

I, com hem vist abans, AE i EB són commensurables [en longitud] amb CF i FD[, respectivament],
la suma dels quadrats de [costats] AE i EB ho és amb la dels quadrats de [costats] CF i FD
i el rectangle de [costats] AE i EB ho és amb el de [costats] CF i FD.

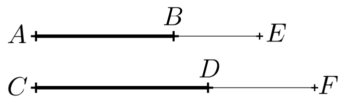


Figura Ex 107

En conseqüència, [els segments] CF i FD també són incommensurables en quadrat i generen un rectangle medial,
i la suma dels quadrats és medial i incommensurable amb aquest rectangle.

En definitiva, CD és un [segment] que, amb una àrea medial, produeix una [àrea total] medial. [Ex 78]
[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 108. *Si sostraiem, d'una* [*àrea*] *racional, una medial, l'arrel quadrada de l'*[*àrea*] *residu és un* [*segment*] *irracional apòtom o menor.*
Sostraiem, de l'àrea racional $\square BC$, la medial $\square BD$.

Afirmo que l'arrel quadrada del residu $\square EC$ proporciona un d'aquests dos [segments] irracionals: un [segment] apòtom o un [segment] menor.

[*Demostració.*] *a*) Considerem un [segment] racional FG.
Hi apliquem el rectangle[766] $\square GH$ equivalent a $\square BC$. [E vi 17]
Sostraiem del rectangle $\square GH$, el $\square GK$ equivalent a $\square DB$.
Aleshores, el residu $\square EC$ equival a $\square LH$. [Nc 3]

766. El text diu: ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, 'el paral·lelogram amb angles rectes'. Fixem-nos, doncs, que, quan Euclides parla d'àrees, no pensa necessàriament en rectangles, encara que a la figura representi rectangles. Pot estar pensant en paral·lelograms. Això val per a totes les proposicions d'aquest llibre. Tanmateix, no altera gens la classe d'àrees que considerem, atès que, de vegades, cerca l'arrel quadrada, és a dir, un segment el quadrat del qual equival a l'àrea.

Atès que $\square\, BC$ és una [àrea] racional,
que $\square\, BD$ n'és una de medial
i que [les àrees] $\square\, BC$ i $\square\, BD$ són equivalents a $\square\, GH$ i $\square\, GK$[, respectivament],
resulta que $\square\, GH$ és una [àrea] racional, $\square\, GK$ una medial
[per substitució]
i totes dues estan aplicades al [segment] racional FG.

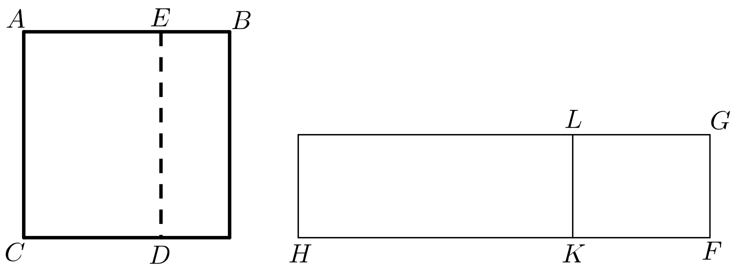


FIGURA EX 108

En conseqüència, [el segment] FH és racional i commensurable en longitud amb FG, [Ex 20]
i FK també ho és i, a més, incommensurable en longitud amb FG. [Ex 22]

Com [el segment] FH amb FK. [Ex 13]

D'això en resulta que [els segments] FH i FK són racionals i commensurables només en quadrat.

Per tant, [el segment] KH és un apòtom [Ex 13]
i KF el seu component. ♠

b) Així doncs, l'excés del quadrat de costat HF sobre el de costat FK és el quadrat de costat [un segment]:[767]

b_1) Commensurable [en longitud] amb el HF.

b_2) No commensurable [en longitud] amb el HF.

b_1) En el primer cas, l'excés del quadrat és el quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud amb HF],
i el total HF ho és amb el [segment] racional FG.

Aleshores, [el segment] KH és un primer apòtom, [Dx 3.1]
i l'arrel quadrada d'una [àrea] formada per un [segment] racional i un primer apòtom és un apòtom. [Ex 91]

767. Disjunció de casos.

Per tant, l'arrel quadrada de $\square\, LH$, és a dir, [de] $\square\, EC$,[768] és un apòtom. ♠

b_2) Si l'excés del quadrat de costat HF sobre el de costat FK és el quadrat de costat [un segment] incommensurable [en longitud] amb HF;

atès que el total FH és commensurable en longitud amb el [segment] racional FG,

resulta que KH és un quart apòtom, [Ex 14]

i l'arrel quadrada d'una [àrea] formada per un [segment] racional i un quart apòtom és un [segment] menor. [Ex 94] ♠

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 109. *Si sostraiem d'una* [*àrea*] *racional, una medial, l'arrel quadrada de l'*[*àrea*] *residu és un* [*segment*] *irracional d'una d'aquestes dues classes: un primer apòtom o un que, amb una* [*àrea*] *racional, fa una* [*àrea*] *total medial.*

Sostraiem, de la [àrea] racional $\square\, BC$, la medial $\square\, BD$.

Afirmo que l'arrel quadrada de la [àrea] residu $\square\, EC$ proporciona un d'aquests dos [segments] irracionals:

un primer apòtom d'un segment medial o

un que, amb una [àrea] racional, fa una [àrea] total medial.

[*Demostració.*] *a*) Considerem un [segment] racional FG.

Hi apliquem àrees semblants a les de la proposició anterior. [Ex VI 17]

D'acord amb això, FH és [un segment] racional incommensurable en longitud amb FG,

i KF també ho és i, a més, commensurable en longitud amb FG.

Aleshores, FH i FK són [segments] racionals commensurables només en quadrat. [Ex 13]

En conseqüència, KH és un apòtom [Ex 73]

i FK n'és el component. ♠

b) Així doncs, l'excés del quadrat de costat HF sobre el de costat FK és un quadrat de costat:[769]

768. Per substitució.

769. Disjunció de casos.

b_1) [Un segment] commensurable [en longitud] amb HF.

b_2) [Un segment] incommensurable [en longitud] amb HF.

b_1) En conseqüència, si l'excés del quadrat de costat HF sobre el de costat FK és un quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud] amb HF;
aleshores, atès que el component FK és commensurable en longitud amb el [segment] racional FG,
resulta que KH és un segon apòtom [Dx 3.2]
i FG és racional.

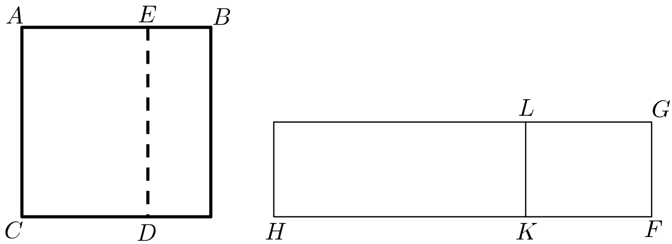


FIGURA Ex 109

En definitiva, l'arrel quadrada de [l'àrea] $\square\, LH$,
que és la mateixa que la de $\square\, EC$,
és un primer apòtom d'un [segment] medial. [Ex 92] ♠

b_2) I, si l'excés del quadrat de [costat] HF sobre el de costat FK és el quadrat de costat [un segment] incommensurable [en longitud amb HF];
aleshores, atès que el component FK és commensurable en longitud amb el [segment] racional FG,
resulta que KH és un cinquè apòtom. [Dx 3.5]

En definitiva, l'arrel quadrada de $\square\, EC$ és un segment que, amb una [àrea] racional, fa una [àrea] total medial. [Ex 95]
[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 110. *Si sostraiem, d'una* [*àrea*] *medial, una medial incommensurable amb el total, l'arrel quadrada de l'*[*àrea*] *residu és un* [*segment*] *irracional segon apòtom d'un* [*segment*] *medial o un que, amb una* [*àrea*] *medial, fa una* [*àrea*] *total medial.*

D'acord amb els casos i les figures anteriors, sostraiem, de l'[àrea] medial $\square\, BC$, la medial $\square\, BD$ incommensurable amb la total.

Afirmo que l'arrel quadrada de $\square\, EC$ és un d'aquests dos [segments] irracionals:[770]
un segon apòtom d'un [segment] medial o
un [segment] que, amb una [àrea] medial, fa una [àrea] medial total.

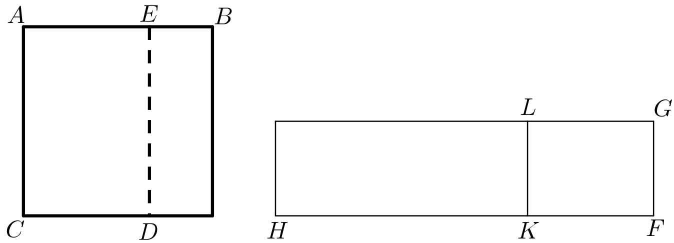


Figura Ex 110

[*Demostració.*] Atès que BC i BD són dues [àrees] medials
i que $\square\, BC$ és incommensurable amb $\square\, BD$,
resulta que FH i FK són [segments] racionals incommensurables en longitud amb FG. [Ex 22]

I, com que $\square\, BC$ és incommensurable amb $\square\, BD$,
és a dir, $\square\, GH$ amb $\square\, GK$ —els seus equivalents—,
resulta que [el segment] HF també ho és [en longitud] amb FK.
[Evi 1 i Ex 11]

Aleshores, FH i FK són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

En conseqüència, KH és un apòtom [Ex 73]
[i FK el seu component].

D'això en resulta que l'excés del quadrat de costat FH sobre el de costat FK és un quadrat de costat:[770]
b_1) [Un segment] commensurable.
b_2) [Un segment] incommensurable [en longitud] amb HF.

b_1) Per tant, l'excés del quadrat de costat FH sobre el de costat FK és el quadrat de costat commensurable [en longitud] amb FH, i cap dels segments FH i FK no ho és amb el [segment] racional FG.

En conseqüència, [el segment] KH és un tercer apòtom, [Dx 3.3]
KL és racional

770. Disjunció de casos.

i el rectangle determinat per un [segment] racional i un tercer apòtom és irracional.

Per tant, la seva arrel quadrada és un [segment] irracional que anomenem *segon apòtom d'un* [*segment*] *medial.* [Ex 93]

En conseqüència, l'arrel quadrada de $\square\, LH$ —equivalent a $\square\, EC$— és un segon apòtom d'un [segment] medial.

b_2) I, si l'excés del quadrat de costat FH sobre el de [costat] FK és el quadrat de costat [un segment] incommensurable [en longitud] amb FH,

i ni HF ni FK no són commensurables en longitud amb FG; [Dx 3.6] l'arrel quadrada del rectangle de [costats] un [segment] racional i un sisè apòtom és un [segment] que, amb una [àrea] medial, en fa una de total medial. [Ex 96]

En definitiva, l'arrel quadrada de $\square\, LH$ —equivalent a $\square\, EC$— és un [segment] que, amb una [àrea] medial, en fa una de medial total. [I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 111. *Un* [*segment*] *apòtom no és un* [*segment*] *binomial.*[771]

Sigui AB un apòtom.

Afirmo que no és un [segment] binomial.

[*Demostració.*] Si ho és,[772]

el considerem juntament amb un [segment] racional DC.

Apliquem el rectangle $\square\, CE$ equivalent al quadrat de [costat] AB a[l segment] CD. [Evi 17]

Aquest rectangle produeix l'amplada DE.

Atès que [el segment] AB és un apòtom,

DE és un primer apòtom. [Ex 97]

Sigui EF el [seu] component.

Aleshores, DF i FE són [segments] racionals commensurables només en quadrat,

l'excés del quadrat de costat DF sobre el de costat FE és el quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud] amb DF,

771. Aquí Euclides posa de manifest que són de classes diferents.

772. Hipòtesi de l'absurd.

i DF és commensurable en longitud amb el [segment] racional DC. [Dx 2.6]

De bell nou, atès que AB és un [segment] binomial,
DE és un primer binomial. [Ex 60]

Dividim [DE] en els seus [components] per [el punt] G.

Sigui DG el més gran [de tots dos].

Aleshores, DG i GE són [segments] racionals commensurables només en quadrat,
l'excés del quadrat de costat DG sobre el de costat GE és el quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud] amb DG,
i el [terme][773] més gran DG és commensurable en longitud amb el [segment] racional DC considerat. [Dx 2.6]

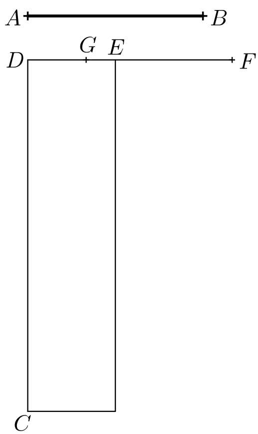


FIGURA Ex 111

Per tant, DF també és commensurable en longitud amb DG [Ex 12]
i el residu GF ho és amb DF. [Ex 15]

[En conseqüència, atès que DF és commensurable amb GF,
i DF és racional, GF també ho és,]
DF és incommensurable en longitud amb EF.

Així doncs, FG també ho és, [Ex 13]
i GF i FE [són segments] racionals commensurables només en quadrat.

Per tant, EG és un apòtom. [Ex 73]

Però també és racional. I això és impossible.

En definitiva, el [segment] apòtom no és el [segment] binomial.
[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 111, porisma. *El* [*segment*] *apòtom no és cap dels* [*segments*] *irracionals subsegüents i aquests són diferents entre si.*

[*Demostració.*] El quadrat de [costat] un [segment] medial, aplicat a un [segment] racional, produeix una amplada racional incommensu-

773. Vegeu la nota 636 (pàgina 277).

rable en longitud amb el [segment] al qual hem aplicat l'àrea. [Ex 22]

El quadrat de [costat] un apòtom, aplicat a un [segment] racional, produeix un primer apòtom d'amplada. [Ex 97]

El quadrat de [costat] un primer apòtom d'un [segment] medial, aplicat a un [segment] racional, produeix un segon apòtom d'amplada. [Ex 98]

El quadrat de [costat] un segon apòtom d'un [segment] medial, aplicat a un [segment] racional, produeix un tercer apòtom d'amplada. [Ex 99]

El quadrat de [costat] un [segment] menor, aplicat a un [segment] racional, produeix un quart apòtom d'amplada. [Ex 100]

El quadrat de [costat] un [segment] que, amb una [àrea] racional, produeix una [àrea] total medial, aplicat a un [segment] racional, produeix un cinquè apòtom d'amplada. [Ex 101]

I el quadrat de [costat] un [segment] que, amb una [àrea] medial, produeix una [àrea] total medial, aplicat a un [segment] racional, produeix un sisè apòtom d'amplada. [Ex 102]

Per tant, atès que les amplades subsegüents difereixen de la primera, ja que aquesta és racional,
i que difereixen entre si, ja que són de classes diferents;
els [segments] irracionals difereixen els uns dels altres.

I, com que hem establert que el [segment] apòtom no és el binomial, [Ex 111]
que els [segments irracionals] subsegüents de l'apòtom, aplicats a un [segment] racional, produeixen, en la pròpia classe, [segments] apòtoms d'amplada,
i que els [segments irracionals] subsegüents del binomial [produeixen], en la pròpia classe, binomials d'amplada;
els [segments] irracionals subsegüents de l'apòtom són diferents
i els [segments] irracionals subsegüents del binomial també ho són.

En total hi ha, doncs, tretze [segments] irracionals ordenats així:

1.	[Μέσην]	Medial.[774]
2.	[Δύο ὀνομάτων]	Binomial.
3.	[Δύο μέσων πρώτην]	Primer bimedial.
4.	[Δύο μέσων δευτέραν]	Segon bimedial.
5.	[Μείζονα]	Major.
6.	[Ῥητὸν καὶ μέσων δυναμένην]	Arrel quadrada d'una àrea racional més una de medial.[775]
7.	[Δύο μέσα δυναμένην]	Arrel quadrada a dues àrees medials.
8.	[Ἀποτομήν]	Apòtom.
9.	[Μέσης ἀποτομὴν πρώτην]	Apòtom primer d'una medial.
10.	[Μέσης ἀποτομὴν δευτέραν]	Apòtom segon d'una medial.
11.	[Ἐλάσσονα]	Menor.
12.	[Μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν]	El que fa, amb una [àrea] racional, una de total medial.[776]
13.	[Μετὰ μεσοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν]	El que fa, amb una [àrea] medial, una de total medial.[776]

Ex 112. *El* [*quadrat*] *de costat* [*un segment*] *racional, aplicat a un* [*segment*] *binomial, produeix una amplada corresponent a un* [*segment*] *apòtom de components commensurables* [*en longitud*] *amb els del binomial amb el qual té la mateixa raó. I l'apòtom resultant és de la mateixa classe que el binomial.*[777]

Siguin A un [segment] racional i BC un [segment] binomial el terme[778] més gran del qual és DC.

Considerem el rectangle de [costats] BC i EF equivalent al quadrat de [costat] A. [Evi 17]

Afirmo que EF és un apòtom els termes[778] del qual són commensurables [en longitud] amb CD i DB, i que ho són amb una raó igual.

A més, EF és de la mateixa classe que BC.

774. Aquest segment definit a Ex 21 (pàgina 242) no forma part dels irracionals de la taula 1.12 (pàgina 30).

775. És a dir, el costat del quadrat equivalent a una àrea racional més una de medial.

776. Vegeu la nota 715 (pàgina 341).

777. Heiberg considera que tant aquesta proposició com les següents són interpolacions tardanes del text original (Heiberg (1883-1888), volum iii (1885), p. 367, nota 1).

778. Vegeu la nota 636 (pàgina 277).

[*Demostració.*] *a*) Considerem el rectangle de [costats] BD i G equivalent al quadrat de [costat] A. [EVI 17]

El rectangle de [costats] BC i EF equival al [de costats] BD i G,
CB és a BD com G a EF, [EVI 16]
i CB és més gran que BD.

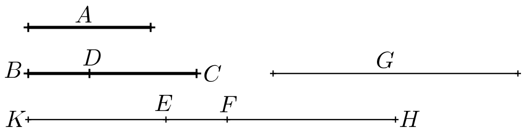


FIGURA EX 112

Per tant, G també excedeix EF. [EV 16 i 14]

Considerem [el segment] EH igual a G. [P 2 i EI 2 o 3]

Aleshores, CB és a BD com HE a EF. [EV 7, iterat]

I, *separando*, CD és a BD com HF a FE. [EV 17]

Hem vist que HF és a FE com FK a KE.

Aleshores, el total HK és al total KF com FK a KE.

Però una de les [magnituds] antecedents és a una de les consegüents com totes les antecedents a totes les consegüents, [EV 12]
i FK és a KE com CD a DB. [EV 11]

Per tant, HK és a KF com CD a DB, [EV 11]
el quadrat de [costat] CD és commensurable amb el de [costat] DB, [EX 36]
el de [costat] HK amb el de [costat] KF, [EVI 22 i EX 11]
i el quadrat de [costat] HK és al de [costat] KF com HK a KE,
ja que els tres [segments] HK, KF i KE són proporcionals. [DX 2.5]

De tot això en resulta que HK és commensurable en longitud amb KE. [EX 11]

Per tant, HE també és commensurable en longitud amb EK. [EX 15]

I, atès que el quadrat de [costat] A equival al rectangle de [costats] EH i BD,
i el de costat A és racional,
resulta que el rectangle de [costats] EH i BD també ho és
i l'hem aplicat al [segment] racional BD.

Així doncs, EH és racional i commensurable en longitud amb BD. [EX 20]

Per tant, el [segment] EK, que és commensurable [en longitud] amb ell, també ho és, [Dx 1.3]
i, a més, ho és amb BD. [Ex 12]

Atès que CD és a DB com FK a KE,
i CD i DB són commensurables només en quadrat,
resulta que FK i KE també ho són només en quadrat, [Ex 11]
i que KE és racional.

Aleshores, FK també ho és. [Dx 1.3 i 1.4]

Per tant, FK i KE són racionals commensurables només en quadrat.

En definitiva, EF és un apòtom. [Ex 73] ♠

b) Ara bé, l'excés del quadrat de costat CD sobre el de costat DB és un quadrat de costat:[779]

b_1) [Un segment] commensurable.

b_2) [Un segment] incommensurable [en longitud] amb CD.

En conseqüència,

b_1) Si l'excés del quadrat de costat CD sobre el de costat DB és el quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud] amb [CD],
aleshores l'excés del quadrat de costat FK sobre el de costat KE és el quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud] amb FK. [Ex 14]

I, si CD és commensurable en longitud amb un [segment] racional donat, FK també ho és. [Ex 11 i 12]

I, si BD [és commensurable], KE també ho és. [Ex 12]

Però, si ni CD ni DB no ho són,
tampoc no ho són els [segments] FK i KE. ♠

b_2) Si l'excés del quadrat de costat CD sobre el de costat DB és el quadrat de costat [un segment] incommensurable [en longitud] amb [CD],
aleshores l'excés del quadrat de costat FK sobre el de costat KE és el quadrat de costat [un segment] incommensurable [en longitud] amb [FK]. [Ex 14]

779. Disjunció de casos.

I, si CD és commensurable en longitud amb un [segment] racional donat, FK també ho és. [Ex 11 i 12]

I, si BD és commensurable, KE també ho és.

Però, si ni CD ni DB no ho són,
tampoc no ho són els [segments] FK i KE. ♠

En definitiva, FE és un apòtom de termes[780] FK i KE commensurables [en longitud] amb els termes[780] CD i DB del [segment] binomial.

Ho és amb la mateixa raó,
i FE és de la mateixa classe que BC. [Dx 2.1 a 2.6]
[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 113. *El quadrat de costat [un segment] racional, aplicat a un apòtom, produeix una amplada corresponent a un [segment] binomial de components commensurables amb la mateixa raó amb el termes*[780] *de l'apòtom. I el binomial resultant és de la mateixa classe que l'apòtom.*

Siguin A un [segment] racional i BD un apòtom.

Considerem el rectangle de [costats] BD i KH equivalent al quadrat de [costat] A, [Evi 17]
de manera que el quadrat de costat un [segment] racional A aplicat a l'apòtom BD produeix una amplada KH.

Afirmo que KH és un [segment] binomial els termes[780]
del qual són commensurables amb els de BD
i que ho és amb una raó igual.

A més, KH és de la mateixa classe que BD.

[*Demostració.*] *a*) Sigui DC un component de BD.

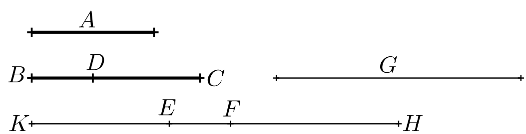


Figura Ex 113

Aleshores, BC i CD són [segments] racionals commensurables només en quadrat. [Ex 73]

780. Vegeu la nota 636 (pàgina 277).

Considerem el [rectangle] de costats BC i G equivalent també al [quadrat] de [costat] A, [Evi 17]
i el costat A racional.

D'això en resulta que el rectangle de [costats] BC i G també ho és.

L'apliquem al [segment] racional BC.

Per tant, G és racional i commensurable en longitud amb BC. [Ex 20]

I, atès que el rectangle de [costats] BC i G equival al de [costats] BD i KH,
resulta que CB és a BD com KH a G, [Evi 16]
i BC és més gran que BD.

Així doncs, KH també ho és que G. [Ev 16 i 14]

Fem KE igual a G. [P 2 i Ei 2 o Ei 3]

Òbviament, KE és commensurable en longitud amb BC. [Ev 7 i Dx 1.1]

Aleshores, atès que CB és a BD com HK a KE,
convertendo, BC és a CD com KH a HE. [Ev 19, porisma]

Hem establert que KH és a HE com HF a FE.

I el residu KF és a FH com KH a HE,
és a dir, com BC a CD, [Ev 19]
i BC i CD [són] commensurables només en quadrat.

Per tant, KF i FH també ho són. [Ev 11]

I, atès que KH és a HE com KF a FH
però que KH és a HE com HF a FE,
resulta que KF és a FH com HF a FE. [Ev 11]

Per tant, el primer és al tercer com el quadrat de [costat] el primer al quadrat de [costat] el segon. [Ev 9]

D'això en resulta que KF és a FE com el quadrat de [costat] KF al de costat FH,
i el de costat KF és commensurable amb el de costat FH.

Per tant, KF i FH són commensurables en quadrat.

En conseqüència, KF també és commensurable en longitud amb FE. [Ex 11]

Per tant, KF també ho és amb KE, [Ex 15]
i KE és racional i commensurable en longitud amb BC.

Així doncs, KF també és racional i commensurable en longitud amb BC. [Ex 12]

Atès que BC és a CD com KF a FH,
alternando, BC és a KF com CD a FH, [Ev 16]
i BC és commensurable [en longitud] amb KF.

Aleshores, FH ho és amb CD, [Ex 11]
i [els segments] BC i CD són racionals commensurables només en quadrat.

En conseqüència, KF i FH són racionals commensurables només en quadrat. [Dx 1.3 i Ex 13]

Per tant, KH és un [segment] binomial. [Ex 36] ♠

b) En conseqüència,[781]

b_1) Si l'excés del quadrat de costat BC sobre el de costat CD és el quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud] amb BC,
aleshores l'excés del quadrat de costat KF sobre el de costat FH és el quadrat de costat [un segment] commensurable [en longitud] amb KF. [Ex 14]

I, si BC és commensurable en longitud amb el [segment] racional donat, també ho és KF. [Ex 14]

I, si CD és commensurable en longitud amb el [segment] racional donat, també ho és FH. [Ex 12]

I, si ni BC ni CD no són commensurables, tampoc no ho són KF i FH. [Ex 13] ♠

b_2) Si l'excés del quadrat de costat BC sobre el de costat CD és el quadrat de costat [un segment] incommensurable [en longitud] amb BC,
aleshores l'excés del quadrat de costat KF sobre el de costat FH és el quadrat de costat un [segment] incommensurable [en longitud] amb KF. [Ex 14]

I, si BC és commensurable en longitud amb el [segment] racional donat, també ho és KF. [Ex 14]

I, si CD és commensurable, també ho és FH. [Ex 13] ♠

781. Disjunció de casos.

I, si ni BC ni CD [no són commensurables], tampoc no ho són KF i FH. [Ex 14]

En definitiva, KH és un [segment] binomial de termes[782] KF i FH commensurables [en longitud] amb els termes[782] BC i CD de l'apòtom.

Ho és amb la mateixa raó

i KH és de la mateixa classe que BC. [Dx 2.1 a 2.6]

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 114. *Si una àrea està determinada per un [segment] apòtom i un binomial de components commensurables amb la mateixa raó que els de l'apòtom, la seva arrel quadrada és [un segment] racional.*

Sigui el rectangle de [costats] AB i CD una àrea formada per l'apòtom AB i el binomial CD.

I sigui CE el terme[782] més gran.

Suposem que els termes[782] del binomial CE i ED són commensurables amb els termes[782]de l'apòtom AF i FB[, respectivament],

i que ho són amb la mateixa raó.

Considerem l'arrel quadrada G del rectangle de [costats] AB i CD. [Evi 8, porisma o 13]

Afirmo que G és un [segment] racional.

[*Demostració*.] Considerem un [segment] racional H. [Dx 1.3]

Apliquem un rectangle equivalent al quadrat de [costat] H a[l segment] CD. [Evi 17]

Aquest rectangle produeix l'amplada KL.

Aleshores, KL és un apòtom.

Siguin KM i ML els termes[782] commensurables amb els del binomial, CE i ED[, respectivament].

I ho seran amb la mateixa raó. [Ex 112]

Ara bé, CE i ED també són commensurables amb AF i FB[, respectivament].

I ho són amb la mateixa raó.

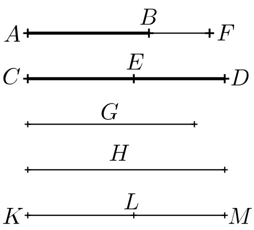


Figura Ex 114

782. Vegeu la nota 636 (pàgina 277).

Aleshores, AF és a FB com KM a ML. [Ev 11]

Per tant, *alternando*, AF és a KM com BF a LM. [Ev 16]

Aleshores, el residu AB és al residu KL com AF a KM, [Ev 19]
i AF és commensurable amb KM. [Ex 12]

Per tant, AB ho és amb KL, [Ex 11]
i AB és a KL com el rectangle de [costats] CD i AB al de [costats] CD i KL. [Evi 1]

Aleshores, el de [costats] CD i AB també ho és amb el de [costats] CD i KL. [Ex 11]

I el de [costats] CD i KL equival al quadrat de costat H.

Per tant, el rectangle de [costats] CD i AB és commensurable amb el quadrat de costat H. [Dv 5 i Dx 1.1]

I el de costat G equival al de [costats] CD i AB.

En conseqüència, el de costat G ho és amb el de costat H, [Nc 1]
i el de costat H és racional.

Aleshores, el de costat G també ho és. [Dx 1.3]

Així doncs, G és racional, [Dx 1.3]
i és l'arrel quadrada del rectangle de [costats] CD i AB.

En definitiva, si una àrea està determinada per un [segment] apòtom i un de binomial els termes[783] del qual són commensurables amb la mateixa raó amb els de l'apòtom,
la seva arrel quadrada és un [segment] racional.

En definitiva, si una àrea està determinada per un [segment] apòtom
i un de binomial els termes[784] del qual són commensurables amb la mateixa raó amb els de l'apòtom,
la seva arrel quadrada és un [segment] racional.
[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Ex 114, porisma. *Una àrea racional pot estar formada per segments irracionals.*
[I això és el que volíem demostrar.] ♠

783. Vegeu la nota 636 (pàgina 277).

Ex 115. *A partir d'un segment medial, podem aconseguir una sèrie infinita*[784] *de segments irracionals diferents.*[785]

Sigui A un [segment] medial.

Afirmo que aquest segment A produeix una sèrie infinita de [segments] irracionals

i que cap no coincideix amb els [segments] precedents.

[*Demostració.*] Considerem un [segment] racional B [Dx 1.3]

i també el quadrat de [costat] C equivalent al rectangle de [costats] B i A. [Evi 17]

Aleshores, C és [un segment] irracional, [Dx 1.4]

ja que una àrea formada per un [segment] irracional i un de racional és irracional, [Ex 20]

i [C] no és cap dels [segments] precedents.

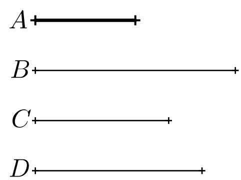


Figura Ex 115

Per tant, C és irracional, [Dx 1.4]

ja que una [àrea formada] per un [segment] irracional i un de racional és irracional, [Ex 20]

i [C] no és cap dels [segments] precedents,

atès que un quadrat, de [costat] cap dels [segments] precedents aplicat a un [segment] racional, produeix un [segment] medial d'amplada.

De bell nou, sigui el quadrat de [costat] D equivalent al rectangle [de costats] B i C. [Evi 17]

Aleshores, el quadrat de [costat] D és irracional. [Ex 20]

Per tant, D és irracional, [Dx 1.4]

i no és cap dels [segments] precedents, ja que un quadrat de [costat] un dels [segments] precedents,

aplicat a un [segment] racional, no produeix l'amplada C.

De manera anàloga, podem procedir fins a l'infinit.

Òbviament, obtenim una [sèrie] infinita de [segments] irracionals del [segment] medial

i cap no és un dels precedents.

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

784. Euclides usa: ἄπειρον.

785. Cap d'ells no coincideix amb els precedents.

A.3 L'estereometria: Exi

Comentari general. I arribem a la geometria elemental de l'espai de tres dimensions, però, com sempre, en el finit. Arribem, doncs, a l'«estereometria». p. 47

El llibre XI aporta els elements d'estereometria bàsics que Euclides necessita per al XII i el XIII. Hi tracta la posició relativa dels segments i dels plans, sempre limitats —de fet, dels «segments de plans»—, la perpendicularitat, el paral·lelisme, les propietats de l'«angle sòlid» i l'estudi dels prismes, en particular, els paral·lelepípedes i els cubs.

Aquest tractat d'estereometria respon a la mentalitat dels llibres I, II, III i IV[786] però, com als aritmètics, hi manquen els postulats que farien que tingués la mateixa consistència doctrinal que els quatre de geometria plana.[787] No proporciona cap postulat relatiu als objectes de l'espai, com ara l'existència del pla.[788] De fet, les seves tres primeres proposicions —mal fonamentades— constitueixen alguns dels supòsits inqüestionables.[789]

S'hi estableix la possibilitat d'aplicar la metodologia tangram amb descomposició finita per determinar l'equivalència del volum de prismes i d'altres sòlids. Tanmateix, els casos de la piràmide i l'esfera, metodològicament anàlegs a la determinació de l'àrea del cercle ja que no s'hi pot aplicar la metodologia tangram finita, constitueixen la problemàtica del llibre següent.

---

786. Els sis primers llibres dels *Elements* són l'objectiu de PLA (2018). Per tant, aquest volum hi està totalment lligat.

787. Recordem que Euclides també omet els postulats necessaris en altres llibres. Per exemple, al primer els que necessita per garantir la validesa d'Ei 1 i Ei 4. Al cinquè, l'«arquimedianitat» per a Ev 4. Als aritmètics, el «descens infinit». I, al desè, l'«exhaustió» per garantir Ex 1.

788. Vegeu, per exemple, la introducció a FRAJESE i MACCIONI (1970), p. 853-860; VITRAC (2001), p. 26-31; ACERBI (2007), p. 389-392.

789. Vegeu la nota 817 (pàgina 425).

Aquest llibre conté trenta-vuit definicions, algunes d'imprescindibles també per als dos següents; i trenta-nou proposicions,[790] sis de les quals són problemes i trenta-quatre, teoremes.[791]

p. 47

A.3*a* Les definicions d'Exi (Ὅροι)

Dxi 1. Un *sòlid* —στερεόν— és la [figura][792] que té longitud —μήκος—, amplada —πλάτος— i profunditat —βάθος.[793]

790. Vegeu Heath (1925), volum iii, p. 260-364; Vera (1970), volum i, p. 918-942; Frajese i Maccioni (1970), p. 847-925; Kayas (1978), volum i, p. 136-172; Puertas (2008), p. 199-266; Vitrac (2001), p. 73-235; Acerbi (2007), p. 1478-1563. Vegeu també <http://www.opera-platonis.de/euklid/>, llibre xi, i <http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pd>, p. 471-504.

791. En concret, tots són teoremes, excepte Exi 11, 12, 22, 23, 26 i 27, que són problemes. Vegeu la taula 1.2 (pàgina 2). Compareu Ex 13 amb la manca d'unicitat de la perpendicular a un segment, pàgines 427-429.

792. Vegeu la definició Di 14, a Pla (2018), p. 79.

793. Euclides accepta la definició de sòlid que ofereix Aristòtil: «Un cos és un objecte que té tres dimensions —διαστάσεις» (Aristòtil (1997), 268 a, llibre i 1, edició castellana, p. 710). Però ni ell ni Euclides no aclareixen el concepte de dimensió. De fet, Euclides evita aquest terme i n'enumera les tres dimensions per separat.

El concepte de sòlid anava lligat a la preocupació grega per la llum i el sentit de la visió. Un sòlid és el que és fosc, sense llum, no visible, ocult per la superfície —ἐπιφάνεια. Per a una informació succinta però molt interessant del concepte de «sòlid» o de «cos» a Plató i a Aristòtil, vegeu Puertas (2008), volum iii, nota 43, p. 199-200. Recordem, tanmateix, *Menó* 76 (Plató (1956), edició catalana, p. 44), que podem sintetitzar amb les paraules d'Adami: «La definició de figura (σχῆμα)» com a «límit d'un sòlid» (στερέου πέρας) és més genèrica (κατὰ παντός) i concisa que Di 14: «Figura és allò envoltat per un o diversos límits» (σχῆμα ἐστι τί ὑπό τινος ἢ τινων ὅρων περιεχ΄μενον). La definició euclidiana només fa referència a les figures geomètriques, mentre que la platònica és aplicable indistintament a tota mena de cossos. Sòcrates la troba millor (Plató (1956), 76e, edició catalana, p. 45) que la del color perquè és netament matemàtica. Vegeu Adami (1936).

Pel que fa a Plató, vegeu també Plató (2013-2015), 817 e, edició catalana, volum ii; Plató (1996), 235 d, edició catalana, p. 74; Plató

DXI 2. L'*extrem* —περάς— *d'un sòlid* és una superfície —ἐπιφάνεια.

DXI 3. Un segment és *perpendicular a un pla*[794] quan determina angles rectes amb cada un dels segments del pla que el toquen.[795]

DXI 4. Un pla és *perpendicular a un altre* quan tots els segments d'un pla perpendicular al segment d'intersecció[796] dels dos plans són perpendiculars a l'altre pla.

DXI 5. La *inclinació* —κλίσις— d'un segment [rectilini] sobre un pla[797] és l'angle [agut] format pel segment [donat] i un [altre] del pla determinat pels dos punts següents: el punt en el qual el segment donat talla el pla[798] i el punt del pla que determina el segment perpendicular al pla tirat des de l'extrem del segment donat.[799]

(1989), 528 d3, edició catalana, volum II, p. 141; MUGLER (1958), p. 93. I, pel que fa a Aristòtil, ARISTÒTIL (2000), llibres V 13, 1020a 11-14, i XI 10, 1066 a 35-b 40, edició castellana, p. 240 i 455-457, en particular, b 32; ARISTÒTIL (2007), llibre IV 5, 382b 24, edició castellana, volum I, p. 234.

I, tanmateix, Euclides no es preocupa mai de l'estudi de les superfícies que tanquen un sòlid. Per a aquest estudi, cal esperar Arquimedes.

794. Diu textualment: εὐθεία πρός ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, 'determina angles rectes'. Però no defineix què és un pla —επιπεδόν.

795. Que passen pel seu peu. Per tant, indirectament, Euclides diu que la perpendicular a un pla el toca o el talla, cosa que necessita a EXI 4. Fixem-nos que omet l'expressió «és perpendicular» —κάθετος— que havia introduït a DI 10 i usa la perífrasi de la nota 794.

796. A EXI 3 Euclides demostra que dos plans es tallen en un segment rectilini. Aquest fet no és important si tenim en compte que ho diu dins d'aquesta definició i que no usa la perpendicularitat de plans abans d'haver establert la proposició EXI 3.

797. L'«angle de recta i pla».

798. Òbviament, exclou, doncs, que el segment rectilini i el pla siguin paral·lels, DXI 7.

799. Ras i curt, el segment donat i la seva «projecció ortogonal» damunt del pla.

Euclides no introdueix el concepte de projecció que, tanmateix, entén com el segment PR determinat per dos punts [P 1]. El primer seria el punt P pel qual el segment incideix en el pla. I el segon seria el punt determinat pel procediment següent: considerem un altre punt del segment incident, Q —diferent del punt P d'incidència del segment en el pla— i tirem la perpendicular des d'aquest punt Q al pla π. Aquesta perpendicular talla el pla [DXI 3] per un punt R, que és l'altre punt del segment projecció.

Usant EXI 4 i EI 19 podem veure que l'angle $\widehat{QPR}$ és el més petit dels

Dxi 6. La *inclinació* —κλίσις— d'un pla sobre un altre pla[800] és l'angle agut que formen dos segments, un de cada pla, perpendiculars al segment d'intersecció dels plans.[801]

Dxi 7. Dos plans, l'un damunt de l'altre, estan *igualment inclinats* —ἐπίπεδον πρός ἐπίπεδον ὁμοιως— que uns altres dos quan els angles de les seves inclinacions són iguals.

Dxi 8. *Els plans paral·lels* —παράλληλα ἐπίπεδά— són els que no es troben.[802]

Dxi 9. *Les figures sòlides semblants* —ὅμοια στερεά— són les que estan limitades pel mateix nombre de figures planes semblants.[803]

Dxi 10. *Les figures sòlides iguals*[804] *i semblants* —ἴσα δὲ καὶ ὅμοια στερεά— són les que estan limitades pel mateix nombre de figures iguals i semblants de la mateixa magnitud.[805]

---

angles formats per la recta donada i qualsevol recta del pla que té un extrem al punt d'intersecció de la recta donada i el pla.

800. L'«angle diedre».

801. Ni en aquest cas ni en l'anterior, Euclides no parla de l'angle complementari. Ho podria haver fet i haver donat la perpendicular de manera anàloga a Ei 10.

802. Diu textualment: Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι τὲ ασύμτωτα. Aquí, doncs, no és tan explícit com en la definició Di 23 i introdueix la paraula grega ἀσύμπτωτος, 'no concurrents', que hem adoptat després per indicar les rectes tangents a una corba en l'infinit: les «asímptotes».

Al text euclidià hi manca el paral·lelisme entre rectes, i entre rectes i plans. Euclides no els necessita enlloc i, com que només li preocupen els «elements» que li són necessaris, aquestes dues definicions no li calen. Però, en un tractat de geometria de l'espai, aquestes definicions hi haurien de ser.

803. Venen a ser, doncs, sòlids polièdrics. Dels cons i els cilindres, Euclides en dona definicions *ad hoc*. D'aquesta manera, pretén estendre la semblança dels polígons a l'espai tridimensional.

804. Euclides no precisa què entén per «figures sòlides iguals». Creu que són superposables o solament equivalents? Pel context de la definició, podríem pensar que pensa que són «superposables», en definitiva, sòlids que tenen la mateixa forma i extensió. Però no ho són perquè hi intervé la «simetria», que ho impedeix. Aquesta qüestió serà estudiada per Simson, Legendre i Cauchy.

805. Simson (Simson (1756), edició electrònica, p. 272-273) en qüestiona la idoneïtat perquè afirma que no és una definició sinó que s'ha d'es-

DXI 11. Un *angle sòlid* —στερεά γωνία— és la inclinació de més de dues rectes que es tallen entre si però que no es troben en una mateixa superfície. O, dit d'una altra manera, l'*angle sòlid* és el que està limitat per més de dos angles plans construïts en un punt però que no són en un mateix pla.[806]
DXI 12. Una *piràmide* —πυραμίς— és la figura sòlida limitada per plans que surten d'un pla i es troben en un punt.
DXI 13. Un *prisma* —πρίσμα— és la figura sòlida limitada per plans, dos dels quals són oposats, iguals i paral·lels, i la resta paral·lelograms.
DXI 14. Una *esfera* —σφαῖρά— és la figura [sòlida i tancada] que obtenim quan fem girar un semicercle al voltant d'un diàmetre [que es manté fix] fins que retorna a la posició inicial.[807]
DXI 15. L'*eix* —ἄξων— d'una esfera és el diàmetre que es manté fix mentre ella gira.
DXI 16. El *centre* —κέντρον— d'una esfera és el centre del semicercle [que l'ha originada].
DXI 17. El *diàmetre* —διάμετρος— d'una esfera és qualsevol segment que passa pel centre i acaba a la seva superfície.
DXI 18. Un *con* —κῶνός— és la figura [sòlida] que es forma quan un costat de l'angle recte[808] d'un triangle rectangle es manté fix mentre el triangle giravolta fins a tornar a la posició inicial.[809]

Si el catet fix és igual a l'altre catet, obtenim un *con rectangle*

---

tablir d'alguna manera, per exemple, per superposició. Però afegeix que, tal com l'expressa Euclides, aquesta definició és falsa.

806. La duplicitat de la definició pot fer-nos pensar que la primera, més antiga, és precisada per la segona.

807. Dues observacions. De bell nou, Euclides recorre al moviment, ara clarament en l'espai tridimensional. I, curiosament, no usa la generalització de la definició EI 15, que és molt natural i igualment vàlida. Que no ho faci, però, és més estrany si tenim present que aquesta definició es troba al text C $7d_4$, PLA (2016*b*), p. 547, i a ARISTÒTIL (1997), 297 a 24, p. 753.

808. Un catet.

809. En recórrer al moviment, obté un eix que és perpendicular a la base. Així, evita parlar de la superfície formada pels segments que uneixen el punt d'un pla amb els punts d'una circumferència d'un altre pla paral·lel al primer.

—ορθογώνιος. Si és menor, un *con obtusangle* —ἀμβλυγώνιος. I, si és major, un *con acutangle* —ὀξυγώνιος.[810]

DXI 19. L'*eix* —ἄξων— del con és el catet que es manté fix mentre el triangle gira.

DXI 20. La *base* —βάσις— del con és el cercle descrit per la recta que gira.

DXI 21. Un *cilindre* —κύλινδρος— és la figura [sòlida] que obtenim quan un costat d'un l'angle recte d'un paral·lelogram rectangle[811] es manté fix mentre el paral·lelogram giravolta fins a retornar a la posició inicial.[812]

DXI 22. L'*eix* —ἄξων— del cilindre és el catet que es manté fix mentre el paral·lelogram gira.

DXI 23. Les *bases* —βάσεις— del cilindre són els cercles descrits pels dos costats[813] del paral·lelogram mentre gira.

DXI 24. *Els cons i els cilindres semblants* —ὅμοιοι— són els que tenen els eixos i els diàmetres de les bases proporcionals.[814]

DXI 25. Un *cub* —κύβος— és el sòlid limitat per sis quadrats.

DXI 26. Un *octaedre* —ὀκτάεδρόν— és el sòlid limitat per vuit triangles equilàters iguals.

DXI 27. Un *icosaedre* —εἰκοσάεδρόν— és el sòlid limitat per vint triangles equilàters iguals.

DXI 28. Un *dodecaedre* —δωδεκάεδρόν— és el sòlid limitat per dotze pentàgons iguals i equilàters.[815]

---

810. Aquesta classificació és important perquè, abans de les *Còniques* (Κωνικά) d'Apol·loni, aquestes corbes s'obtenien tallant un con amb un pla perpendicular a l'aresta i, segons com era el con, s'aconseguia una cònica o una altra: el con rectangle generava la paràbola; l'obtusangle, la hipèrbola, i l'acutangle, l'el·lipse.

811. Un rectangle.

812. El costat del rectangle manté l'ortogonalitat amb l'eix.

813. Un rectangle gira al voltant d'un costat. Els dos costats perpendiculars determinen les bases.

814. La concreció de les figures permet a Euclides una definició acurada que, en el cas dels sòlids polièdrics, no pot donar [DXI 9, pàgina 422].

815. En les quatre darreres definicions es descriuen quatre dels cinc sòlids platònics. Hi falta el tetraedre que està inclòs en la definició més ge-

Les quatre darreres assercions, platòniques, tanquen l'apartat de les definicions dels tres darrers llibres dels *Elements*.[816]

A.3*b* Les proposicions d'Exi

Comentari a les proposicions. Ni aquest llibre ni els dos darrers no contenen cap noció comuna nova ni cap postulat nou relatiu als objectes geomètrics tridimensionals, com ja hem dit abans.[817] Aquesta mancança fa que algunes demostracions de teoremes *existencials* siguin coixes, defectuoses o simplement incorrectes, perquè recorren a «peticions de principi». En concret, les tres primeres proposicions, establertes de manera no gaire precisa i correcta, s'haurien d'haver donat com a postulats. p. 50

Vegem ara els elements de l'estereometria. Recordem que, d'alguna manera, les quatre primeres proposicions substitueixen la manca de postulats de geometria de l'espai que caldria haver establert prèviament.[818]

neral de piràmide. Euclides disposa de definicions molt concretes d'aquests sòlids polièdrics, que seran l'objecte d'estudi del llibre xiii, si bé no n'estudia la superfície que els tanca. Compareu aquestes definicions amb les que ofereix Plató al *Timeu*, 55 e-56 b. Vegeu Pla (2016*b*), p. 302 i següents, i el text C 7*j*, p. 554-559.

816. Vegeu la nota 50 de Puertas (2008), p. 203-204.

817. Alguns dels postulats que caldria imposar són:

a) Si dos punts es troben en un pla, també s'hi troba el segment que determinen.

b) Tres punts diferents no alineats determinen un pla. I, de retruc, si són coplanaris —«són en un mateix pla»—, determinen una circumferència que limita un cercle del pla. Aquest postulat és un porisma d'Eiv 4. Vegeu la nota 828 (pàgina 428).

c) Si dos plans es tallen, ho fan en un segment rectilini.

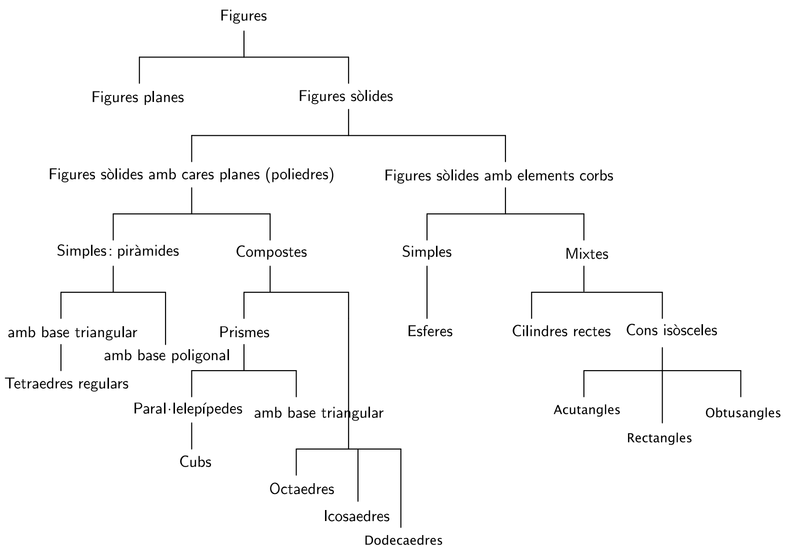
d) Tot pla conté almenys un punt.

Vegeu Heath (1925), volum iii, p. 272-274; Mueller (1981), p. 208 i següents; Frajese i Maccioni (1970), p. 853-860 i 864-867; Vitrac (2001), p. 107-114.

818. Vegeu la nota 817.

En aquest llibre, queden definides totes les figures dels *Elements* (taula A.1).[819] I, un cop analitzats els llibres XI, XII i XIII, queden establertes totes les propietats.

TAULA A.1. *Les figures planes i sòlides dels* Elements



EXI 1. *És impossible que una part d'un segment es trobi en un pla de referència*[820] *i una altra en un de més elevat.*[821]

[*Demostració.*] Suposem que una part, AB, del segment ABC és en un pla de referència i una [altra], BC, en un [altre pla] més elevat.[822]

Al pla de referència, hi ha un segment continu que es manté recte[823] respecte del segment AB.[824]

819. VITRAC (2001), p. 16.

820. En grec: τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. És el pla donat.

821. En grec: μετεωροτέρῳ. Fa referència a un pla que s'aixeca per damunt del pla de referència. Significa que no pot tenir punts en cap altre pla que no contingui el segment en el qual es tallen tots dos plans.

822. Hipòtesi de l'absurd.

823. N'és una prolongació.

824. Aquesta demostració requereix una anàlisi més acurada. De fet, admetre que el pla conté la prolongació del segment AB és el que es vol demostrar. Hi ha, doncs, una petició de principi. Tanmateix, podem supo-

Sigui BD [aquesta prolongació].

Aleshores, AB és un segment comú a dos segments [diferents] ABC i ABD. I això és impossible perquè, si fos possible, podríem fer un cercle amb centre a B i radi AB.[825]

I, aleshores, els diàmetres [ABD i ABC] determinarien circumferències diferents del cercle.[826] [Eiii 10]

En definitiva, no pot ser que un segment [rectilini] tingui una part en un pla de referència i una altra en un pla que s'eleva per damunt [del de referència].

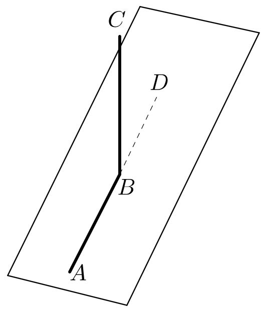


Figura Exi 1

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exi 2. *Si dos segments es tallen,* a*) pertanyen a un* [*mateix*] *pla, i* b*) cadascun dels triangles* [*que es poden formar usant parts d'aquests segments*] *s'hi troba.*[827]

---

sar que el pla és prolongable, i el segment AB també [Nc 2]. La qüestió que ara es planteja és: els segments AB, BD i BC són coplanaris? Fixemnos en el dubte següent: existeix un feix de plans que contenen el segment AB? En el nostre cas, n'hi ha dos: el base i el més elevat. En cada un, el segment AB admet una prolongació [P 2]. Ara bé, podem garantir que la prolongació es troba en la intersecció dels dos plans? Vegeu també la nota següent, i Heath (1925), volum iii, nota, p. 273.

825. Aquest cercle estaria al pla determinat pels segments AD i BC, sempre que dos segments determinin un pla. Quedaria per respondre afirmativament la pregunta: si un pla conté el centre d'un cercle i el diàmetre, conté necessàriament tot el cercle? Això està inclòs a Di 15 i P 3. Però, si hi ha «infinits» plans que contenen AB, cadascun conté un cercle de centre B i radi AB, i tots són diferents. Tenim, doncs, un cercle al pla base i un altre al pla elevat, tots dos amb centre B i radi AB. Prolonguem el radi fins a aconseguir un diàmetre. On cauen aquestes prolongacions?

826. No pot ser que tots dos diàmetres divideixin el cercle en dues parts iguals (Pla (2018), nota 252, p. 82). Però això només ho podem garantir quan el cercle es troba al mateix pla. De moment, no sabem per què. De fet, és el que volem demostrar.

827. La demostració, no gaire precisa, aclareix l'enunciat i el que pretén establir.

Com ja hem dit, aquesta proposició i l'anterior pretenen establir l'«e-

Afirmo que [els dos segments] AB i CD,
que es tallen pel punt E,
són coplanaris,[828] i que tots els triangles [que tenen dos costats, un en cadascun dels segments,] són al pla.[829]

[*Demostració.*] Agafem dos punts arbitraris, F i G, dels segments EC i EB[, respectivament].

Considerem els segments CB i FG,

[P 1][830]

i entre tots dos [els segments] FH i GK.[831]

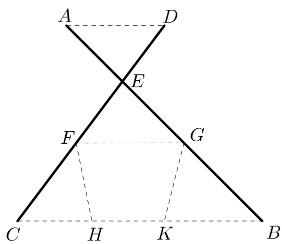


FIGURA EXI 2

a) En primer lloc, afirmo que el triangle $\triangle ECB$ es troba en un pla [de referència],
ja que, si una part del triangle [$\triangle ECB$],
sigui $\triangle FHC$ o $\triangle GBK$,
hi és i el residu en un [pla] diferent,[832]
aleshores una part d'un dels segments EC i EB és al pla de referència,
i [una altra part] en un [pla] diferent.

I, si la part $FCBG$ del triangle $\triangle ECB$ és al pla de referència, i el residu en un [pla] diferent,
aleshores algunes parts dels segments EC i EB també són al pla de referència
i algunes altres en un [pla] diferent.[833]

I això és impossible. [EXI 1]

xistència» del pla per tres rectes que es tallen dues a dues per tres punts no alineats, per dues rectes que es tallen, o per una recta i un punt exterior.

828. Recordem que, a diferència del que havia fet al llibre I, en el qual definia el concepte de «punt» i de «segment», ara Euclides omet la definició del concepte de 'pla' i fa que el terme *coplanari* sigui imprecís.

829. De fet, Euclides vol dir que tres rectes qualssevol que es tallen entre si dues a dues són en un pla.

830. Acceptem que, donats dos punts arbitraris de l'espai geomètric, hi ha un segment rectilini que els té com a extrems.

831. Ara prenem dos punts arbitraris del segment CB i apliquem P 1 tenint en compte la nota 830.

832. Hipòtesi de l'absurd.

833. Aquí *parts* significa 'subsegments'. Vegeu PLA (2018), nota 534, p. 157.

Per tant, el triangle $\triangle ECB$ és en un pla. ♠

b) En segon lloc, [en aquest pla] hi ha els segments EC i EB,
i també els [segments] AB i CD. [Exi 1] ♠

Així, els segments AB i CD són en un pla,
i cada un dels triangles format amb parts seves és al [mateix] pla.
I això és el que volíem demostrar. ♠[834]

Exi 3. *Si dos plans es tallen, la secció comuna és un segment.*[835]

Siguin ▱AB i ▱AC els dos plans que es tallen,
i DB la seva intersecció.[836]

Afirmo que la línia DB és rectilínia.
[*Demostració*.] En cas contrari,[837]
considerem el segment DEB que uneix D i B al pla AB,
i el segment DFB que ho fa al pla BC.[838]

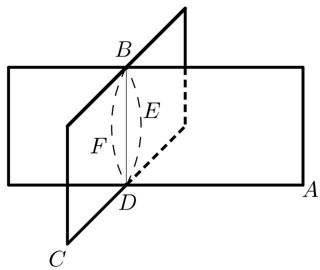


Figura Exi 3

Els segments DEB i DFB tenen els extrems comuns [Nc 1]
i, per tant, tanquen una àrea. I això és impossible. [Nc 9′][839]

Aleshores, DEB i DFB no són segments.

834. El valor d'aquesta proposició és discutible atès que solament analitza el que passa amb certs triangles i quadrilàters que formen part del triangle construït amb el segment que uneix els extrems [de la mateixa banda] dels segments donats i que té el vèrtex al punt pel qual es tallen. Vegeu Simson (1756), p. 262-265. Aquesta demostració serà adoptada per Legendre.

835. Segons va observar Staudt, la demostració implica l'acceptació del postulat compatible amb Nc 5: «Dos plans que es tallen sempre tenen, almenys, dos punts en comú» (Killing (1893), volum ii, p. 43). No és possible que dos plans es tallin en un únic punt?

836. Suposem que, si es tallen, ho fan en una línia.

837. Hipòtesi de l'absurd.

838. Aquí, implícitament, Euclides suposa que dos plans que es tallen tenen almenys dos punts comuns. Segons ha establert Staudt, aquest fet és compatible amb Nc 5. I el seu contingut s'estén al cas en el qual els dos segments no són coplanaris.

839. Amb el benentès que Nc 9′ tant val per al pla com per a l'espai.

De manera anàloga, podem veure que cap altre segment, llevat de DB, [P1][840]
no pot unir els punts D i B.

Així, si dos plans es tallen, la secció comuna és un segment.
I això és el que volíem demostrar. ♠

EXI 4. *Si un segment és perpendicular a dos que es tallen pel punt d'intersecció, també ho és al pla que determinen.*

Sigui EF el segment perpendicular a dos segments AB i CD que es tallen pel punt [d'intersecció] E.

Afirmo que EF també és perpendicular al pla [que conté els segments] AB i CD.

[*Demostració.*] Siguin AE, EB, CE i ED segments iguals entre si. [EI 2]

Sigui GEH un segment arbitrari que passa per E [i uneix els segments AB i CD].[841]

Unim AD i CB. [P 1]

I considerem [els segments] FA, FG, FD, FC, FH i FB, obtinguts [unint un punt arbitrari F del segment EF amb els punts A, G, D, C, H i B]. [P 1]

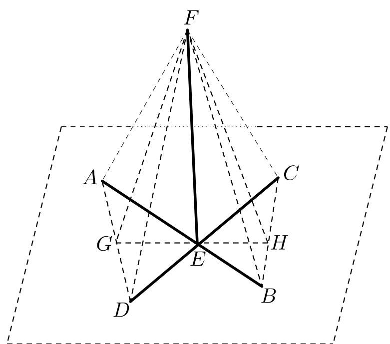


FIGURA EXI 4

Atès que els [segments] AE i ED són iguals als CE i EB, i que formen angles iguals, [EI 15] la base AD és igual a la CB, i el triangle $\triangle AED$ al $\triangle CEB$. [EI 4]

Per tant, l'angle $\widehat{DAE}$ és igual al $\widehat{EBC}$, i el $\widehat{AEG}$ al $\widehat{BEH}$. [EI 15]

Així doncs, els triangles $\triangle AGE$ i $\triangle BEH$ tenen dos angles iguals, respectivament.

I els costats d'aquests angles, AE i EB, també.

840. Com hem dit abans, suposem que B i D són dos punts col·locats en cada un dels plans. Determinen un segment a cada pla.

841. Agafem un punt d'un dels dos segments, i usem P 1 i P 2.

Per tant, els altres costats també són iguals, [EI 26]
GE a EH, i AG a BH.

I, atès que AE és igual a EB
i que el [segment] perpendicular FE és comú,
les bases FA i FB són iguals. [EI 4]

Pel mateix [raonament], FC ho és a FD. [EI 4]

I, com que AD i CB són iguals, i FA i FB també,
els [segments] FA i AD també ho són als [segments] FB i BC, respectivament,
i la base FD ho és a la base FC.

Així doncs, els angles $\widehat{FAD}$ i $\widehat{FBC}$ també són iguals. [EI 8]

I, de bell nou, atès que hem vist que AG i BH, i FA i FB són iguals,
resulta que els [segments] FA i AG són iguals als [segments] FB i BH[, respectivament].

I [hem vist que] l'angle $\widehat{FAG}$ ho és a l'angle $\widehat{FBH}$.

Per tant, les bases FG i FH són iguals. [EI 4]

I, novament, com que hem establert que GE és igual a EH,
i EF és comú,
els [segments] GE i EF són iguals als [segments] HE i EF,
i les bases FG i FH també.

En conseqüència, l'angle $\widehat{GEF}$ és igual a l'angle $\widehat{HEF}$. [EI 8]

Per tant, els angles $\widehat{GEF}$ i $\widehat{HEF}$ són rectes. [DI 10]

En definitiva, [el segment] FE és perpendicular a GH,
que és un segment arbitrari que passa per [el punt] E [del pla de referència que conté els segments AB i AC].

De manera semblant, podem veure que FE és perpendicular a tots els segments que l'intersequen i es troben al pla.

I un segment és perpendicular a un pla quan ho és a tots els seus segments. [DXI 3]

Així doncs, FE és el segment perpendicular al pla
i el pla passa pels segments AB i CD.

De tot això en resulta que FE és perpendicular al pla [que passa] per AB i CD.

I això és el que volíem demostrar. ♠[842]

Exi 5. *Si un segment és perpendicular a tres que concorren en un punt, els tres són al [mateix] pla.*

Sigui AB un segment perpendicular a tres segments BC, BD i BE pel punt [comú] d'intersecció B.

Afirmo que BC, BD i BE són coplanaris.

[*Demostració*.] Si no és així,[843] considerem [els segments] BD i BE del pla de referència, i [un segment] BC que s'eleva per damunt [del pla].

Considerem el pla generat pels [segments] AB i BC.

Aquest pla té un segment comú amb el de referència.

Sigui BF aquest segment comú. [Exi 3]

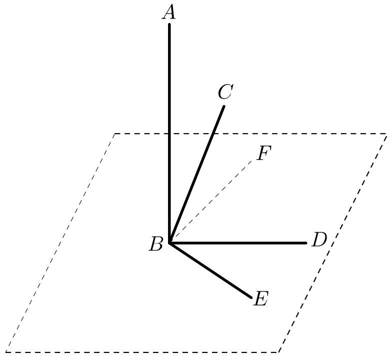


Figura Exi 5

Aleshores, els tres segments AB, BC i BF són al [mateix] pla, en concret, al que conté [els segments] AB i BC.

I, atès que AB és perpendicular a cadascun dels [segments] BD i BE,

AB també ho és al pla [que conté els segments] BD i BE. [Exi 4]

I aquest pla[, que passa pels segments BD i BE,] és el de referència.

Per tant, el segment AB és perpendicular a ell.

I, aleshores, AB també ho és a tots els segments que interseca i que són en aquest pla, [Dxi 3]

i [el segment] BF, que també hi és, l'interseca.

En conseqüència, l'angle $\widehat{ABF}$ és recte.

Però hem suposat que [l'angle] $\widehat{ABC}$ també ho és.

842. La unicitat de la perpendicular d'un segment a un pla és un porisma de la unicitat de la perpendicular d'un segment a un segment [del mateix pla]. Vegeu Pla (2018), p. 104.

843. Hipòtesi de l'absurd.

Per tant, els [dos angles] $\widehat{ABF}$ i $\widehat{ABC}$ són iguals i estan situats al mateix pla. I això és impossible.[844]

En definitiva, [el segment] BC es troba al pla
i, per tant, els tres segments BC, BD i BE són coplanaris.
I això és el que volíem demostrar. ♠

EXI 6. *Si dos segments són perpendiculars a un mateix pla, són paral·lels.*[845]

Siguin AB i CD els dos segments perpendiculars al pla de referència.

Afirmo que AB és paral·lel a CD.

[*Demostració.*] Suposem que [les dues perpendiculars] tallen el pla de referència pels punts B i D[, respectivament]. [DXI 3]

Considerem el segment BD. [P 1]

Sobre el pla, tirem la perpendicular DE al segment BD. [EI 11]

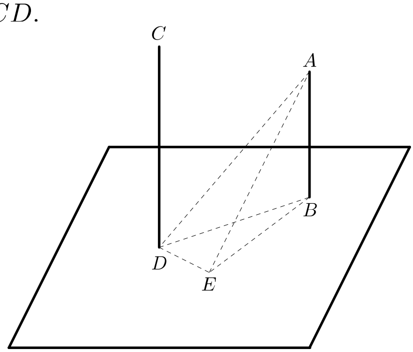


FIGURA EXI 6

Considerem [el segment] DE igual a[l] AB. [P 3 i EI 2]

Tirem [els segments] BE, AE i AD. [P 1]

Atès que AB és perpendicular al pla de referència,
també ho és a tots els segments d'aquest pla que passen pel seu peu. [DXI 3]

Ara bé, [els segments] BD i BE, que es troben al pla, tallen AB.

Per tant, cadascun dels angles $\widehat{ABD}$ i $\widehat{ABE}$ és recte.

Pel mateix [raonament], cadascun dels angles $\widehat{CDB}$ i $\widehat{CDE}$ també ho són.

I, atès que AB i DE són iguals i BD és comú,
resulta que els [segments] AB i BD són iguals als [segments] ED i DB[, respectivament], i determinen angles rectes.

844. Si són iguals, els segments BC i BF comparteixen un segment.
845. És a dir, coplanaris i paral·lels al pla que els conté.

En conseqüència, les bases AD i BE són iguals. [Ei 4]

I, com que AB és igual a DE, i AD a BE,
els [segments] AB i BE són iguals als [segments] ED i DA, respectivament,
i la base AE és comuna.

D'això en resulta que els angles $\widehat{ABE}$ i $\widehat{EDA}$ són iguals, [Ei 8]
i que [l'angle] $\widehat{ABE}$ és recte.

Així doncs, [l'angle] $\widehat{EDA}$ també ho és. [Nc 1]

En definitiva, [el segment] ED és perpendicular al DA
que, al seu torn, és perpendicular a cadascun dels [segments] BD i DC.

Per tant, ED és [un segment] perpendicular als tres segments BD, DA i DC pel punt d'intersecció [comú].

D'això se'n dedueix que els tres segments BD, DA i DC són al [mateix] pla. [Exi 5]

Però AB també [es troba] al pla en el qual són [els segments] DB i DA.

En definitiva, tots els triangles es troben al pla, [Exi 2]
i els angles $\widehat{ABD}$ i $\widehat{BDC}$ són rectes.

Per tant, [els segments] AB i CD són paral·lels. [Ei 28]
I això és el que volíem demostrar. ♠

Exi 7. *Considerem dos* [*segments*] *paral·lels i prenem un punt arbitrari de cada un. El segment que uneix aquests dos punts és al mateix pla que ells.*[846]

Siguin AB i CD dos segments paral·lels,
i E i F dos punts arbitraris, un de cada [segment].

Afirmo que el segment [EF] que els uneix és al mateix pla [de referència] que els [segments] paral·lels.

[*Demostració.*] Si no és així,[847]
és en un pla ⏢EGF[848] que s'eleva per damunt d'ell.

846. Aquesta proposició és supèrflua, si acceptem que, si un pla conté dos punts, necessàriament conté el segment que els uneix.

847. Hipòtesi de l'absurd.

848. Un segment es troba necessàriament en un pla. Porisma d'Exi 1.

En intersecar el pla de referència, aquest pla ▱EGF determina un segment. [Exi 3]

Sigui EF [aquest segment].

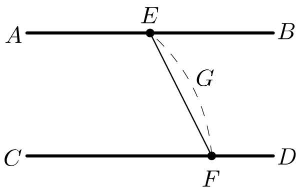


Figura Exi 7

Aleshores, dos segments EGF i EF[, amb els mateixos extrems,] tanquen una àrea. I això és impossible. [Nc 9′]

Per tant, el segment que uneix els [punts] E i F no és en un pla per damunt del pla de referència.

En conseqüència, el segment EF és al pla que conté els segments paral·lels AB i CD.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exi 8. *Si dos segments són paral·lels i un és perpendicular a un pla, l'altre també ho és.*[849]

Siguin AB i CD dos segments paral·lels.

Suposem que un, AB, és perpendicular al pla.

Afirmo que l'altre [segment], CD, també ho és.

[*Demostració.*] Siguin B i D els punts en els quals AB i CD tallen[, respectivament], el pla de referència. [Dxi 4]

Considerem [el segment] BD. [P 1]

[Els segments] AB, CD i BD són al [mateix] pla. [Exi 7]

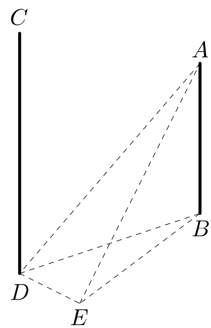


Figura Exi 8

Sobre el pla de referència, tirem DE perpendicular a BD. [Ei 11]

Fem ara DE igual a AB, [P 3 i Ei 2]

i considerem [els segments] BE, AE i AD. [P 1]

Atès que AB és perpendicular al pla,

resulta que AB també ho és a tots els segments que passen pel seu peu i són al pla. [Dxi 3]

Aleshores, els dos angles $\widehat{ABD}$ i $\widehat{ABE}$ són rectes.

I, atès que el segment BD talla els [segments] paral·lels AB i CD,

849. Aquesta demostració és anàloga a la d'Exi 6 i tan poc elegant com aquella.

tenim que la [suma dels angles] $\widehat{ABD}$ i $\widehat{CDB}$ és igual a dos [angles] rectes, [EI 29]
i l'angle $\widehat{ABD}$ és recte.

I, aleshores, $\widehat{CDB}$ també ho és.

En conseqüència, els [segments] CD i BD són perpendiculars.

I, com que AB és igual a DE, i BD és comú;
els [segments] AB i BD són iguals als [segments] ED i DB[, respectivament],
i els angles $\widehat{ABD}$ i $\widehat{EDB}$ també ho són ja que cada un és recte. [Nc 1]

Així doncs, les bases AD i BE també són iguals. [EI 4]

I, atès que [els segments] AB i DE són iguals,
i els costats BE i AD també,
resulta que els [costats] AB i BE són iguals als [costats] ED i DA[, respectivament],
i la base AE és comuna.

Així doncs, els angles $\widehat{ABE}$ i $\widehat{EDA}$ són iguals, [EI 8]
i [l'angle] $\widehat{ABE}$ és recte.

Per tant, l'angle $\widehat{EDA}$ també ho és. [Nc 1]

Aleshores, [el segment] ED és perpendicular al AD i al DB.

D'on en resulta que ED és perpendicular al pla que passa per BD i DA. [EXI 4]

En conseqüència, [el segment] ED és perpendicular a tots els segments que passen pel seu peu al pla que conté BD i DA,
i DC és [un segment] d'aquest pla.

Però [els segments] AB i BD s'hi troben. [EXI 2]

En definitiva, DC també es troba al pla en què hi ha [els segments] AB i BD.

D'on en resulta que ED és perpendicular a DC.

I, en conseqüència, CD també ho és a DE i CD.

Per tant, CD és perpendicular als segments DE i DB
que es tallen pel punt d'intersecció D.

En definitiva, doncs, CD és perpendicular al pla que passa per DE i DB, [EXI 4]
i el pla que conté [els segments] DE i DB és el de referència.

Per tant, CD és perpendicular al pla de referència.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exi 9. [*Els segments*] *paral·lels a un segment que no és al mateix pla que ells són paral·lels entre si.*

Siguin AB i CD [dos segments] paral·lels a EF que no són al mateix pla.

Afirmo que AB i CD són paral·lels entre si.

[*Demostració.*] Considerem un punt G arbitrari de EF
i, per ell, tirem GH perpendicular al [segment] EF del pla [determinat per] EF i AB.

Ara tirem GK, perpendicular a EF al pla [determinat per] FE i CD.

Atès que [el segment] EF és perpendicular a cadascun [dels segments] GH i GK,

resulta que EF també ho és al pla que determinen [els segments] GH i GK. [Exi 4]

Però EF és [un segment] paral·lel al AB.

En conseqüència, AB també ho és al pla [determinat per] HG i GK. [Exi 8]

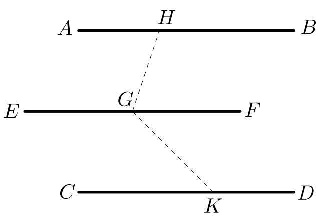


Figura Exi 9

Pel mateix [raonament], CD també ho és a aquest pla.

En conseqüència, [els segments] AB i CD són perpendiculars al pla [determinat per] HG i GK.

I, si dos segments són perpendiculars al mateix pla, són paral·lels. [Exi 6]

Per tant, [els segments] AB i CD són paral·lels.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exi 10. *Si dos segments que es tallen són paral·lels*[*, respectivament*]*, a dos segments que es tallen* [*i les dues parelles*] *no són al mateix pla,* [*aquestes parelles*] *determinen angles iguals.*

Siguin AB i BC dos segments que es tallen [pel punt B],
paral·lels[, respectivament, als dos] segments DE i EF que es tallen [pel punt E].

[Les parelles] AB i BC, i DE i DF, però, no són al mateix pla.

Afirmo que l'angle $\widehat{ABC}$ és igual a[l] $\widehat{DEF}$.

[*Demostració*.] Considerem [els segments] BA, BC, DE i EF iguals. [P 3, Ei 2]

Tirem [els segments] AD, CF, BE, AC i DF. [P 1]

Atès que BA és igual i paral·lel a ED, AD també ho és a BE. [Ei 33]

Pel mateix raonament, CF és igual i paral·lel a AD.

Així doncs, cadascun dels [segments] AD i CF és igual i paral·lel a BE.

I segments paral·lels a un mateix segment però que no són al mateix pla que ell són paral·lels entre si.

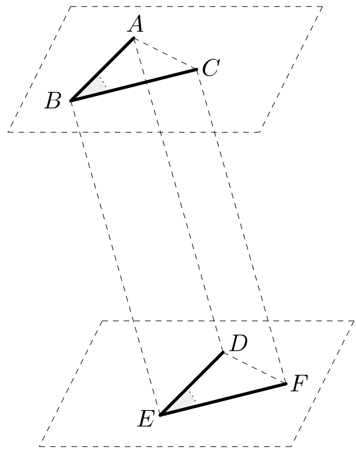


Figura Exi 10

[Exi 9]

Aleshores, AD és paral·lel i igual a CF,
i [els segments] AC i DF els connecten.

En conseqüència, [el segment] AC també és igual i paral·lel a[l] DF. [Ei 33]

I, atès que els [segments] AB i BC són iguals als DE i EF[, respectivament], i que la base AC és igual a la DF,
tenim que els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{DEF}$ són iguals. [Ei8]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exi 11. *Volem tirar un segment perpendicular a un pla des d'un punt exterior.*

Sigui A el punt exterior al pla de referència.[850]

Volem tirar, pel punt A, un segment perpendicular al pla.

850. Aquí, com ja vam comentar a Ei 12 (Pla (2018), p. 103), hauríem de suposar que el pla és il·limitat per garantir, amb independència del dibuix concret, que el punt arbitrari es troba damunt el pla.

[*Construcció.*] Considerem un segment arbitrari BC del pla de referència
i el [segment] AD, perpendicular a BC per [el punt] A.
a) Si, a més,[851] AD també és perpendicular al pla,
aleshores hem aconseguit el que havíem prescrit. ♣ ♠
b) Si no, tirem pel punt D, [el segment] DE perpendicular a BC. [EI 11]

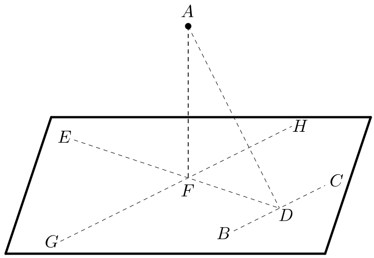


FIGURA EXI 11

Ara, pel punt A, tirem el [segment] AF perpendicular a DE. [EI 12] ♣

[*Demostració.*] [Tirem també el segment] GH paral·lel a[l segment] BC pel punt F. [EI 31]

Atès que [el segment] BC és perpendicular a cadascun dels [segments] DA i DE,
també ho és al pla determinat per ells. [EXI 4]

Però [el segment] GH és paral·lel a BC.

I, si dos segments són paral·lels i un és perpendicular a un pla, l'altre també ho és. [EXI 8]

En conseqüència, [el segment] GH és perpendicular al pla determinat pels [segments] ED i DA.

En definitiva, GH és perpendicular a tots els segments que passen pel seu peu i són [al pla] determinat per ED i AD. [DXI 3]

I [el segment] AF, que és en aquest pla, passa pel seu peu.

Per tant, GH és perpendicular a FA.

En conseqüència, FA és perpendicular a HG i DE.

I, si un segment és perpendicular, pel punt d'intersecció, a dos segments que s'intersequen,
també ho és al pla que determinen. [EXI 4]

Així doncs, [el segment] FA és perpendicular al pla determinat [pels segments] ED i GH, que és el pla de referència.

Per tant, AF és perpendicular a aquest pla pel punt A.

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

851. Disjunció de casos.

Exi 12. *Des d'un punt d'un pla, volem tirar un segment perpendicular.*
Siguin ▱ AC el pla donat, que és el [pla] de referència,
i A un punt d'aquest pla.

Volem tirar un segment perpendicular al pla de referència pel punt A.

[*Demostració.*] Siguin B un punt arbitrari de fora del pla
i BC el [segment] perpendicular al pla de referència pel punt B. [Exi 11]

Tirem [el segment] AD paral·lel al BC pel punt A. [Ei 31]

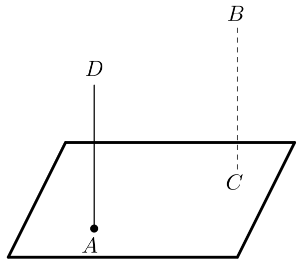


Figura Exi 12

Aleshores, atès que AD i CB són dos segments paral·lels i que un, BC, és perpendicular al pla de referència,
resulta que l'altre [segment], AD, també ho és. [Exi 8]

En definitiva, hem tirat [el segment] AD perpendicular al pla donat pel punt donat A del pla.

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Exi 13. *Des d'un punt* [*del pla*] *no podem tirar dos* [*segments*] *perpendiculars* [*diferents*] *que es trobin en una mateixa banda.*[852]
Suposem que és possible.[853]

Siguin AB i AC els dos segments perpendiculars al pla de referència pel punt A situats a la mateixa banda [del pla].

Considerem el pla que passa [pels segments] BA i AC,
i el segment en el qual es tallen, que passa pel punt A del pla de referència. [Exi 3]

Tenim el segment DAE.

852. A diferència del que hem vist al llibre I (Pla (2018), p. 104 i 105), ara es preocupa de la unicitat. La raó d'això és que, a l'espai, hi ha una infinitat de segments perpendiculars a un segment per un dels seus punts, però en un pla només n'hi ha un. És curiós aquest diorisma, ja que, de fet, la perpendicular per un punt del pla, a una banda i a l'altra, és el mateix segment. O, dit d'una altra manera, una perpendicular és la prolongació de l'altra.

853. Hipòtesi de l'absurd.

Aleshores, [els segments] AB, AC i DAE són al mateix pla.

I, atès que CA és perpendicular al pla de referència,
també ho és a tots els segments d'aquest pla que passen pel seu peu, [Dxi 3]

en particular, [al] DAE.

D'això en resulta que l'angle $\widehat{CAE}$ és recte.

Pel mateix [raonament], [l'angle] $\widehat{BAE}$ també ho és.

Per tant, els angles $\widehat{CAE}$ i $\widehat{BAE}$ són iguals [Nc 1]
i estan situats al [mateix] pla. I això és impossible. ♠

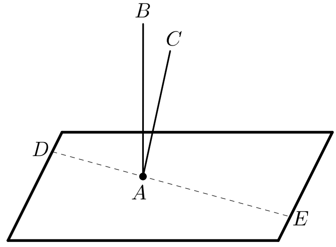


Figura Exi 13

En definitiva, dos segments [diferents] no poden ser perpendiculars a un pla pel mateix punt i a la mateixa banda.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exi 14. *Dos plans que comparteixen un [segment] perpendicular són paral·lels.*

Sigui AB un segment perpendicular a cada un dels plans ⏥CD i ⏥EF.

Afirmo que tots [dos] plans són paral·lels.

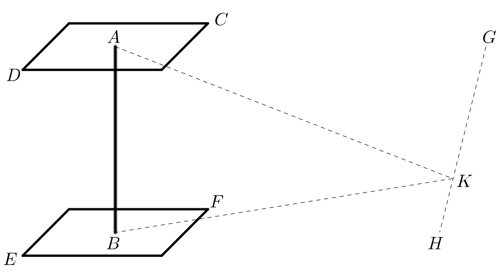


Figura Exi 14

[*Demostració*.] Si no ho són,[854]
prolongats convenientment, es tallen. [Dxi 8]

Suposem, doncs, que es tallen.

Si ho fan, tenen una secció comuna que és el [segment] BK. [Exi 3]

Considerem un punt arbitrari K del [segment] GH,
i els [segments] AK i BK. [P 1]

Atès que AB és perpendicular al pla ⏥EF,

854. Hipòtesi de l'absurd.

també ho és a BK, que és un segment de la prolongació del pla ▱ EF. [Dxi 3]

Aleshores, l'angle $\widehat{ABK}$ és recte.

I, pel mateix [raonament], $\widehat{BAK}$ també.

De tot això en resulta que [la suma d]els [dos angles] $\widehat{ABK}$ i $\widehat{BAK}$ del triangle $\triangle ABK$ equival a dos angles rectes. [Nc 2]

I això és impossible. [Ei 17] ♠

En definitiva, els plans CD i EF no es tallen [per molt que els prolonguem].

Per tant, CD i EF són paral·lels. [Dxi 8]

I això és el que volíem demostrar. ♠[855]

Exi 15. *Si dos segments que es tallen en un punt són paral·lels [respectivament] a dos segments que es tallen en un altre punt i [les parelles de segments] no són al mateix pla, els plans que determinen [cada parella de segments] són paral·lels.*

Considerem que els [segments] concurrents AB i BC són paral·lels als [segments] concurrents DE i EF[, respectivament],

de manera que [les parelles de segments AB i BC, i CD i EF] no són al mateix pla.

Afirmo que els plans que contenen [els segments] AB i BC, i DE i EF, respectivament, no es tallen per més que els prolonguem.[856]

[*Demostració.*] Sigui BG el segment perpendicular, pel punt B,

al pla que conté [els segments] DE i EF. [Exi 11]

Suposem que talla [l'altre pla] pel punt G.

Considerem els segments GH i GK paral·lels, per G,

als [segments] ED i EF[, respectivament]. [Ei 31]

Atès que BG és perpendicular al pla on són DE i EF,

també ho és a tots els segments del pla determinat per aquests segments que passen pel seu peu. [Dxi 3]

Però cadascun [dels segments] GH i GK, que són al pla determinat pels [segments] DE i EF, hi passen.

En definitiva, els angles $\widehat{BGH}$ i $\widehat{BGK}$ són rectes.

855. Porisma: per un punt exterior a un pla, hi passa un pla paral·lel.

856. Són paral·lels.

I, atès que BA és paral·lel a GH, [Exi 9]
la [suma dels] angles $\widehat{GBA}$ i $\widehat{BGH}$ és igual a dos angles rectes, [Ei 29]
i [l'angle] $\widehat{BGH}$ és recte.

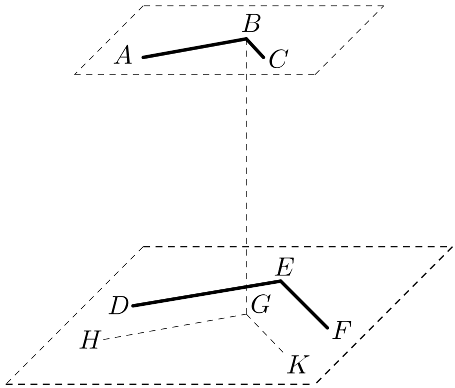


Figura Exi 15

Per tant, [l'angle] $\widehat{GBA}$ també ho és. [Nc 3]

En definitiva, [el segment] GB és perpendicular a[l segment] BA.

Pel mateix [raonament], [el segment] GB també ho és a[l segment] BC.

Però, atès que hem fet que el segment GB sigui perpendicular a dos segments concurrents BA i BC [pel punt de concurrència],
resulta que GB és perpendicular al pla que els conté. [Exi 4]

[Pel mateix raonament, BG ho és al pla que conté els segments GH i GK.

Però aquest pla que inclou també els segments GH i GK és el que conté els segments DE i EF.

Ara bé, hem vist que GB és perpendicular al pla que conté [els segments] AB i BC.]

I els plans que tenen en comú un mateix [segment] perpendicular són paral·lels. [Exi 14]

Per tant, el pla que conté [els segments] AB i BC és paral·lel al que conté [els segments] DE i EF.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exi 16. *Si un pla en talla dos de paral·lels, les dues interseccions són paral·leles.*

Siguin ▱AB i ▱CD dos plans paral·lels tallats pel pla ▱$EFGH$, i EF i GH les seccions comunes [de ▱AB i ▱$EFCH$, i de ▱CD i ▱$EFGH$, respectivament].

Afirmo que [els segments] EF i GH són paral·lels.

[*Demostració.*] Si no és així,[857] prolongats [convenientment], [Nc 2] els [segments] EF i GH es tallen en la direcció de F, H, o de E, G.

a) Suposem, doncs, que, prolongats, en la direcció de F, H, es tallen pel punt K.

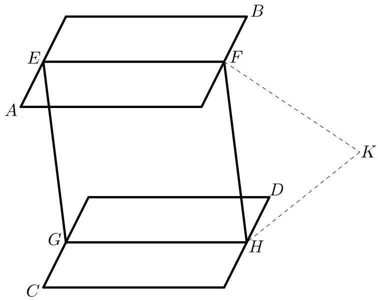


Figura Exi 16

Atès que [el segment] EFK és al pla ▱AB, tots els punts de EFK també hi són. [Exi 1]

D'això en resulta que K és al pla ▱AB.

Pel mateix [raonament], [el punt] K també és al pla ▱CD.

En conseqüència, prolongats [convenientment],
els plans ▱AB i ▱CD es tallen.

Però, realment, no es tallen ja que [d'entrada] els havíem suposat paral·lels.

Així doncs, prolongats [convenientment] en la direcció de[ls punts] F i H, els segments EF i GH no es tallen. ♠

b) De manera semblant, podem veure que, prolongats en la direcció de E, G, els segments EF i GH no es tallen. ♠

I, si els segments d'un pla són paral·lels[, prolongats convenientment], no es tallen en cap de les dues direccions.

En definitiva, EF i GH són paral·lels.

I això és el que volíem demostrar. ♠ [Di 23]

Exi 17. *Si dos segments són tallats per plans paral·lels, ho són amb la mateixa raó.*

Siguin AB i CD els dos segments que són tallats pels plans paral·lels ▱GH, ▱KL i ▱MN pels punts [respectius] A, E i B; i C F i D.

Afirmo que el segment AE és al EB com el CF al FD.

857. Hipòtesi de l'absurd.

[*Demostració.*] Unim AC, BD i AD. [P 1]

Sigui O el punt en el qual el [segment] AD talla el pla ▱ KL.[858]

Unim EO i OF. [P 1]

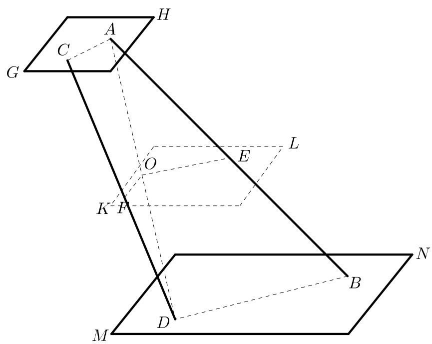


FIGURA EXI 17

Atès que el pla ▱ $EBDO$ talla els plans paral·lels ▱ KL i ▱ MN, [els segments] d'intersecció [corresponents], EO i BD, són paral·lels. [EXI 16]

Pel mateix [raonament], atès que els dos plans paral·lels ▱ GH i ▱ KL són tallats pel pla ▱ $AOFC$, resulta que [els segments] d'intersecció [corresponents] AC i OF són paral·lels. [EXI16]

I, com que el segment EO és paral·lel a un dels costats BD del triangle $\triangle ABD$,
tenim que AE és a EB com AO a OD. [EVI 2]

Novament, atès que el segment OF és paral·lel a un dels costats AC del triangle $\triangle ADC$,
AO és a OD com CF a FD. [EVI 2]

I hem vist que AO és a OD com AE a EB.

Aleshores, tenim que AE és a EB com CF a FD. [EV 11]
I això és el que volíem demostrar. ♠

EXI 18. *Si un segment és perpendicular a un pla, tots els plans* [*que hi passen*] *també ho són.*

Sigui AB un segment perpendicular a un pla.

Afirmo que tots els plans [que passen] per AB també són perpendiculars al pla de referència.

858. Aquest punt existeix ja que, altrament, AD seria paral·lel al pla ▱ KL i, de retruc, al ▱ MN.

[*Demostració.*] Considerem el pla ▱ DE que passa per AB.[859]

Sigui CE [el segment] intersecció del pla ▱ DE i el [pla] de referència. [Exi 3]

Considerem un punt arbitrari F de[l segment] CE.

Pel punt F, tirem FG perpendicular a CE,
[que és un segment] del pla ▱ DE. [Ei 11]

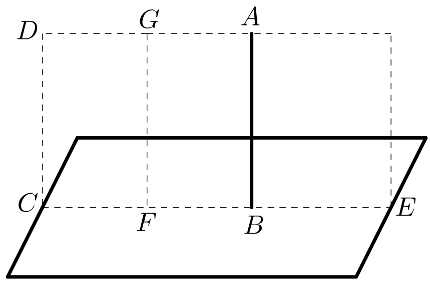


Figura Exi 18

Atès que [el segment] AB és perpendicular al pla de referència,
també ho és a tots els segments d'aquest pla que passen pel seu peu. [Dxi 3]

Per tant, AB és perpendicular a CE.

Aleshores, l'angle $\widehat{ABF}$ és recte
i[, per construcció,] l'angle $\widehat{GFB}$ també.

Així doncs, AB és paral·lel a FG[860] [Ei 28]
i AB és perpendicular al pla de referència.

De tot això en resulta que [el segment] FG també ho és. [Exi 8]

I un pla és perpendicular a un [altre] quan els segments del primer que són perpendiculars a la intersecció també ho són al segon. [Dxi 4]

I hem vist que [el segment] FG, [que hem tirat] perpendicular al segment d'intersecció del pla CE i que és en un dels plans[, en concret,] el ▱ DE, és perpendicular al [pla] de referència.

De manera semblant, podem veure que tots els plans arbitraris [que passen] pel [segment] AB són perpendiculars a aquest pla.
I això és el que volíem demostrar. ♠

Exi 19. *Si dos plans que es tallen són perpendiculars a un pla, [el segment de] la intersecció també ho és.*

Siguin ▱ AB i ▱ BC els dos plans perpendiculars al pla de referència, i BD el segment en el qual s'intersequen.

859. Suposem que, donat un segment AB, existeix un pla que el conté.
860. Òbviament, són coplanaris.

Afirmo que BD és perpendicular al pla de referència.

[*Demostració.*] Si no és així,[861] considerem [el segment] DE del pla ▱ AB perpendicular al segment AD pel punt D,
i el segment DF del pla ▱ BC perpendicular a[l segment] CD.

Atès que el pla AB és perpendicular al de referència,
i que hem tirat [el segment] DE [dins el pla ▱ AB] perpendicular al [segment] d'intersecció AD,
resulta que el [segment] DE és perpendicular al pla de referència. [Dxi 4]

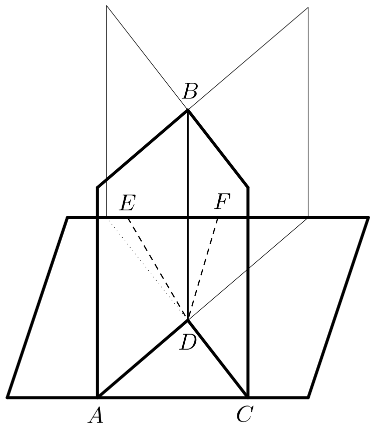


Figura Exi 19

De manera anàloga, podem veure que [el segment] DF també ho és.

Aleshores, tenim dos segments [diferents] que incideixen en el punt D i que són perpendiculars al pla de referència a la mateixa banda [d'aquest pla].
I això és impossible. [Exi 13] ♠

En definitiva, no hi ha [cap altre segment], llevat del [segment] d'intersecció DB dels plans ▱ AB i ▱ BC, que sigui perpendicular al pla de referència pel punt D.
I això és el que volíem demostrar. ♠

Exi 20. *Si un angle sòlid es compon de tres angles plans,* [*la suma de*] *cada dos* [*angles*] *és més gran que el tercer prenent-los de totes* [*les maneres possibles*].
Sigui $\hat{A}$ l'angle sòlid determinat pels tres angles plans $\widehat{BAC}, \widehat{CAD}$ i $\widehat{DAB}$.

Afirmo que cada parell d'angles $\widehat{BAC}, \widehat{CAD}$ i $\widehat{DAB}$ [junts] és més gran que l'altre angle, els prenguem com els prenguem.[862]

861. Hipòtesi de l'absurd.

862. És a dir, les tres parelles, $\widehat{BAC}, \widehat{CAD}$; $\widehat{BAC}, \widehat{DAB}$; i $\widehat{DAB}, \widehat{CAD}$, són més grans que l'altre angle $\widehat{DAB}, \widehat{CAD}$ i $\widehat{BAC}$, respectivament.

[*Demostració.*] *a*)[863] Si els angles $\widehat{BAC}, \widehat{CAD}$ i $\widehat{DAB}$ són iguals, és clar que [la suma de] dos qualssevol és més gran que l'altre.♠

b) Però si no [són iguals entre si],
sigui $\widehat{BAC}$ més gran [que $\widehat{CAD}$ o $\widehat{DAB}$].

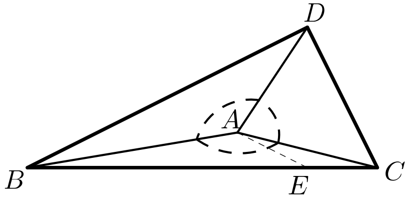


FIGURA EXI 20

Al pla de l'angle $\widehat{BAC}$ hi construïm, damunt el segment AB i [amb el vèrtex] al punt A, [l'angle] $\widehat{BAE}$ igual al $\widehat{DAB}$.[864] [EI 23][865]

Ara fem AE igual a AD, [P 3 i EI 2]
i tirem [el segment] BEC que passa per E.

Aquest segment talla [els segments] AB i AC pels punts B i C[, respectivament].

Unim DB i DC. [P 1]

I, atès que DA és igual a AE, i AB és comú,
els [segments AD i AB són] iguals als [EA i AB, respectivament],
i l'angle $\widehat{DAB}$ al $\widehat{BAE}$.

Aleshores, la base DB és igual a la BE. [EI 4]

I, com que la [suma dels segments] BD i DC és més gran que [el segment] BC, [EI 20]
i que hem tirat DB igual a BE;
el residu DC és més gran que el EC. [Nc 3]

I, atès que DA és igual a AE però que AC és comú,
i que la base DC és més gran que la EC;
tenim que l'angle $\widehat{DAC}$ ho és més que el $\widehat{EAC}$. [EI 25]

Però hem vist que [l'angle] $\widehat{DAB}$ també és igual al $\widehat{BAE}$.

Aleshores, [la suma dels angles] $\widehat{DAB}$ i $\widehat{DAC}$ és més gran que [l'angle] $\widehat{BAC}$. [Nc 4′] ♠

863. Disjunció de casos.

864. O bé a l'altre, si és el cas.

865. Fixem-nos en el fet següent: si un angle donat es troba en un pla, podem tirar un angle igual amb un costat i el vèrtex prefixats. Però què passa, si l'angle donat és en un pla i el volem reproduir en un altre? Implícitament, Euclides suposa que no hi ha cap dificultat per poder-ho fer.

c) De manera semblant, també podem veure que els altres [angles], presos de dos en dos, superen el tercer. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exi 21. *Un angle sòlid està format per angles plans que*[*, junts,*] *fan menys de quatre* [*angles*] *rectes.*[866]

Sigui $\widehat{A}$ l'angle sòlid format pels angles plans $\widehat{BAC}, \widehat{CAD}$ i $\widehat{DAB}$.[867]

Afirmo que [la suma d'aquests angles] és més petita que quatre [angles] rectes.

[*Demostració.*] Considerem els punts [arbitraris] B, C i D dels [segments] AB, AC i AD[, respectivament].

Unim BC, CD i DB. [P 1]

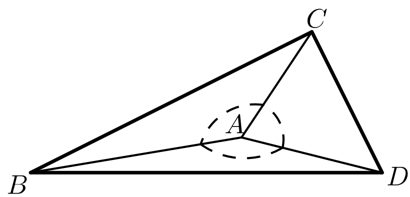


Figura Exi 21

Atès que l'angle sòlid [amb el vèrtex] a[l punt] B està format pels tres angles plans $\widehat{CBA}$, $\widehat{ABD}$ i $\widehat{CBD}$,

[i que la suma de] cada dos [angles] és més gran que el tercer, [Exi 20][868]

resulta que [la suma dels angles] $\widehat{CBA}$ i $\widehat{ABD}$ ho és més que [l'angle] $\widehat{CBD}$.

Pel mateix [raonament], [la suma de cada parella d'angles], $\widehat{BCA}$, $\widehat{ACD}$ i $\widehat{CDA}$, $\widehat{ADB}$, és més gran que [l'angle] $\widehat{BCD}$ i $\widehat{CDB}$[, respectivament].

Aleshores, la [suma] dels sis angles $\widehat{CBA}, \widehat{ABD}, \widehat{BCA}, \widehat{ACD}, \widehat{CDA}$ i $\widehat{ADB}$ és més gran que la dels tres [angles] $\widehat{CBD}, \widehat{BCD}$ i $\widehat{CDB}$.

Però aquesta darrera és igual a dos [angles] rectes. [Ei 32]

866. Euclides solament ho estableix quan l'angle sòlid està determinat per tres angles plans. Tanmateix, la generalització al cas en el qual està format per més de tres és senzilla. Considerant aquest text com si fos d'aprenentatge, podem pensar que Euclides la deixa d'exercici per als deixebles més eixerits? Vegeu Heath (1925), volum iii, p. 310.

867. Vegeu la nota anterior.

868. Aquí usa el fet que l'angle sòlid està format per tres angles plans. Què passa, si ho està per més de tres?

Aleshores, la [suma] dels sis angles $\widehat{CBA}, \widehat{ABD}, \widehat{BCA}, \widehat{ACD}, \widehat{CDA}$ i $\widehat{ADB}$ és més gran que dos [angles] rectes.

I, atès que la [suma] dels tres angles de cadascun dels triangles $\triangle ABC, \triangle ACD$ i $\triangle ADB$ és igual a dos [angles] rectes,
resulta que la [suma] dels nou angles $\widehat{CBA}, \widehat{ACB}, \widehat{BAC}, \widehat{ACD}, \widehat{CDA}, \widehat{CAD}, \widehat{ADB}$, $\widehat{DBA}$ i $\widehat{BAD}$ dels tres triangles és igual a sis [angles] rectes.

D'això en resulta que la [suma] dels sis angles $\widehat{ABC}, \widehat{BCA}, \widehat{ACD}$, $\widehat{CDA}$, $\widehat{ADB}$ i $\widehat{DBA}$ és més gran que dos [angles] rectes.

Per tant, la [suma] dels tres [angles] restants, $\widehat{BAC}, \widehat{CAD}$ i $\widehat{DAB}$, que contenen l'angle sòlid, és més petita que quatre [angles] rectes.

[Nc 4′, porisma]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exi 22. *Considerem tres angles plans de costats iguals de manera que* [*la suma de cada*] *parella d'angles és més gran que el tercer. És possible construir un triangle de costats els segments que obtenim quan unim els extrems* [*dels angles donats*].

Siguin $\widehat{ABC}$, $\widehat{DEF}$ i $\widehat{GHK}$ tres angles plans de manera que la suma de cada parella d'angles[, preses de totes les maneres possibles,] és més gran que el tercer.

És a dir, la suma de $\widehat{ABC}$ i $\widehat{DEF}$ [és més gran] que $\widehat{GHK}$; la de $\widehat{DEF}$ i $\widehat{GHK}$ que $\widehat{ABC}$, i la de $\widehat{GHK}$ i $\widehat{ABC}$ que $\widehat{DEF}$.

I AB, BC, DE, EF, GH i HK són [sis] segments iguals.

Considerem [els segments] AC, DF i GK que obtenim quan unim [els extrems de les parelles anteriors].

Afirmo que és possible construir un triangle amb [tres segments] iguals a[ls segments] AC, DF i GK.

És a dir, afirmo que [la suma de cada] dos [segments] AC, DF i GK és més gran que el tercer.

[*Demostració.*][869] *a*) Si els angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{DEF}$ i $\widehat{GHK}$ són iguals,
[és clar] que podem fer un triangle de costats AC, DF i GK,
ja que els [segments] AC, DF i GK també ho són.[870] ♠

869. Disjunció de casos.

870. Aquí Euclides no ens diu que aplica tres vegades Ei 4 i després Ei 1.

b) Si no [són iguals], són diferents.

Considerem [l'angle] $\widehat{KHL}$ igual a l'angle $\widehat{ABC}$, construït sobre el segment HK amb el vèrtex a[l punt] H. [EI 23]

Fem HL igual a un dels [sis] segments [iguals] AB, BC, DE, EF, GH i HK. [P3 i EI 2]

Unim KL i GL. [P 1]

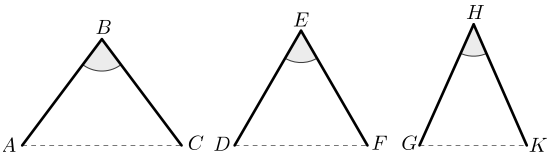


FIGURA EXI 22*a*

Atès que els dos costats AB i BC són iguals als dos [costats] KH i HL, i que l'angle a[l vèrtex] B és igual a [l'angle] $\widehat{KHL}$, resulta que la base AC ho és a la KL. [EI 4]

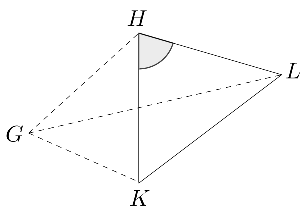


FIGURA EXI 22*b*

Atès que [la suma dels angles] $\widehat{ABC}$ i $\widehat{GHK}$ és més gran que [l'angle] $\widehat{DEF}$, i que [l'angle] $\widehat{ABC}$ és igual al $\widehat{KHL}$, tenim que [l'angle] $\widehat{GHL}$ és més gran que el $\widehat{DEF}$. [Nc 4′]

Però els [segments] GH i HL són iguals als [segments] DE i EF[, respectivament], i l'angle $\widehat{GHL}$ és més gran que el $\widehat{DEF}$.

Per tant, la base GL és més gran que la DF. [EI 24]

Però [la suma dels [segments] GK i KL ho és que GL. [EI 20]

Per tant, [la suma de] GK i KL també ho és que DF, [per transitivitat] i KL és igual a AC.

En definitiva, [la suma de] AC i GK és més gran que l'altre [segment] DF. [per substitució i transitivitat de la desigualtat]

De manera semblant, podem veure que [la suma de] AC i DF és més gran que GK, i que [la de] DF i GK ho és més que AC. ♠

En conseqüència, és possible construir un triangle amb [tres] costats iguals a[ls segments] AC, DF i GK.

I això és el que volíem demostrar. ♠[871]

EXI 23. *Volem construir un angle sòlid amb tres angles plans donats de manera que dos qualssevol [junts] superin el tercer. Aquests tres sumen menys de quatre [angles] rectes [necessàriament].*[872]

Siguin $\widehat{ABC}, \widehat{DEF}$ i $\widehat{GHK}$ els tres angles plans donats.

I sigui [la suma de cada] dos d'ells més gran que el tercer, tenint en compte totes les parelles [d'angles possibles],

i amb la suma dels tres més petita que quatre [angles] rectes.[873]

Aleshores, volem construir un angle sòlid format per [angles plans] iguals a $\widehat{ABC}, \widehat{DEF}$ i $\widehat{GHK}$.

[*Demostració.*] Siguin AB, BC, DE, EF, GH i HK [sis segments] iguals. [P 2 i EI 2]

Unim AC, DF i GK. [P 1]

I construïm un triangle amb [els costats] iguals a AC, DF i GK. [EXI 22]

Considerem el triangle $\triangle LMN$ bastit de manera que LM, MN i NL són iguals a AC, DF i GK[, respectivament],

i que el cercle $\circ LMN$ circumscriu el triangle $\triangle LMN$. [EIV 5]

Unim el centre O [amb els vèrtexs].

Obtenim [els segments] LO, MO i NO. [EIV 1 i P 1]

a) Afirmo que AB és més gran que LO.

871. Si ens fixem en la demostració d'aquest teorema, veiem que, des del punt de vista metodològic, s'hauria d'haver establert al llibre I. Ara bé, si considerem el text euclidià com un escrit d'aprenentatge en el qual, a vegades, els «elements» es donen quan es necessiten, s'entén que aquest «element» s'estableixi ara perquè, essent com és instrumental, és ara que té sentit.

872. Aquesta construcció —aquest problema— és un element necessari en tots els teoremes sobre la igualtat, la semblança i l'equivalència de poliedres.

873. És una condició *sine qua non*. És a dir, és el diorisma que imposa la proposició EXI 21.

[*Demostració.*] En cas contrari,[874]
tenim [una de les dues possibilitats:][875]

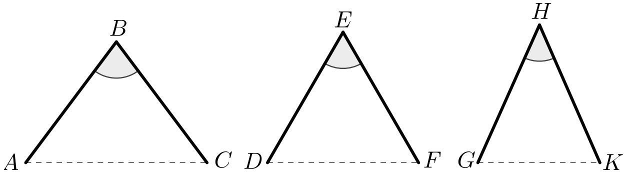


Figura Exi 23a

a_1) AB és igual a LO.

a_2) AB és més petit que LO.

a_1) En primer lloc, suposem que són iguals.

Atès que AB és igual a LO, AB a BC, i OL a OM; [Di15]
els [segments] AB i BC són iguals als [segments] LO i OM[, respectivament]. [Nc 1]

Però hem suposat que les bases AC i LM són iguals.

Per tant, els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{LOM}$ també ho són. [Ei 8]

Pel mateix raonament, ho són [els angles] $\widehat{DEF}$ i $\widehat{MON}$, i $\widehat{GHK}$ i $\widehat{NOL}$.

En conseqüència, el tres angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{DEF}$ i $\widehat{GHK}$ són iguals als tres angles $\widehat{LOM}$, $\widehat{MON}$ i $\widehat{NOL}$[, respectivament].

Però la [suma] d'aquests tres angles val quatre [angles] rectes.

En conseqüència, la [suma] dels angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{DEF}$ i $\widehat{GHK}$ també ho val. [Nc 2 i 1]

Però hem suposat que [aquesta suma] és més petita que quatre [angles] rectes. I això és impossible. ♠

a_2) Per tant, AB no és igual a LO.

Afirmo que AB és més petit que LO.

Si ho és,[876]
considerem [el segment] OP igual al AB, i el OQ al BC. [P 3 i Ei 2]

Unim PQ. [P 1]

Atès que AB és igual a BC, OP també ho és a OQ.

Per tant, els residus LP i QM són iguals. [Nc 3]

---

874. Hipòtesi de l'absurd.
875. Disjunció de casos.
876. Hipòtesi de l'absurd.

En conseqüència, LM és [un segment] paral·lel al [segment] PQ, [EVI 2]
i els [triangles] $\triangle LMO$ i $\triangle PQO$ són equiangulars. [EI 29]

Aleshores, OL és a LM com OP a PQ. [EVI 4]

Alternando, LO és a OP com LM a PQ. [EV 16]

Però LO és més gran que OP.

Per tant, LM també ho és que PQ. [EV 14]

Però hem fet LM igual a AC.

En conseqüència, AC també és més gran que PQ. [per substitució]

Aleshores, atès que els [segments] AB i BC són iguals als [segments] PO i OQ[, respectivament],
i que la base AC és més gran que la PQ,
resulta que l'angle $\widehat{ABC}$ és més gran que el $\widehat{POQ}$. [EI 25]

Pel mateix raonament, podem veure que [l'angle] $\widehat{DEF}$ també ho és que el $\widehat{MON}$,
i [l'angle] $\widehat{GHK}$ que el $\widehat{NOL}$.

Per tant, la [suma] dels tres angles $\widehat{ABC}, \widehat{DEF}$ i $\widehat{GHK}$ és més gran que la [dels] tres angles $\widehat{LOM}, \widehat{MON}$ i $\widehat{NOL}$.

Però, per hipòtesi, [la suma dels angles] $\widehat{ABC}, \widehat{DEF}$ i $\widehat{GHK}$ també és més petita que quatre [angles] rectes.

Aleshores, [la suma dels angles] $\widehat{LOM}, \widehat{MON}$ i $\widehat{NOL}$, també.

Però també és igual [a quatre angles rectes]. I això és impossible.

♠

Aleshores, AB no és més petit que LO i[, com hem vist,] tampoc no és igual.

Per tant, AB és més gran que LO. ♠

b) [*Construcció.*] Sigui OR [el segment] perpendicular al pla del cercle $\bigcirc LMN$ pel punt O. [EXI 12]

Considerem el quadrat de costat OR equivalent a [l'àrea] que és l'excés del quadrat de costat AB sobre el de costat LO. [EXI 23, lema]

Unim RL, RM i RN. [P 1] ♣

[*Demostració.*] Atès que RO és perpendicular al pla del cercle $\bigcirc LMN$, RO també ho és a cadascun [dels radis] LO, MO i NO.

I, com que LO és igual a OM,
i OR comú i perpendicular,
resulta que la base RL és igual a la RM. [Ei 4]

Pel mateix [raonament], RN també és igual a cadascun [dels segments] RL i RM.

Per tant, tots tres [segments] són iguals. [Nc 1, iterat]

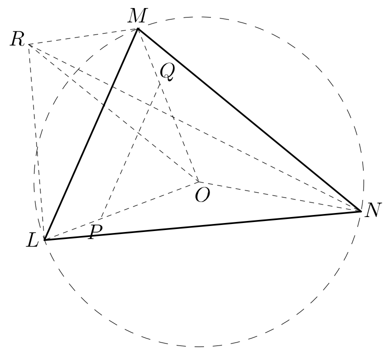


Figura Exi 23b

A més, atès que[, per hipòtesi,] el quadrat de costat OR és equivalent a l'excés [de l'àrea] del quadrat de [costat] AB sobre la del quadrat de [costat] LO,
resulta que el de costat AB és igual a la [suma dels quadrats] de costats LO i OR, [Nc 2]
i el quadrat de [costat] LR és igual a la [suma dels quadrats] de costats LO i OR.

Per tant, [l'angle] $\widehat{LOR}$ és recte. [Ei 47]

Aleshores, el [quadrat] de costat AB és igual al de costat RL.

I AB ho és a RL.[877]

Però cada un dels [segments] BC, DE, EF, GH i HK és igual a AB, i cadascun dels [segments] RM i RN a RL.

Aleshores, cadascun dels [segments] AB, BC, DE, EF, GH i HK és igual a cadascun dels [segments] RL, RM i RN. [Nc 1, iterat]

I, atès que els [segments] LR i RM són iguals als [segments] AB i BC[, respectivament],
i que hem suposat que les bases LM i AC són iguals,
resulta que els angles $\widehat{LRM}$ i $\widehat{ABC}$ també ho són. [Ei 8]

Pel mateix [raonament], [els angles] $\widehat{MRN}$ i $\widehat{LRN}$ [ho són] a[ls] $\widehat{DEF}$ i $\widehat{GHK}$.

En definitiva, hem construït l'angle sòlid [amb vèrtex al punt] R format pels angles $\widehat{LRM}, \widehat{MRN}$ i $\widehat{LRN}$, que són iguals als tres [angles plans] $\widehat{ABC}, \widehat{DEF}$ i $\widehat{GHK}$[, respectivament]. ♠

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

877. Pla (2018), problema 52 *f*, p. 67.

[Exi 23, lema.] *Volem construir el quadrat [de costat] OR igual a [l'àrea] que correspon a l'excés del quadrat de costat AB sobre el de costat LO.*[878]

[*Construcció.*] Considerem els segments AB i LO, sent AB el més gran.[879]

Tirem la semicircumferència ⌓ABC de diàmetre AB, i la corda AC igual al segment LO, que no supera el diàmetre AB. [Eiv 1]

Unim CB. [P 1] ♣

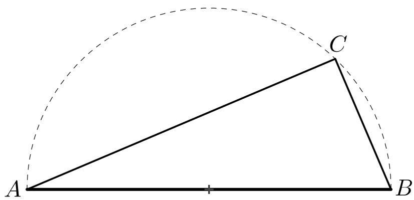


Figura Exi 23, lema

Com que l'angle $\widehat{ACB}$ està inscrit en el semicercle ⌓ABC, és recte. [Eiii 31]

Aleshores, el [quadrat] de costat AB és igual a [la suma d]els quadrats de costats AC i CB. [Ei 47]

Per tant, l'excés del quadrat de [costat] AB sobre el de [costat] AC és el quadrat de [costat] BC.

Però AC és igual a LO.

Així doncs, el [quadrat] de costat AB excedeix el de costat LO el de costat CB.

En definitiva, si prenem OR igual a BC, l'excés del [quadrat] de costat AB sobre el de [costat] LO és el de [costat] OR.

I això és el que volíem fer i demostrar. ♠

Exi 24. *Si una [figura] sòlida està limitada per [sis] plans [dos a dos] paral·lels, els plans oposats són paral·lelograms iguals.*[880]

Considerem la [figura] sòlida ▱$CDHG$, limitada per [les parelles d]els plans paral·lels AC, GF; AH, DF; i BF, AE.[881]

Afirmo que els plans oposats són paral·lelograms iguals.

---

878. És a dir, aquest quadrat existeix.

879. És el diorisma que imposa Eiii 15.

880. El terme *sis* afegit, que Euclides omet, és essencial, ja que si se suprimeix l'enunciat esdevé defectuós.

881. En aquesta presentació de l'enunciat, limita el nombre de plans a sis. Podem pensar, doncs, que sobreentén que són sis.

[*Demostració.*] *a*) Atès que el pla ⏥AC talla els dos plans paral·lels ⏥BG i ⏥CE, les [dues] seccions [que determina] són paral·leles. [Exi 16]

Per tant, [els segments] AB i CD són paral·lels.

De bell nou, atès que el pla ⏥AC talla els dos plans paral·lels ⏥BF i ⏥AE,
les dues seccions [que determina] són paral·leles. [Exi 16]

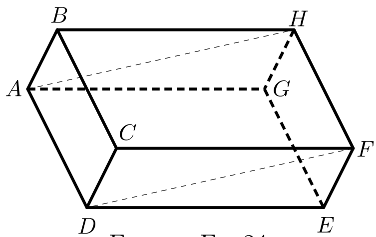


Figura Exi 24

Per tant, [els segments] BC i AD són paral·lels.

Però hem vist que [els segments] AB i DC també ho són.

Per tant, ▱AC és un paral·lelogram.[882]

Pel mateix raonament, podem veure que [les figures planes] ▱DF, ▱FG, ▱GB, ▱BF i ▱AE són paral·lelograms. ♠

b) Unim AH i DF. [P 1]

Com que AB i CD, i BH i CF són [segments] paral·lels,
resulta que els [segments] AB i BH, que s'intersequen, són paral·lels als DC i CF,
que s'intersequen i que no es troben al mateix pla.[883]

Aleshores, aquestes parelles [de segments que s'intersequen] determinen angles iguals. [Exi 10]

Per tant, els angles $\widehat{ABH}$ i $\widehat{DCF}$ són iguals.

I, atès que els [segments] AB i BH són iguals als DC i CF, [Ei 34]
i els angles $\widehat{ABH}$ i $\widehat{DCF}$ són iguals,
resulta que les bases AH i DF,
i que els triangles $\triangle ABH$ i $\triangle DCF$ també ho són. [Ei 4]

Però els paral·lelograms ▱BG i ▱CE equivalen al doble [dels triangles] $\triangle ABH$ i $\triangle DCF$[, respectivament]. [Ei 34]

Per tant, els paral·lelograms ▱BG i ▱CE són equivalents. [Nc 5′ i 1]

---

882. Euclides no defineix *paral·lelogram* si bé, en l'ús que en fa, queda ben clar que és un quadrilàter que té els costats oposats paral·lels.

883. És conseqüència de la construcció que ha fet.

Pel mateix raonament, [els paral·lelograms] ▱AC i ▱GF, i ▱AE i ▱BF són equivalents. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exi 25. *Si tallem un paral·lelepípede sòlid*[884] *amb un pla paral·lel a [dos costats] oposats,*[885] *la raó de les bases és la mateixa que hi ha entre els sòlids.*[886]

Suposem que tallem el paral·lelepípede sòlid ⧉$ABCD$ amb el pla ⏥FG paral·lel als plans oposats ⏥RA i ⏥DH.

Afirmo que la base ▱$AEFV$ és a la ▱$EHCF$ com el sòlid ⧉$ABFU$ al ⧉$EGCD$.

[*Demostració.*] Prolonguem AH en cada direcció [del segment].

Siguin AK i KL un nombre arbitrari [de segments] iguals a AE, i HM i MN un nombre arbitrari [de segments] iguals a EH.

Considerem els paral·lelograms ▱LP, ▱KV, ▱HW i ▱MS, i els sòlids ⧉LQ, ⧉KR, ⧉DM i ⧉MT.[887]

Atès que els segments LK, KA i AE són iguals,
els paral·lelograms ▱LP, ▱KV i ▱AF també ho són,
[els] ▱KO, ▱KB i ▱AG també,
i [els] ▱LX, ▱KQ i ▱AR també. [Evi 1]

Però són oposats. [Exi 24]

Pel mateix [raonament],
els paral·lelograms ▱EC, ▱HW i ▱MS també són iguals,
[els paral·lelograms] ▱HG, ▱HI i ▱IN també,
i [els paral·lelograms] ▱DH, ▱MY i ▱NT també.

Per tant, els tres plans d'un dels sòlids ⧉LQ, ⧉KR i ⧉AU són iguals als tres [dels altres sòlids que els corresponen].

---

884. Euclides usa l'expressió στερεὸν παραλληλεπίπεδον —'sòlid paral·lelepipèdic'— que traduïm simplement com a «paral·lelepípede». Tanmateix, com hem vist a Ei 34 amb el paral·lelogram, no la defineix prèviament.

885. L'ambigüitat de l'enunciat, tal com l'expressa Euclides, queda aclarida en la demostració.

886. Novament ens trobem amb una igualtat de raons entre magnituds de classes, dues a dues, diferents.

887. Completem les figures del pla i de l'espai [P 5].

Però els tres plans [d'un dels sòlids] són iguals als tres plans oposats. [Exi 24]

Per tant, els tres sòlids ⬚ LQ, ⬚ KR i ⬚ AU són equivalents. [Dxi 10]

Pel mateix [raonament],
els tres sòlids ⬚ ED, ⬚ DM i ⬚ MT també ho són.

Aleshores, la base ▱ LF té tants múltiples de la ▱ AF com el sòlid ⬚ LU del ⬚ AU.

Pel mateix [raonament],
la base ▱ NF és tants múltiples de la ▱ FH com el sòlid ⬚ NU del ⬚ HU.

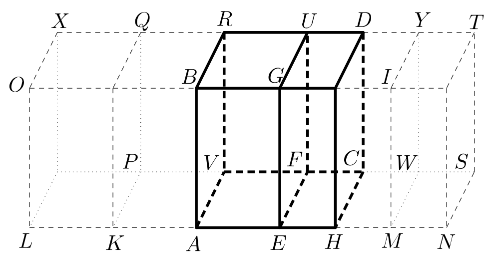


Figura Exi 25

I, si la base ▱ LF és més gran, igual o més petita que la ▱ NF, aleshores el sòlid ⬚ LU també és més gran, igual o més petit que el ⬚ NU.[888]

Per tant, hi ha quatre magnituds: les dues bases ▱ AF i ▱ FH, i els dos sòlids ⬚ AU i ⬚ UH.

I hem pres la mateixa quantitat de múltiples de la base ▱ AF i del sòlid ⬚ AU, és a dir, la base ▱ LF i el sòlid ⬚ LU;
i de la base ▱ HF i del sòlid ⬚ HU, és a dir, la base ▱ NF i el sòlid ⬚ NU.

I hem vist que, si la base ▱ LF és més gran, igual o més petita que la ▱ FN,
aleshores el sòlid ⬚ LU és més gran, igual o més petit que el ⬚ NU[, respectivament].

En conseqüència, la base ▱ AF és a la base ▱ FH com el sòlid ⬚ AU al sòlid ⬚ UH. [Dv 5]

I això és el que volíem demostrar. ♠

888. Aquí Euclides usa el fet següent: ▱ $LF \lesseqgtr$ ▱ NF implica ⬚ $LU \lesseqgtr$ ⬚ NU. Aquesta demostració, per inclusió, és tan senzilla com la que vam fer en el cas dels paral·lelograms a Pla (2018), p. 302-303.

Exi 26. *Volem construir un angle sòlid igual a un altre de donat sobre un segment donat i [amb el vèrtex] en un punt donat d'aquest segment.*

Siguin AB el segment donat,
A el punt donat del segment
i $\hat{D}$ l'angle sòlid donat format pels angles plans $\widehat{EDC}, \widehat{EDF}$ i $\widehat{FDC}$.

Volem construir un angle sòlid igual a l'angle sòlid $\hat{D}$ sobre el segment AB i amb el vèrtex al punt A [del segment AB].

[*Construcció.*] Sigui F un punt arbitrari del segment DF.

Pel punt F, tirem la perpendicular FG al pla que passa per ED i DC. [Exi 11]

Sigui G el punt en el qual talla el pla.

Unim DG. [P 1]

Siguin $\widehat{BAL}$ i $\widehat{BAK}$ [els angles] iguals a[ls] $\widehat{EDC}$ i $\widehat{EDG}$, construïts sobre el segment AB amb [el vèrtex] al punt A [del segment AB]. [Ei 23]

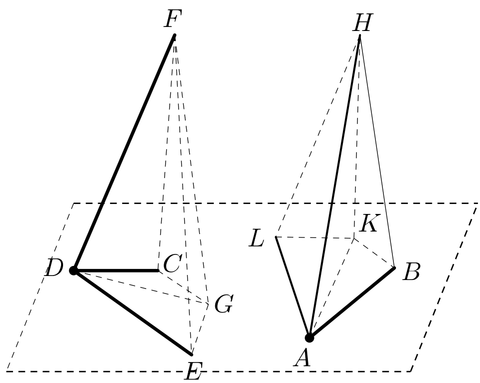


Figura Exi 26

Fem [el segment] AK igual al DG. [P3 i Ei 2]

Ara, pel punt K, tirem la perpendicular KH al pla que passa per [l'angle] $\widehat{BAL}$. [Exi 12]

Fem KH igual a GF.

I unim HA. [P1, 3 i Ei 2] ♣

Afirmo que l'angle sòlid [amb el vèrtex] al punt A, format pels angles plans $\widehat{BAL}, \widehat{BAH}$ i $\widehat{HAL}$, és igual a l'angle sòlid [amb el vèrtex] al punt D, format pels angles plans $\widehat{EDC}, \widehat{EDF}$ i $\widehat{FDC}$.

[*Demostració.*] Agafem AB i DE iguals, [P3 i Ei 2]
i unim [els segments] HB, KB, FE i GE. [P 1]

Atès que [el segment] FG és perpendicular al pla de referència [EDC],
també ho és a tots els segments d'aquest pla que passen pel seu peu. [DXI 3]

Aleshores, els angles $\widehat{FGD}$ i $\widehat{FGE}$ són rectes.

Pel mateix [raonament], els angles $\widehat{HKA}$ i $\widehat{HKB}$ també ho són.

I, atès que els [segments] KA i AB són iguals als GD i DE[, respectivament], i que contenen angles iguals,
resulta que les bases KB i GE són iguals. [EI 4]

I [els segments] KH i GF també ho són
i formen [angles] rectes [amb les bases respectives].

Aleshores, HB i FE també són iguals. [EI 4]

De bell nou, atès que els [segments] AK i KH són iguals als DG i GF[, respectivament], i formen [angles] rectes,
resulta que les bases AH i FD són iguals. [EI 4]

I, per tant, AB també ho és a DE.

Així doncs, els [segments] HA i AB són iguals als DF i DE[, respectivament],
i les bases HB i FE també.

Aleshores, els angles $\widehat{BAH}$ i $\widehat{EDF}$ també ho són. [EI 8]

Pel mateix [raonament], els [angles] $\widehat{HAL}, \widehat{BAL}$ també són iguals als [angles] $\widehat{FDC}, \widehat{EDC}$[, respectivament]. ♠

En definitiva, hem construït [un angle sòlid] igual a l'angle sòlid donat $\hat{D}$ sobre el segment AB amb el [vèrtex] al punt donat A [del segment AB].
I això és el que volíem demostrar. ♠

EXI 27. *Damunt d'un segment donat i col·locat de manera anàloga, volem construir-hi un paral·lelepípede sòlid semblant a un altre de donat.*

Siguin AB i CD el segment i el paral·lelepípede donats.

Sobre el segment donat AB i col·locat de manera anàloga, volem descriure-hi[889] un paral·lelepípede semblant al donat CD.

889. En el sentit de «construir-hi».

[*Construcció.*] [Per aconseguir-ho], sobre el segment AB amb vèrtex al punt A del segment [AB], construïm [l'angle sòlid] format pels [tres angles plans] $\widehat{BAH}, \widehat{HAK}$ i $\widehat{KAB}$ que és igual a l'angle sòlid amb [el vèrtex al punt] C, [Exi 26]

de manera que els angles $\widehat{BAH}, \widehat{BAK}$ i $\widehat{KAH}$ són iguals als angles $\widehat{ECF}$, $\widehat{ECG}$ i $\widehat{GCF}$[, respectivament].

Aleshores, EC és a CG com BA a AK,
i GC a CF com KA a AH. [Evi12]

I, *ex æquali*, EC és a CF com BA a AH. [Ev 22]

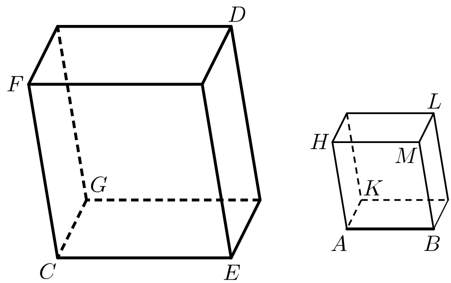


Figura Exi 27

Completem el paral·lelogram ▱ HB i el sòlid ⬚ AL.[890] ♣

[*Demostració.*] Atès que EC és a CG com BA a AK,
i que els costats dels angles iguals $\widehat{ECG}$ i $\widehat{BAK}$ són proporcionals,
resulta que els paral·lelograms ▱ GE i ▱ KB són semblants. [Evi 1]

Pel mateix [raonament], els paral·lelograms ▱ KH i ▱ FE ho són als ▱ GF i ▱ HB[, respectivament].

Aleshores, els tres paral·lelograms del sòlid ⬚ CD són semblants als tres del sòlid ⬚ AL.

Però els tres [primers] són iguals i semblants als seus tres oposats, i els tres [de l'altre] als seus tres oposats.

Per tant, el sòlid ⬚ CD és semblant al ⬚ AL. [Dxi 9]

Així doncs, sobre el segment AB,
hem construït [el paral·lelepípede] ⬚ AL, que és semblant al ⬚ CD i està col·locat de la mateixa manera.

I això és el que volíem demostrar. ♠

890. Cal tirar segments paral·lels en plans ben determinats. I això és possible per Ei 31.

Exi 28. *Un pla que passa per les diagonals*[891] *d'un paral·lelepípede el divideix en dues parts iguals.*

Suposem que el pla ⏥ $CDEF$, que passa per les diagonals CF i DE dels plans oposats, talla el paral·lelepípede ⬭ AB.[892]

Afirmo que ho fa per la meitat.

Atès que els triangles $\triangle CGF$ i $\triangle CFB$ són iguals,
que [també] ho són [els triangles] $\triangle ADE$ i $\triangle DEH$, [Ei 34]
i que els paral·lelograms ▱ CA i ▱ GE són respectivament iguals als ▱ EB i ▱ CH
ja que s'oposen [l'un a l'altre]; [Exi 24]
resulta que el prisma format pels dos triangles $\triangle CGF$ i $\triangle ADE$,
i el tres paral·lelograms ▱ GE, ▱ AC i ▱ CE,
també és igual al prisma format pels dos triangles $\triangle CFB$ i $\triangle DEH$,
i els tres paral·lelograms ▱ CH, ▱ BE i ▱ CE.

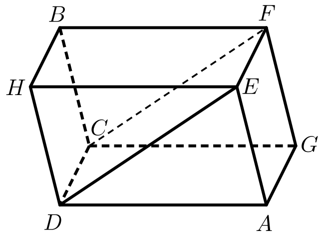


Figura Exi 28

Aleshores, [tots dos paral·lelepípedes] estan formats per la mateixa quantitat de plans de la mateixa magnitud [dos a dos].

Per tant, són iguals.[893] [Exi 10]

En conseqüència, el pla ⏥ $CDEF$ talla el sòlid ⬭ AB per la meitat.

I això és el que volíem demostrar. ♠[894]

891. Diu: διαγωνδους.

892. Aquí, de manera implícita, Euclides suposa que les dues diagonals es troben en un mateix pla. És fàcil demostrar-ho. Vegeu el problema 32 (pàgina 78).

893. Euclides afirma: «Si dos prismes tenen cares iguals i semblants, són iguals.» Però cal anar amb compte. No són superposables, com ho eren fins ara, encara que siguin equivalents. De fet, són prismes simètrics perquè les seves cares no estan col·locades de manera anàloga. Aquest fet va ser observat per Legendre. Vegeu Heath (1925), volum iii, p. 331-333.

894. És la rèplica d'Ei 35 a l'espai.

Exi 29. *Els paral·lelepípedes amb bases i altures iguals i amb [els extrems superiors] de les arestes al mateix segment són equivalents.*[895]
Siguin ◫CM i ◫CN [dos] paral·lelepípedes sobre la mateixa base AB,
[de la] mateixa altura,
i amb els [extrems de les arestes] $AG, AF, LM, LN, CD, CE, BH$ i BK als mateixos segments FN i DK.

Afirmo que el sòlid ◫CM equival al ◫CN.

Atès que ▱CH i ▱CK són paral·lelograms,
[el segment] CB és igual a cadascun dels [segments] DH i EK. [Ei 34]

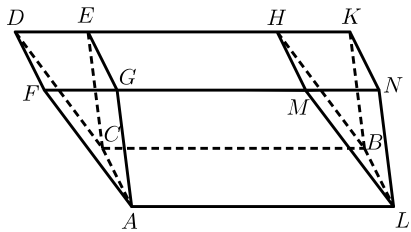


Figura Exi 29

Per tant, [els segments] DH i EK són iguals. [Nc 1]

Sostraiem de cada un el segment EH. [Ei 3]

D'això en resulta que els residus DE i HK són iguals. [Nc 3]

Per tant, els triangles $\triangle DCE$ i $\triangle HBK$ també ho són. [Ei 4 i 8]

I els paral·lelograms ▱DG i ▱HN també. [Ei 36]

Pel mateix raonament, els triangles $\triangle AFG$ i $\triangle MLN$ són iguals,
i els paral·lelograms ▱CF i ▱CG ho són als paral·lelograms ▱BM i ▱BN[, respectivament,] [Exi 24]
ja que són oposats.

Aleshores, el prisma format pels dos triangles $\triangle AFG$ i $\triangle DCE$
i els tres paral·lelograms ▱AD, ▱DG i ▱CG és equivalent[896]
al prisma format pels triangles $\triangle MLN$ i $\triangle HBK$
i els tres paral·lelograms ▱BM, ▱HN i ▱BN.

Afegim, a cadascun [dels prismes], el sòlid de base el paral·lelogram ▱AB i de [cara] oposada ▱$GEHM$.

---

895. Euclides diu αἱ ἐφεστῶσαι, que textualment significa 'les rectes que hem aixecat'. Tanmateix, cal entendre-ho com «els extrems de les arestes laterals». És la rèplica d'Ei 35 a l'espai.

896. De fet, en aquest cas, són iguals, superposables.

Per tant, els paral·lelepípedes CM i CN són iguals. [Nc 2]
I això és el que volíem demostrar. ♠

Exi 30. *Els paral·lelepípedes sòlids que tenen la mateixa base, la mateixa altura i els extrems de les arestes en segments diferents són equivalents.*[897]

Siguin CM i CN paral·lelepípedes sòlids
amb la mateixa base AB i la mateixa altura,
i amb els [extrems de les arestes] AF i AG, LM i LN, CD i CE, i BH i BK sobre segments [rectilinis] diferents.

Afirmo que els sòlids CM i CN són equivalents.

Prolonguem NK i DH. [P 2]

Sigui R el punt on es tallen. [P 5]

Fem les prolongacions dels [segments] FM i GE fins als punts P i Q[, respectivament]. [P 2]

[*Demostració*.] Unim AO, LP, CQ i BR. [P 1]

Aleshores, el sòlid CM de base el paral·lelogram ▱ $ACBL$ i [cara] oposada el paral·lelogram ▱ $FDHM$ equival al sòlid CP de base el paral·lelogram ▱ $ACBL$ i [cara] oposada el ▱ $OQRP$,
ja que tots dos tenen la mateixa base ▱ $ACBL$ i la mateixa altura,
i els [extrems de les arestes] $AF, AO, LM, LP, CD, CQ, BH$ i BR, sobre els mateixos segments FP i DR. [Exi 29]

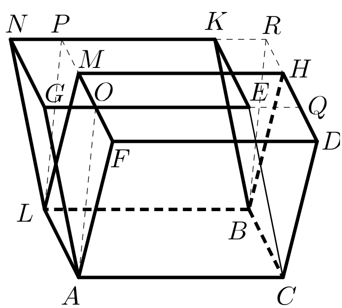


Figura Exi 30

Ara bé, el sòlid CP de base el paral·lelogram ▱ $ACBL$ i [cara] oposada el paral·lelogram ▱ $OQRP$ equival al sòlid CN de base el paral·lelogram ▱ $ACBL$ i [cara] oposada el paral·lelogram ▱ $GEKN$,
ja que tots dos tenen la mateixa base, ▱ $ACBL$, i la mateixa altura,
i els [extrems de les arestes] $AG, AO, CE, CQ, LN, LP, BK$ i BR, sobre els mateixos segments GQ i NR. [Exi 29]

897. És la rèplica d'Ei 35 a l'espai, però la situació és més complexa.

Per tant, el sòlid ⬚CM equival al ⬚CN. [Nc 1]
I això és el que volíem demostrar. ♠

Exi 31. *Els paral·lelepípedes que tenen bases iguals i la mateixa altura són equivalents.*[898]
Siguin ⬚AE i ⬚CF els paral·lelepípedes
que tenen les bases ▱AB i ▱CD equivalents,[899] i la mateixa altura.

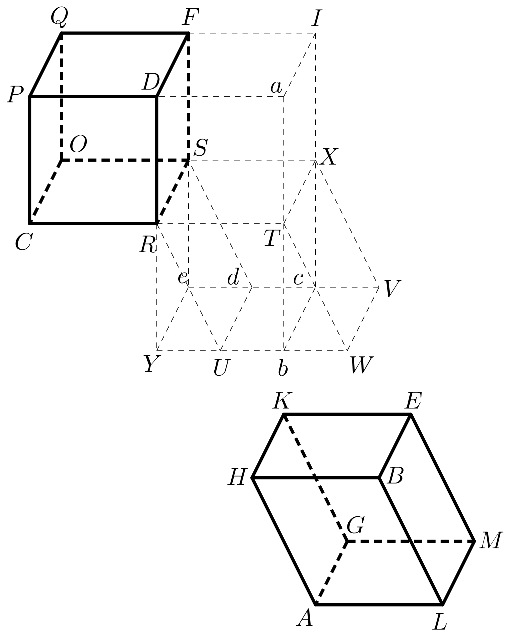


Figura Exi 31*a*

Afirmo que els sòlids ⬚AE i ⬚CF són equivalents.
[*Construcció.*] *a*) En primer lloc, suposem que els [segments] HK, BE, AG, LM, PQ, DF, CO i RS són perpendiculars a les bases ▱AB i ▱CD.

Sigui RT la prolongació del [segment] CR. [P 2]

Considerem [l'angle] $\widehat{TRU}$ igual al $\widehat{ALB}$ construït sobre el segment RT amb el [vèrtex] al punt R [del segment RT]. [Ei 23]

Fem RT i RU iguals a AL i LB[, respectivament], [P 3 i Ei 2]
i completem la base ▱RW. [Ei31]

Hem construït el sòlid ⬚XU. ♣

[*Demostració.*] Atès que els [segments] TR i RU són iguals als [segments] AL i LB[, respectivament], i que determinen angles iguals, resulta que els paral·lelograms ▱RW i ▱HL són iguals i semblants.
[Evi14]

898. És la rèplica d'Ei 36 a l'espai.
899. De fet, són bases equivalents.

De bell nou, atès que [els segments] AL i LM són iguals a RT i RS[, respectivament],
i que determinen angles rectes;
els paral·lelograms ▱RX i ▱AM són iguals i semblants. [Evi 14]

Pel mateix raonament, [els paral·lelograms] ▱LE i ▱SU també ho són.

Aleshores, els tres paral·lelograms del sòlid ⬚AE són iguals i semblants als tres paral·lelograms del ⬚XU.

Però les tres [cares del primer sòlid] són iguals i semblants a les tres [cares] oposades,
i les tres [cares del segon sòlid] ho són a les seves [cares] oposades. [Exi 24]

Aleshores, el paral·lelepípede ⬚AE equival al ⬚XU. [Exi 10]

Considerem les transversals DR i WU [P 2]
que es tallen per [el punt] Y. [P 5]

Tirem [el segment] aTb, paral·lel per T a DY, [Ei 23]
prolonguem PD fins al [punt] a, [P 2]
i completem els sòlids ⬚YX i ⬚RI. [P 5, Ei 23]

Així doncs, el sòlid ⬚XY de base el paral·lelogram ▱RX i [cara] oposada ▱Yc
és igual al sòlid ⬚XU, la base [del qual] és el paral·lelogram ▱RX i la [cara] oposada ▱UV.

Ara bé, els paral·lelepípedes ⬚XY i ⬚XU tenen la mateixa base ▱RX i la mateixa altura.

I els extrems de [les arestes que surten dels segments RT i SX] RY, RU, Tb i TW, i Se, Sd, Xc i XV són als segments YW i eV, respectivament. [Exi 29]

Però el sòlid ⬚XU és equivalent[900] al ⬚AE.

Per tant, el sòlid ⬚XY també,
ja que el paral·lelogram ▱$RUWT$ equival al ▱YT
i tots dos són a la base ▱RT entre els mateixos [segments] paral·lels ▱RT i ▱YW. [Ei 35]

Ara bé, [el paral·lelogram] ▱$RUWT$ és equivalent al ▱CD,
ja que equival al ▱AB.

---

900. Vegeu la nota 798 (pàgina 421).

Aleshores, el paral·lelogram ▱YT també ho és al ▱CD.
[Nc 1, iterat]

Considerem un altre [paral·lelogram] ▱DT.

La base ▱CD és a [la] ▱DT com ▱YT a ▱DT.
[Ev 7]

I, atès que el pla RF talla el paral·lelepípede CI, que és paral·lel als plans oposats [del sòlid CI], resulta que la base ▱CD és a la ▱DT com el sòlid CF al RI. [Exɪ 25]

Pel mateix [raonament], atès que el pla RX talla el sòlid YI i que és paral·lel als plans oposats al sòlid YI, resulta que la base ▱YT és a la ▱TD com el sòlid YX al RI. [Exɪ 25]

Però la base ▱CD és a la ▱DT com ▱YT a ▱DT.

Per tant, el sòlid CF és al RI com el YX al RI.
[Nc 1 o Ev 7, iterats]

I la raó entre els sòlids CF i YX i el sòlid RI és la mateixa. [Ev 11]

Per tant, el sòlid CF és igual al YX. [Ev 9]

Però hem vist que [el sòlid] YX equival al AE.

En definitiva, AE és equivalent a CF. ♠

b) Ara suposem que els [segments] $AG, HK, BE, LM, CO, PQ, DF$ i RS no són perpendiculars a les bases ▱AB i ▱CD.

En aquest cas, també afirmo que el sòlid AE equival al CF.

[*Construcció i demostració.*] Pels punts K, E, G i M; i Q, F, O i S tirem [els segments] KN, ET, GU i MV; i QW, FX, OY i SY perpendiculars als plans de referència [respectius, és a dir, als plans de les bases ▱AB i ▱CD]. [Exɪ 11]

Siguin N, T, U, V; i W, X, Y i I els punts d'intersecció [respectius].

Considerem els segments NT, NU, UV i TV; i WX, WY, YI i IX.
[P 1, Exɪ 1]

El sòlid KV equival al QI, [part *a*)] ♣

ja que tots dos tenen bases equivalents, ▱ KM i ▱ QS,
la mateixa altura
i arestes perpendiculars a les bases [respectives].

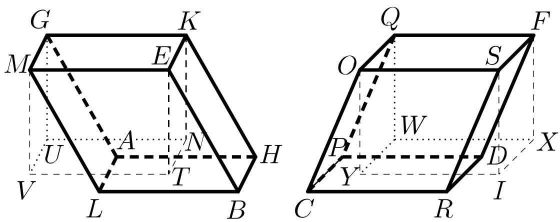


FIGURA EXI 31b

Però el sòlid ⧉ KV equival al ⧉ AE,
i [el sòlid] ⧉ QI al ⧉ CF,
ja que tenen bases iguals i la mateixa altura,
i les seves [arestes] no són als mateixos segments. [EXI 30]

En definitiva, els sòlids ⧉ AE i ⧉ CF també són equivalents.
[Nc 1, iterat] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

EXI 32. *La raó dels paral·lelepípedes de la mateixa altura és la de les seves bases.*[901]

Siguin ⧉ AB i ⧉ CD dos paral·lelepípedes de la mateixa altura.

Afirmo que la raó entre ells és la que hi ha entre les seves bases, és a dir, la base ▱ AE és a la base ▱ CF com el sòlid ⧉ AB al sòlid ⧉ CD.

[*Demostració.*] Apliquem [el paral·lelogram] ▱ FH equivalent al ▱ AE al [segment] FG amb [l'angle] $\widehat{FGH}$ igual al $\widehat{LCG}$. [EI 45]

Considerem la completació del paral·lelepípede ⧉ GK
[EXI 14 i P 5]
amb la mateixa altura que CD i base FH.

Aleshores, el sòlid ⧉ AB equival al ⧉ GK, ja que les seves bases ▱ AE i ▱ FH són equivalents i [tenen] la mateixa altura. [EXI 31]

901. Igualtat de raons entre dues parelles de magnituds de classes diferents. Vegeu EVI 1.

Però el pla DG talla el paral·lelepípede CK i és paral·lel als seus plans oposats.

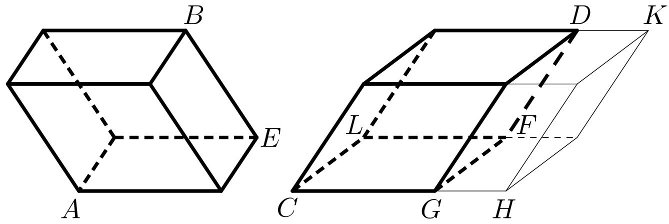


Figura Exi 32

Per tant, la base ▱ CF és a la ▱ FH com el sòlid CD al DH, [Exi 25]

Ara bé, la base ▱ FH equival a la ▱ AE i el sòlid GK ho és al AB.

En definitiva, la base ▱ AE és a la ▱ CF com el sòlid AB al CD. [Ev 7, iterat]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exi 33. *La raó de paral·lelepípedes semblants és igual a la raó triple dels seus costats.*

Siguin AB i CD paral·lelepípedes,
i AE i CF dos costats seus corresponents.

Afirmo que la raó entre el sòlid AB i el sòlid CD és com la raó triple que hi ha entre AE i CF.[902]

[*Demostració*.] Considerem les prolongacions EK, EL i EM dels costats AE, GE i HE [P 2]
iguals a CF, FN i FR[, respectivament].

Completem el paral·lelogram ▱ KL [Ei 23]
i el sòlid KP. [Exi 14]

Atès que els [segments] KE i EL són iguals als CF i FN,
i que els angles $\widehat{KEL}$ i $\widehat{CFN}$ són iguals perquè ho són [els] $\widehat{AEG}$ i $\widehat{CFN}$,
ja que els sòlids AB i CD són semblants, [Dxi 9]
resulta que el paral·lelogram ▱ KL és igual [i semblant] al ▱ CN.

902. És, de fet, el cub de la raó entre AE i CF.

Pel mateix [raonament], els paral·lelograms ▱KM i ▱CR són iguals i semblants,
i [els paral·lelograms] ▱EP i ▱DF també.

Aleshores, els tres paral·lelograms del sòlid KP són iguals i semblants als tres del sòlid CD.

Però els tres [primers paral·lelograms] són iguals i semblants als tres [paral·lelograms] oposats,
i els [altres] tres són iguals i semblants als [altres paral·lelograms] oposats. [Exi 24]

Per tant, els sòlids KP i CD són iguals i semblants. [Dxi 10]

Completem el paral·lelogram ▱GK, [Ei 23]
i els sòlids EO i LQ, de bases [respectives] els paral·lelograms ▱GK i ▱KL, i de la mateixa altura que [el sòlid] AB.

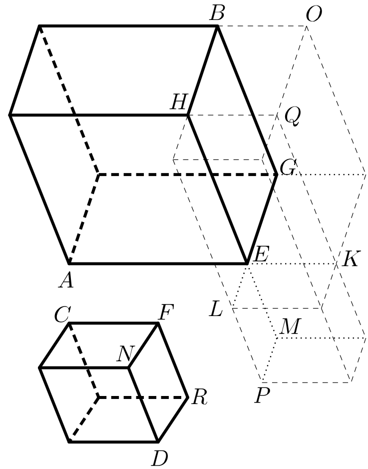


Figura Exi 33

Per la semblança dels sòlids AB i CD,
tenim que [el segment] AE és al CF com el EG al FN
i [el segment] EH al FR; [Dvi 1 i xi 9]
i [els segments] CF, FN i FR són iguals als EK, EL i EM[, respectivament].

Per tant, [el segment] AE és al EK com el GE al EL
i el HE al EM.

Però [el segment] AE és al EK com el [paral·lelogram] ▱AG al ▱GK,
[el segment] GE és al EL com el [paral·lelogram] ▱GK al ▱KL
i [el segment] HE és al EM com el [paral·lelogram] ▱QE al ▱KM. [Evi 1]

Per tant, el paral·lelogram ▱AG és al ▱GK com el [paral·lelogram] ▱GK al ▱KL
i el [paral·lelogram] ▱QE al ▱KM.

Però [el paral·lelogram] ▱ AG és al ▱ GK com el sòlid ⬚ AB al ⬚ EO,
[el] ▱ GK és al ▱ KL com el sòlid ⬚ OE al ⬚ QL
i [el] ▱ QE és al ▱ KM com el sòlid ⬚ QL al ⬚ KP.

[Exi 32]

Per tant, el sòlid ⬚ AB és al ⬚ EO com ⬚ EO al ⬚ QL i el ⬚ QL al ⬚ KP.

I, si quatre magnituds són contínuament proporcionals,
la raó entre el primer [terme] i el quart és la raó triple de la que hi ha entre el primer i el segon. [Dv 10]

Aleshores, la raó entre el sòlid ⬚ AB i el ⬚ KP és igual al cub de la raó que hi ha entre [el sòlid] ⬚ AB i el ⬚ EO.[903]

Però [el sòlid] ⬚ AB és al ⬚ EO com el paral·lelogram ▱ AG al ▱ GK i el segment AE al EK. [Evi 1]

Per tant, la raó entre el sòlid ⬚ AB i el ⬚ KP és el cub de la que hi ha entre [el segment] AE i el EK.

Però els sòlids ⬚ KP i ⬚ CD són equivalents
i els segments EK i CF iguals.

En definitiva, la raó entre els sòlids ⬚ AB i ⬚ CD també és el cub de la que hi ha entre els seus costats respectius AE i CF.[904]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exi 33, porisma. *Si quatre segments són* [*contínuament*] *proporcionals, el primer és al quart com el paral·lelepípede construït sobre el primer és al paral·lelepípede semblant i col·locat de manera semblant sobre el segon, ja que la raó entre el primer i el quart és el cub de la raó que hi ha entre el primer i el segon.*[905] ♠

903. Euclides aplica un resultat que ha establert per a qualsevol classe de magnituds i obté un fet realment espectacular per a la geometria grega: una raó «triple» d'una raó entre sòlids, de fet, entre els volums dels sòlids.

904. Aquí Euclides usa: «Si dues raons són iguals, les raons triples respectives també.» És una nova aplicació del principi de substitució. Vegeu el concepte de «raó» euclidiana a Pla (2018).

905. Heiberg dubta de l'autenticitat d'aquest porisma. En canvi, s'hi troba a faltar l'anàleg d'Evi 23 —en relació amb Evi 19 i Evi 20—: «La raó entre els paral·lelepípedes formats per paral·lelograms equiangles», és

Exi 34. a*) Les bases dels paral·lelepípedes equivalents són inversament proporcionals a les seves altures i* b*) els paral·lelepípedes amb les bases inversament proporcionals a les seves altures són equivalents.*[906]
Siguin AB i CD dos paral·lelepípedes equivalents.[907]

Afirmo que les bases dels paral·lelepípedes AB i CD són inversament proporcionals a les altures respectives, és a dir, la base ▱ EH és a la base ▱ NQ com l'altura del sòlid CD a la del sòlid AB.

a_1) En primer lloc, siguin AG, EF, LB, HK, CM, NO, PD i QR perpendiculars a les bases. Exi 12]

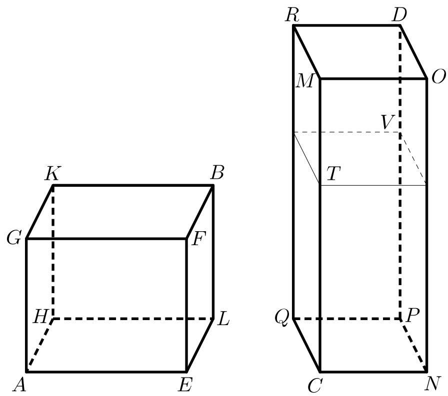


Figura Exi 34a

Afirmo que la base ▱ EH és a la ▱ NQ com [la] ▱ CM a [la] ▱ AG.

En conseqüència, si les bases ▱ EH i ▱ NQ són semblants, i els sòlids AB i CD també, [el segment] CM és igual al AG.

Ara bé, els paral·lelepípedes de la mateixa altura són entre si com les bases respectives. [Exi 32]

I la base ▱ EH és a [la] ▱ NQ com [l'altura] CM a [la] AG.

D'això en resulta clarament que les bases dels paral·lelepípedes AB i CD són inversament proporcionals a les altures respectives. ♠

a dir, amb els angles sòlids iguals, és la «raó triple que hi ha entre els seus costats.»

906. Com observa Heath (1925), volum iii, p. 349, en aquesta demostració, Euclides fa dues pressuposicions: *a*) si dos paral·lelepípedes semblants tenen les bases semblants, les seves altures són iguals, i *b*) si les bases de dos paral·lelepípedes són diferents —tenen superfícies diferents— el que té la base més gran té l'altura més petita. És la rèplica d'Evi 14.

907. De vegades, Euclides usa el terme παραλληλεπιπέδων i, de vegades, el terme εστερεόν.

a_2) Ara suposem que la base ▱ EH no és equivalent a la ▱ NQ.
Sigui, per exemple, ▱ EH la més gran [de totes dues].
Això no obstant, els sòlids ◫ AB i ◫ CD són equivalents.
Aleshores, [l'altura] CM és més gran que [la] AG.
Considerem [el segment] CT[, part de CM,] igual a AG. [P 3 i Ei 2]
Completem el paral·lelepípede ⬭ VC de base ▱ NQ [P 5]
i altura CT.
Atès que el sòlid ◫ AB equival al ◫ CD,
que [el sòlid] ◫ CV els és extrínsec
i que [dues magnituds] tenen la mateixa raó amb una tercera, [Ev 7]
resulta que el sòlid ◫ AB és al ◫ CV com el ◫ CD al ◫ CV.
Però el sòlid ◫ AB és al ◫ CV com la base ▱ EH a la ▱ NQ.
Per tant, els sòlids ◫ AB i ◫ CV [tenen] la mateixa altura, [Exi 32]
i el sòlid ◫ CD és al ◫ CV com la base ▱ MQ a la ▱ TQ, [Exi 25]
i, de retruc, com CM a CT. [Evi 1]
Aleshores, la base ▱ EH és a la ▱ NQ com [l'altura] MC a la AG.
Però [el segment] CT [és, per construcció,] igual a [l'altura] AG.
Per tant, la base ▱ EH és a la ▱ NQ com [l'altura] MC a la AG.
En definitiva, les bases dels paral·lelepípedes ⬭ AB i ⬭ CD són inversament proporcionals a les altures respectives. ♠

b) Ara suposem que les bases dels paral·lelepípedes ⬭ AB i ⬭ CD són inversament proporcionals a les altures respectives,
és a dir, les bases ▱ EH i ▱ NQ són com les altures dels sòlids ◫ CD i ◫ AB.
Afirmo que el sòlid ◫ AB equival al ◫ CD.
b_1) Tirem [les arestes] perpendiculars a les bases.

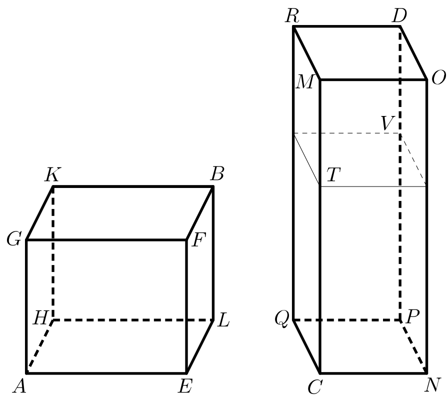


Figura Exi 34b_1

Si la base ▱ EH equival a la ▱ NQ,
i la base ▱ EH és a la ▱ NQ com l'altura del sòlid ◫ CD a la del sòlid ◫ AB,

aleshores l'altura del sòlid CD també és igual a la del sòlid ⬚ AB.

[Dv 5]

Però els paral·lelepípedes de bases equivalents i de la mateixa altura són equivalents entre si. [Exi 31]

Per tant, el sòlid ⬚ AB equival al ⬚ CD. ♠

b_2) Suposem, en canvi, que la base ▱ EH no equival a la ▱ NQ i que ▱ EH és la més gran [de totes dues].

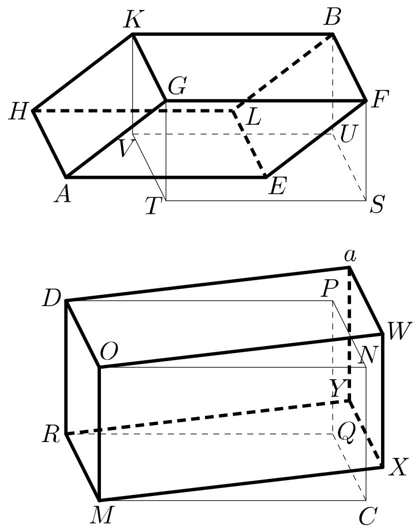


Figura Exi 34b_2

Aleshores, l'altura del sòlid ⬚ CD també és més gran que la del sòlid ⬚ AB, a saber, [l'altura] CM [és més gran] que la AG.

Novament, fem CT igual a AG, [P 3 i Ei 2]
i, de manera semblant, completem el sòlid ⬚ CV. [P 5]

Però la base ▱ EH és a la ▱ NQ com ▱ MC a ▱ AG, i AG és igual a CT.

Per tant, la base ▱ EH és a la base ▱ NQ com [l'altura] CM a CT.

Però la [base] ▱ EH és a la ▱ NQ com el sòlid ⬚ AB al ⬚ CV.

A més, els sòlids ⬚ AB i ⬚ CV tenen la mateixa altura, [Evi 32]
CM és a CT com la base ▱ MQ a la ▱ QT, [Evi 11]
i el sòlid ⬚ CD al ⬚ CV. [Exi 25]

I el sòlid ⬚ AB és al ⬚ CV com el sòlid ⬚ CD al ⬚ CV.

Per tant, la raó entre els sòlids ⬚ AB i ⬚ CD i [el sòlid] ⬚ CV és la mateixa. [Nc 1, iterat]

En definitiva, els sòlids ⬚ AB i ⬚ CD són equivalents.

[Ev 9] ♠

b_3) Considerem els [segments] $FE, BL, GA, KH, ON, DP, MC$ i RQ no perpendiculars a les bases;[908]
les perpendiculars als plans ⏥ EH i ⏥ NQ pels punts F, G, B, K, O, M, R i D; [Exi 11]
i els punts S, T, U, V, W, X, Y i a [que són els peus de les perpendiculars que els uneixen amb els plans].

I completem els sòlids ⬚ FV i ⬚ Oa. [P 5]

També afirmo que, en aquest cas, les bases dels sòlids ⬚ AB i ⬚ CD són inversament proporcionals a les [altures] respectives,
atès que ⬚ AB i ⬚ CD són equivalents,
és a dir, la base ▱ EH és a la ▱ NQ com l'altura del sòlid ⬚ CD a la del sòlid ⬚ AB.

Els sòlids ⬚ AB i ⬚ CD són equivalents
i [els sòlids] ⬚ AB i ⬚ BT també
perquè tenen la mateixa base ▱ FK i la mateixa altura. [Exi 29 i 30]

Ara bé, els sòlids ⬚ CD i ⬚ DX són equivalents
perquè tenen la mateixa base ▱ RO i la mateixa altura.
[Exi 29 i Exi 30]

De tot això en resulta que el sòlid ⬚ BT també equival al ⬚ DX.
[Nc 1][909]

Aleshores, la base ▱ FK és a la ▱ OR com l'altura del sòlid ⬚ DX a la del sòlid ⬚ BT, [per la part a)]
i les [parelles de] bases ▱ FK i ▱ EH, i ▱ OR i ▱ NQ són equivalents, respectivament.

A més, la base ▱ EH és a la ▱ NQ com la del sòlid ⬚ DX a la del sòlid ⬚ BT, [Ev 7]
i els sòlids ⬚ DX i ⬚ BT tenen la mateixa altura que els ⬚ DC i ⬚ BA[, respectivament].

Per tant, la base ▱ EH és a la ▱ NQ com l'altura del sòlid ⬚ DC a la del sòlid ⬚ AB.

---

908. Diferents de les perpendiculars respectives, que sabem que existeixen i són úniques des de cada punt.

909. Recordem que la igualtat de la Nc 1 s'ha d'entendre en el sentit euclidià, és a dir, aplicable també a l'equivalència.

I les bases dels paral·lelepípedes sòlids AB i CD són inversament proporcionals a les altures respectives. ♠

c) Ara sigui la base ▱ EH a la ▱ NQ com l'altura del sòlid CD a la del sòlid AB.

Afirmo que el sòlid AB equival al CD.

Amb la mateixa construcció [que abans], atès que la base ▱ EH és a la ▱ NQ com l'altura del sòlid CD a la del sòlid AB,
i que les [parelles de] bases ▱ EH i ▱ FK, i ▱ NQ i ▱ OR són equivalents,
resulta que la base ▱ FK és a la ▱ OR com l'altura del sòlid CD a la del sòlid AB,
i els sòlids AB i CD tenen la mateixa altura que [els] BT i DX[, respectivament].

Així doncs, la base ▱ FK és a la ▱ OR com l'altura del sòlid DX a la del sòlid BT.

Per tant, les bases dels paral·lelepípedes BT i DX són inversament proporcionals a les altures respectives.

Aleshores, el sòlid BT equival al DX. [part a)].

Però els sòlids BT i BA són equivalents
ja que tenen la mateixa base ▱ FK i la mateixa altura. [Exi 29 i 30]

I els sòlids DX i DC també són equivalents. [Exi 29 i 30]

En definitiva, els sòlids AB i CD són equivalents. [Nc 1] ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exi 35. *Considerem dos angles rectilinis coplanaris iguals. Des dels vèrtexs aixequem segments que formin amb els* [*seus*] *costats angles iguals. Considerem punts arbitraris d'aquests segments i, per ells, tirem perpendiculars al pla dels angles* [*inicials*]. *Unim els punts que* [*els segments perpendiculars*] *determinen al pla i els* [*vèrtexs dels*] *angles. Aquests segments i els que hem aixecat formen angles iguals.*[910]

910. Dues consideracions: a) ja hem dit que Euclides no precisa mai què entén per «angles plans iguals» i, en aquest enunciat, usa aquest terme d'una manera profusa; b) aquest enunciat tan feixuc el podem resumir així: «En dos angles triedres iguals, cada parell d'arestes homòlogues forma angles iguals en el pla de les altres dues.»

Siguin $\widehat{BAC}$ i $\widehat{EDF}$ dos angles rectilinis iguals.

Considerem els segments AG i DM aixecats damunt els punts A i D
de manera que formin angles rectilinis iguals amb els segments originals,
és a dir, de manera que els angles $\widehat{MDE}$ i $\widehat{GAB}$ siguin iguals,
i [els angles] $\widehat{MDF}$ i $\widehat{GAC}$ també.

Siguin G i M punts arbitraris,
un de cada un dels segments AG i DM.

Pels punts G i M, tirem les perpendiculars GL i MN al pla dels angles $\widehat{BAC}$ i $\widehat{EDF}$[, respectivament]. [Exi 11]

Siguin L i N els peus de les perpendiculars al pla.

Unim LA i ND. [P1]

Afirmo que els angles $\widehat{GAL}$ i $\widehat{MDN}$ són iguals.

Agafem AH igual a DM. [P 3 i Ei 2]

Pel punt H, tirem el [segment] HK paral·lel al GL.

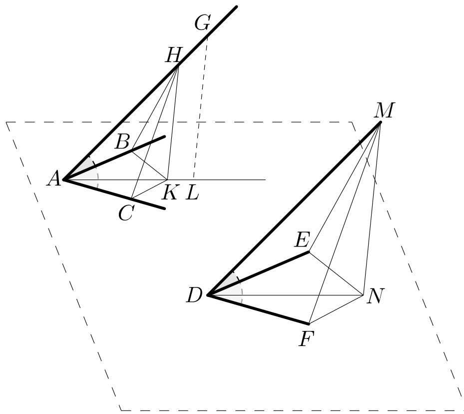


Figura Exi 35

Però GL és perpendicular al pla [que conté l'angle] $\widehat{BAC}$.

Aleshores, HK també és perpendicular a aquest pla. [Exi 8]

Per cadascun dels punts K i N, tirem els segments KC, NF, KB i NE perpendiculars als segments AC, DF, AB i DE. [Ei 12]

Unim HC, CB, MF i FE. [P 1]

Atès que el [quadrat] de costat HA és igual a la [suma dels quadrats] de costats HK i KA, [Ei 47]
i que la [suma dels quadrats] de costats KC i CA és igual al quadrat de [costat] KA, [Ei 47]

tenim que el quadrat de [costat] HA és igual a la [suma dels quadrats] de costats HK, KC i CA, [Nc 2]
i que el [quadrat] de costat HC ho és a la [suma dels quadrats] de costats HK i KC. [EI 47]

En definitiva, el [quadrat] de costat HA és igual a la [suma dels quadrats] de costats HC i CA. [Nc 2]

Per tant, l'angle $\widehat{HCA}$ és recte. [EI 48]

Pel mateix [raonament], l'angle $\widehat{DFM}$ també ho és.

Per tant, els angles $\widehat{ACH}$ i $\widehat{DFM}$ són iguals. [Nc 1]

I els angles $\widehat{HAC}$ i $\widehat{MDF}$ també ho són.

En conseqüència, els triangles $\triangle MDF$ i $\triangle HAC$ tenen, respectivament, dos angles iguals a dos angles i un costat igual a un costat,
en concret, [el costat] que subtendeix un dels angles iguals,
[és a dir,] HA, que és igual a MD.

Aleshores, també tenen iguals els altres costats respectius. [EI 26]

Per tant, [els segments] AC i DF són iguals.

De manera semblant, podem veure que AB i DE també ho són.

Per tant, atès que AC i DF són iguals, i AB i DE també,
tenim que la parella [de segments] CA i AB és igual a la parella [de segments] FD i DE.

Però els angles $\widehat{CAB}$ i $\widehat{FDE}$ són iguals.

Per tant, les bases BC i EF també ho són,
i els triangles [$\triangle ACB$ i $\triangle DFE$] també.

I, en conseqüència, la resta d'angles també són iguals. [EI 4]

Tenim, doncs, que l'angle $\widehat{ACB}$ és igual al $\widehat{DFE}$,
i que els angles $\widehat{ACK}$ i $\widehat{DFN}$ són rectes [i, per tant, iguals]. [P4 i DI 10]

Aleshores, l'angle [que queda], $\widehat{BCK}$, és igual al [que queda,] $\widehat{EFN}$. [Nc 3]

Pel mateix [raonament], els angles $\widehat{CBK}$ i $\widehat{FEN}$ també ho són.

En conseqüència, els triangles $\triangle BCK$ i $\triangle EFN$ tenen dos angles iguals a dos angles i un costat igual a un costat,
i el que subtendeixen els angles iguals, BC, és igual a EF.

Aleshores, també tenen iguals els altres costats. [EI 26]

Per tant, CK i FN són iguals, i AC i DF també.

Així doncs, la parella [de segments] AC i CK és igual a la parella [de segments] DF i FN,
i formen un angle recte.

I les bases AK i DN són iguals. [EI 4]

Atès que AH i DM són iguals,
el quadrat de [costat] AH també ho és al de costat DM.[911]

Però la [suma dels quadrats] de costats AK i KH és igual al de costat AH, ja que l'angle $\widehat{AKH}$ és recte, [E 47]
i la [suma dels quadrats] de costats DN i NM és igual al quadrat de costat DM, ja que l'angle $\widehat{DNM}$ és recte. [EI 47]

Aleshores, la suma dels quadrats de costats AK i KH és igual a la dels quadrats de costats DN i NM.

Però el [quadrat] de costat AK és igual al de costat DN.

Aleshores, l'altre [quadrat], de costat KH, és igual al de costat NM. [Nc 3]

D'això en resulta que HK ho és a MN.[912]

I, atès que els [segments] HA i AK són iguals als [segments] MD i DN[, respectivament],
i que hem vist que la base HK és igual a la MN,
tenim que l'angle $\widehat{HAK}$ és igual al $\widehat{MDN}$. [EI 8]
[I això és el que volíem demostrar.] ♠

EXI 35, porisma. *Si considerem dos angles plans iguals i*[*, a partir dels vèrtexs respectius,*] *aixequem segments iguals formant angles iguals amb els segments originals; les perpendiculars als plans que contenen els angles iguals*[*, tirades des dels extrems,*] *són iguals.*[913]
I això és el que volíem demostrar. ♠

EXI 36. *Si tres segments són* [*contínuament*] *proporcionals, el paral·lelepípede* [*que determinen*] *és equivalent al paral·lelepípede equilateral de costat el* [*segment*] *mitjà* [*dels tres*] *i equiangular amb ell.*

---

911. Recordem que Euclides admet, sense prova, que, si dos segments són iguals, els seus quadrats són equivalents —de fet, congruents. Vegeu la nota 596 (pàgina 256).

912. Vegeu la nota 596 (pàgina 256).

913. No cal, doncs, que els angles plans siguin al mateix pla.

Siguin A, B i C tres segments [contínuament] proporcionals, [és a dir,] que compleixen que A és a B com B a C.

Afirmo que el [paral·lelepípede que determinen] A, B i C equival al sòlid equilateral de costat B [que és] equiangular amb el que hem esmentat abans.

[*Demostració*.] Considerem l'angle sòlid [de vèrtex] E format pels [angles plans] $\widehat{DEG}, \widehat{GEF}$ i $\widehat{FED}$,
i [els tres segments] DE, GE i EF iguals a B. [P 3 i EI 2]

Completem el paral·lelepípede EK. [P 5]

Fem LM igual a A. [P 3 i EI 2]

Considerem l'angle sòlid igual a l'angle sòlid [amb el vèrtex] a E, format [pels angles plans] $\widehat{NLO}, \widehat{OLM}$ i $\widehat{MLN}$ sobre el segment LM amb el vèrtex al punt L. [EXI 23]

Fem LO i LN iguals a B i C[, respectivament]. [P 3 i EI 2]

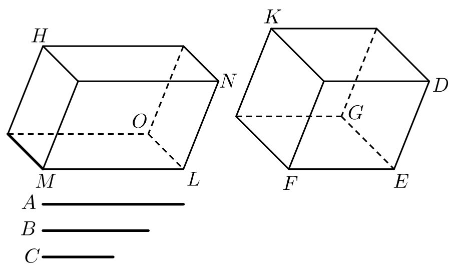


FIGURA EXI 36

Atès que A és a B com B a C,
que A és igual a LM,
B a LO i ED, i C a LN,
resulta que LM és a EF com DE a LN. [EV 7]

Per tant, els costats que formen els angles $\widehat{NLM}$ i $\widehat{DEF}$ són inversament proporcionals.

I els paral·lelograms ▱ MN i ▱ DF, equivalents. [EVI 14]

Ara, atès que els dos angles rectilinis plans $\widehat{DEF}$ i $\widehat{NLM}$ són iguals, i que els segments LO i EG que s'aixequen [als vèrtexs respectius] també ho són,
i formen angles iguals amb els segments originals,
resulta que les perpendiculars, pels punts G i O, als plans que contenen [els angles] $\widehat{NLM}$ i $\widehat{DEF}$ també són equivalents. [EXI 35, porisma]

Aleshores, els sòlids LH i EK [tenen] la mateixa altura,
i els paral·lelepípedes de la mateixa altura [construïts] sobre bases equivalents són equivalents entre si. [EXI 31]

Per tant, el sòlid HL equival al EK,

i [el sòlid] LH està format per [els segments] A, B i C,
i el EK per [el segment] B.

En definitiva, doncs, el paral·lelepípede [d'arestes] A, B i C equival al sòlid equilàter [d'aresta] B
[que, a més, és] equiangular amb l'altre sòlid.
I això és el que volíem demostrar. ♠

Exi 37. a*) Si quatre segments són proporcionals; els paral·lelepípedes semblants, col·locats de manera semblant, també ho són.* b*) Si els paral·lelepípedes semblants, col·locats de manera semblant [sobre quatre segments], són proporcionals, els [quatre] segments també ho són.*

a) Siguin AB, CD, EF i GH quatre segments proporcionals.

[És a dir,] AB és a CD com EF a GH.

Considerem els paral·lelepípedes KA, LC, ME i NG semblants i col·locats de manera semblant sobre AB, CD, EF i GH[, respectivament].

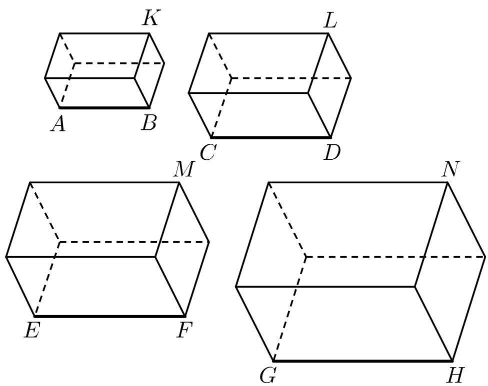


Figura Exi 37

Afirmo que el paral·lelepípede KA és al LC com el ME al NG.

[*Demostració.*] Atesa la semblança dels paral·lelepípedes KA i LC,
la seva raó és el cub de la raó de[ls segments] AB i CD. [Exi 33]

Pel mateix [raonament], la raó entre [els paral·lelepípedes] ME i NG és el cub de la raó de[ls segments] EF i GH. [Exi 33]

I, com que AB és a CD com EF a GH,
KA és a LC com ME a NG. [per substitució][914] ♠

914. Aquí Euclides accepta que, si dues raons són iguals, les raons triplicades —els cubs— també. És una nova aplicació del principi de substitució.

b) Suposem que el sòlid AK és al LC com el ME al NG.

Afirmo que el segment AB és al CD com [el segment] EF al GH.

[*Demostració.*] De bell nou, atès que la raó entre [els paral·lelepípedes] AK i LC és el cub de la raó de[ls segments] AB i CD, [Exi 33]
que la raó entre [els paral·lelepípedes] ME i NG és el cub de la raó de[ls segments] EF i GH, [Exi 33]
i que el paral·lelepípede AK és al LC com el ME al NG,
resulta que [el segment] AB és al CD com el EF al GH.[915]

I, si quatre segments són proporcionals, hem establert la proposició. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exi 38. *Si dimidiem les arestes de [dues] cares oposades d'un cub i considerem els plans que determinen [els punts de divisió],*[916] *la secció comuna d'aquests plans i el diàmetre —διάμετρος— del cub es tallen pel punt mitjà.*

Siguin $\square CF$ i $\square AH$ els plans oposats del cub AF les arestes dels quals s'han dimidiat pels punts K, L, M i N, i O, Q, P i R.

Considerem els plans KN i OR produïts pels punts.

Siguin US la secció comuna dels plans i DG el diàmetre del cub AF.

Afirmo que:

a) Els segments UT i TS són iguals.

b) [Els segments] DT i TG són iguals.

a) [*Demostració.*] Unim DU, UE, BS i SG. [P 1]

Atès que DO és paral·lel a PE,
els angles alterns $\widehat{DOU}$ i $\widehat{UPE}$ són iguals. [E i 29]

I, atès que DO i OU són iguals a PE i UP[, respectivament],
i que formen angles iguals;

915. Per la Nc 1, els cubs dels segments són proporcionals. Per tant, Euclides admet el recíproc del que havia admès abans (nota anterior), és a dir, que els segments també ho són.

916. Tenim dues col·leccions de quatre punts i acceptem que cada una determina un pla. En aquest cas, però, no hi ha cap problema.

les bases DU i UE són iguals, els triangles $\triangle DOU$ i $\triangle EPU$ també, i els altres angles són iguals als altres angles. [Ei 4]

Aleshores, els angles $\widehat{OUD}$ i $\widehat{PUE}$ són iguals.

En conseqüència, [la línia] DUE és un segment [rectilini]. [Ei 14]

Pel mateix [raonament], [la línia] BSG també és un segment, i [els segments] BS i SG són iguals.

Atès que CA és igual i paral·lel a DB i EG,
DB és igual i paral·lel a EG.[917] [Exi 19]

Els segments DE i BG uneixen DB i EG.

Per tant, DE és paral·lel a BG. [Ei 33]

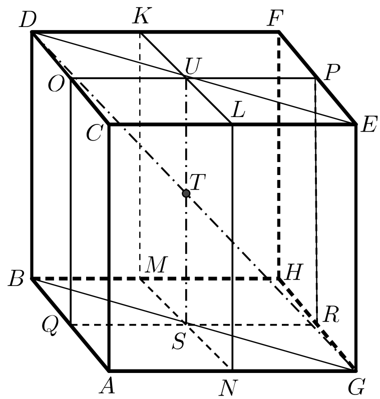


Figura Exi 38

Aleshores, els angles $\widehat{EDT}$ i $\widehat{BGT}$ són iguals perquè són [angles] alterns, [Ei 29]
i [l'angle] $\widehat{DTU}$ [és igual] al $\widehat{GTS}$. [Ei 15]

Per tant, [els triangles] $\triangle DTU$ i $\triangle GTS$ tenen dos angles iguals a dos angles,
i un costat igual a un costat[, és a dir], el que subtendeix un dels angles iguals.

Dit d'una altra manera, [els segments] DU i GS són [iguals] perquè són la meitat de DE i BG[, respectivament]. ♠

b) Aleshores, aquests triangles també tenen iguals, respectivament, els altres costats. [Ei 26]

De tot això en resulta que DT és igual a TG, i UT a TS. ♠
I això és el que volíem demostrar. ♠

917. De fet, segons la definició Dxi 25, s'han d'establir el paral·lelisme i la igualtat de les arestes d'un cub.

Exi 39. *Considerem dos prismes de la mateixa altura. Un té com a base un paral·lelogram i l'altre un triangle. Si el paral·lelogram és doble que el triangle,*[918] *els prismes són equivalents.*[919]

Siguin $ABCDEF$ i $GHKLMN$ els dos prismes de la mateixa altura.[920]

Suposem que la base del primer és el paral·lelogram ▱AF i la del segon el triangle $\triangle GHK$,

i que [la d]el paral·lelogram ▱AF és dues vegades [l'àrea d]el triangle $\triangle GHK$.

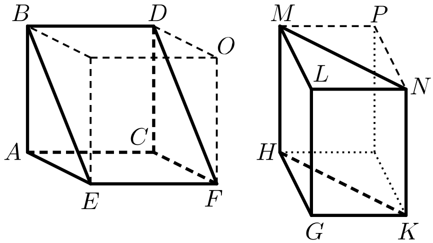


Figura Exi 39

Afirmo que el prisma $ABCDEF$ equival al $GHKLMN$.

[*Demostració.*] Completem els sòlids AO i GP. [P 5]

Atès que el paral·lelogram ▱AF és el doble del triangle $\triangle GHK$ i que el paral·lelogram ▱HK també ho és, [Ei 34]

resulta que els paral·lelograms ▱AF i ▱HK són equivalents.

I els paral·lelepípedes de bases equivalents i [de] la mateixa altura també ho són. [Exi 31]

Aleshores, els sòlids AO i GP són equivalents,

i el prisma $ABCDEF$ és la meitat del sòlid AO.

Per tant, el prisma $GHKLMN$ és la meitat del sòlid GP.[921] [Exi 28]

En definitiva, els prismes $ABCDEF$ i $GHKLMN$ són equivalents.[922]

I això és el que volíem demostrar. ♠

918. L'àrea del paral·lelogram és el doble de l'àrea del triangle.

919. Com podem veure en la demostració, Euclides considera un prisma triangular que té com a base un paral·lelogram. Altrament, l'enunciat seria fals.

920. Aquesta descripció dels prismes aclareix l'enunciat.

921. Si els paral·lelograms no són rectangles, aquesta afirmació, que es basa en Exi 28, és falsa. Això no obstant, Euclides necessita el teorema en forma general a Exii 4.

922. Fixem-nos que considerem les bases o bé triangulars o bé paral·lelogràmiques.

A.4 L'exhaustió: Exii

p. 55 **Comentaris.** Arribem a un dels llibres més notables dels *Elements*,[923] que és totalment eudoxià. De fet, està dedicat a les aplicacions concretes del mètode d'exhaustió[924] creat per Èudox de Cnidos,[925] aquelles que fan referència als objectes geomètrics: el cercle, la piràmide i l'esfera.

El llibre xii és un antecedent del càlcul integral que no fa servir el càlcul numèric explícit. S'hi estableixen resultats comparatius mitjançant la teoria de la proporció.[926] És, doncs, un llibre íntimament vinculat als v i vi. I, pel que fa a l'exhaustió, l'aplica a la determinació —en la terminologia grega de la teoria de la proporció— de l'àrea del cercle —un resultat de la geometria plana—; del volum de la piràmide —un resultat molt agut, de matemàtica superior—, del prisma, del con i del cilindre; i, finalment, de l'esfera —amb una demostració molt complicada i una mica imperfecta. En tots els casos, estableix les proposicions adequades que hi fan possible l'exhaustió (Ex 1).[927]

---

923. Vegeu Heath (1925), volum iii, p. 365-437; Vera (1970), volum i, p. 943-958; Frajese i Maccioni (1970), p. 926-983; Kayas (1978), volum i, p. 173-201; Puertas (2008), p. 267-312; Vitrac (2001), p. 236-375; i Acerbi (2007), p. 1478-1563. Vegeu també <http://www.operaplatonis.de/euklid/>, llibre xii, i <http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pd>, p. 423-470.

924. Aquest nom l'introduí Grégoire de Saint-Vincent a *Opus geometricum guadraturae circuli et sectionum coni* (1647). L'exposició teòrica del mètode d'exhaustió ja l'hem comentat a Ex 1.

925. Vegeu Pla (2016*b*), p. 313-323.

926. La tècnica consisteix a negar la igualtat de dues raons i, de retruc, a suposar verdaderes cadascuna de les dues desigualtats possibles i a deduir, de cada un dels casos, un resultat absurd (Pla (2016*b*), p. 328-330, i 356, ítem 5). Recordem les paraules de Tannery: «Als matemàtics grecs no els van fallar els mètodes sinó les fórmules adequades per exposar [els resultats]» (Tannery (1885), p. 108).

927. En el cas del cercle, ho fa dins de la demostració mateixa; en el cas de la piràmide, a Exii 3; i, en el de l'esfera, a Exii 17.

A.4*a* Les definicions (Ὅροι)

p. 56

No hi ha definicions. S'hi fan servir les del llibre XI.

A.4*b* Les proposicions

p. 56

EXII 1. *La proporció que hi ha entre [les àrees de] dos polígons semblants qualssevol*[928] *[inscrits] en cercles és igual a la dels quadrats dels diàmetres [d'aquests cercles].*[929]

Siguin $\bigcirc ABC$ i $\bigcirc FGH$ [dos] cercles de diàmetres respectius BM i GN,
i ⬠$ABCDE$ i ⬠$FGHKL$ dos polígons semblants [inscrits] en cadascun.

Afirmo que el quadrat de costat BM és al de costat GN com el polígon ⬠$ABCDE$ al ⬠$FGHKL$.

Unim BE, AM, GL i FN. [P 1]

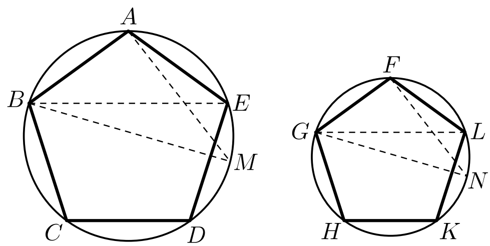


FIGURA EXII 1

Atès que els polígons ⬠$ABCDE$ i ⬠$FGHKL$ són semblants,
els angles respectius $\widehat{BAE}$ i $\widehat{GFL}$ són iguals,
i BA és a AE com GF a FL. [DVI 1]

En conseqüència, els triangles $\triangle BAE$ i $\triangle GFL$ tenen un angle igual, [a saber, els angles respectius] $\widehat{BAE}$ i $\widehat{GFL}$,
i els costats que els formen són proporcionals.

Per tant, els triangles $\triangle ABE$ i $\triangle FGL$ són equiangles [EVI 6]
i els angles $\widehat{AEB}$ i $\widehat{FLG}$, iguals.

Però [els angles] $\widehat{AEB}$ i $\widehat{AMB}$, i $\widehat{FLG}$ i $\widehat{FNG}$ també ho són[, respectivament,]
ja que subtendeixen el mateix arc. [EIII 27]

928. No cal que siguin regulars.

929. Des d'un punt de vista deductiu, aquesta proposició s'hauria d'haver establert al llibre VI, ja que és un porisma immediat d'EVI 19. Però, des d'un punt de vista metodològic, Euclides la inclou aquí perquè és un «element» de la proposició EXII 2.

Per tant, els angles $\widehat{AMB}$ i $\widehat{FNG}$ també són iguals, [Nc 1]
i l'angle recte $\widehat{BAM}$ és igual al recte $\widehat{GFN}$. [EIII 31 i P 4]

Aleshores, l'altre [angle] també ho és a l'altre [angle], [EI 32 i Nc 3]
els triangles $\triangle\, ABM$ i $\triangle\, FGN$ són equiangles,
i BM és a GN com BA a GF. [EVI 4]

Però la [raó] entre el quadrat de costat BM i el de costat GN és el quadrat de la raó entre [els diàmetres] BM i GN, [EVI 20]
i la [raó] entre els polígons ⬠ $ABCDE$ i ⬠ $FGHKL$ és el quadrat de la [raó] entre [els costats respectius] BA i GF. [EVI 20]

Per tant, el quadrat de costat BM és al de costat GN com el polígon ⬠ $ABCDE$ al ⬠ $FGHKL$. [EV 11]

En definitiva, polígons semblants [inscrits] en cercles tenen entre si la raó dels quadrats dels seus diàmetres.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EXII 2. *La raó entre dos cercles és la dels quadrats dels seus diàmetres —διαμέτρων.*[930]

Siguin ○$ABCD$ i ○$EFGH$ els cercles de diàmetres BD i FH.

Afirmo que el cercle ○$ABCD$ és al ○$EFGH$ com el quadrat de costat BD al de costat FH.

[*Demostració.*][931] Si el cercle ○$ABCD$ no és al [cercle] ○$EFGH$ com

930. Hi ha autors que atribueixen aquest resultat a Hipòcrates de Quios (vegeu PLA (2016*b*), p. 245). Tanmateix, sembla molt més adequat fer-lo a Èudox, a qui Arquimedes assigna el porisma d'EXII 7 i EXII 10.

A més de la importància del resultat, aquesta proposició és notable perquè conté la primera demostració en la qual s'aplica el mètode d'exhaustió (EX 1) a un cas concret de la geometria. L'ús de la doble reducció a l'absurd, en canvi, ja l'havíem trobat al volum anterior en l'anàlisi de l'estudi de la «quadratriu» com a corba útil per quadrar el cercle (vegeu PLA (2016*b*), p. 328-330).

Per a una informació més àmplia sobre l'exhaustió a l'obra d'Euclides, vegeu VEGA (1990), p. 352-355; o GARDIES (1994).

931. La demostració d'Euclides es basa en l'«element» que en diem EVI 12′: «Donades tres àrees S_1, Q_1 i Q_2, existeix una àrea S que n'és la quarta proporcional, és a dir, que $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{S_1}{S}$.» Aquesta existència, ni la demostra ni la pressuposa; l'usa en la demostració de manera natural. És una demostració per analogia, atès que, a EVI 12, l'ha establert per a tres

el [quadrat] de costat BD al de costat FH,[932]

aleshores el [quadrat] de costat BD és al de costat FH com el cercle $\circ ABCD$ a una àrea d'un d'aquests dos tipus:[933]

a) Més petita que el cercle $\circ EFGH$.

b) Més gran que el cercle $\circ EFGH$.

a) En primer lloc, suposem que [la raó entre els quadrats dels diàmetres] és [la mateixa que] la que té [el cercle $\circ EFGH$] amb [una àrea] S més petita [que el cercle $\circ EFGH$].

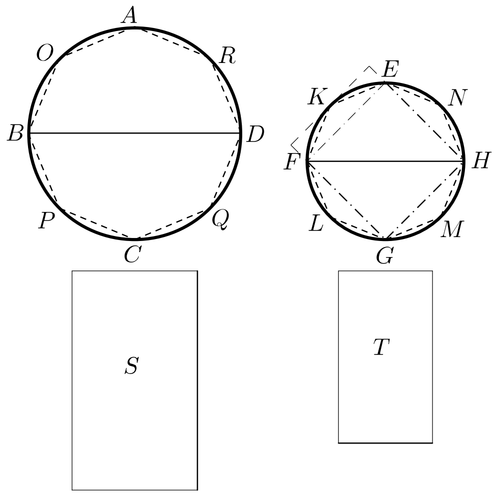


Figura Exii 2

[Exii 2, lema. *Els polígons regulars de* 2^n *costats exhaureixen el cercle.*][934]

segments rectilinis. Per a una lectura clarificadora, vegeu la nota 947 al final de la demostració (pàgina 493).

932. Hipòtesi de l'absurd.

933. Aquí Euclides usa l'element que hem anomenat Evi 12′ i aplica la disjunció de casos.

934. Euclides vol fer servir el mètode d'exhaustió [Ex 1] i, per això, necessita trobar àrees que, iteradament, treguin més de la meitat de l'àrea que es té en cada pas. És clar que, si hagués establert abans la demostració d'aquest lema, la demostració de la proposició hauria estat més senzilla, ja que, des del punt de vista de la complexitat deductiva, pertany al llibre iv. Però, des del metodològic, és un «element» d'aquest teorema.

És una llàstima que no l'establís de manera separada (com a lema) i que, com a porisma, n'hagués deduït l'exhaustió del cilindre pels prismes corresponents en cadascun dels polígons que exhaureixen el cercle de la base del cilindre. Així, sense alterar gens les demostracions finals de les proposicions d'aquest llibre, hauria aconseguit que fossin menys feixugues.

[*Demostració.*] Considerem el quadrat $\square EFGH$ inscrit en el cercle ○EFGH. [Eɪᴠ6]

Aquest quadrat és més gran que la meitat del cercle ○$EFGH$ ja que, si tirem tangents al cercle pels punts E, F, G i H, [Eɪɪɪ 17] el quadrat $\square EFGH$ val la meitat del quadrat circumscrit al cercle, [Eɪ 47] i el cercle és més petit que el quadrat circumscrit. [Dɪᴠ 2]

Per tant, el quadrat inscrit $\square EFGH$ és més gran que la meitat del cercle $EFGH$. [Nc 4′, porisma]

Ara dimidiem els arcs $\widehat{EF}, \widehat{FG}, \widehat{GH}$ i $\widehat{HE}$ pels punts K, L, M i N[, respectivament]. [Eɪɪɪ 30]

Unim $EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN$ i NE. [Nc 1]

Aleshores tenim que cadascun dels triangles $\triangle EKF, \triangle FLG$, $\triangle GMH$ i $\triangle HNE$ és més gran que la meitat del segment circular que subtendeix ja que, si tirem les tangents al cercle pels punts K, L, M i N, [Eɪɪɪ 17] i completem els paral·lelograms sobre els segments EF, FG, GH i HE, [P 5] cada triangle $\triangle EKF, \triangle FLG$, $\triangle GMH$ i $\triangle HNE$ és la meitat del paral·lelogram corresponent. [Eɪ 41]

Però el segment circular és més petit que cada paral·lelogram.[935]

En definitiva, cadascun dels triangles $\triangle EKF, \triangle FLG, \triangle GMH$ i $\triangle HNE$ és més gran que la meitat del segment circular corresponent.[936] [per substitució]

En conseqüència, si dimidiem els arcs de circumferència que s'han anat determinant [en cada dimidiació] i tirem les cordes corresponents [unint els extrems dels arcs contigus] de manera contínua, aconseguim una quantitat de segments circulars la suma dels quals és més petita que [l'àrea que és] l'excés del cercle ○EFGH sobre l'àrea S.[937] ♠

935. Ja que el circumscriu. Però hem d'estendre la definició Dɪᴠ 2.

936. Aquesta construcció i aquest raonament valen per a una corda qualsevol i el segment circular que subtendeix, amb independència de l'angle central que subtendeix la corda. I això justifica la iteració.

937. Usant un polígon regular P_{2^n}, Euclides ha aconseguit exhaurir el

[*Demostració.*]
a_1) D'acord amb la primera proposició del llibre desè,[938]
si tenim dues magnituds desiguals i de la més gran sostraiem una part més gran que la [seva] meitat,[939]
del residu una [part] més gran que la [seva] meitat,
i iterem [aquest procés de sostracció];
aconseguim[940] una magnitud [eventualment] més petita que la més petita de les dues magnituds considerades inicialment. [Ex 1]

Així doncs, suposem que[, del cercle ○$EFGH$,] n'hem sostret els segments circulars de cordes $EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN$ i NE, [la suma dels quals] és més petita que l'excés del cercle ○$EFGH$ sobre l'àrea S.[941]

Aleshores, el polígon ⬠$EKFLGMHN$ és més gran que aquesta àrea.[942]

Prenem el polígon ⬠$AOBPCQDR$ inscrit en el cercle ○$ABCD$ i semblant al polígon ⬠$EKFLGMHN$.[943] [Evi 18]

El quadrat de costat BD és al de costat FH com el polígon ⬠$AOBPCQDR$ al ⬠$EKFLGMHN$. [Exii 1]

Però també tenim que el quadrat de costat BD és al de costat FH com el cercle ○$ABCD$ a l'àrea S.

---

cercle ○$EFGH$.

938. Aquí queda clara la necessitat del lema precedent.

939. Novament, si dues magnituds són diferents, una és estrictament més gran que l'altra que, al seu torn, és estrictament més petita que la primera.

940. Amb un nombre finit de passos.

941. Per a una exposició més simbòlica, vegeu el problema 29 (pàgina 77) i la nota 947 (pàgina 493).

942. Si, d'una magnitud $\mathfrak{A}$, en sostraiem dues, $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$, i els residus $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}_1$ i $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}_2$ que s'obtenen són diferents —i, de retruc, per exemple, compleixen $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}_1 < \mathfrak{A} - \mathfrak{B}_2$—, aleshores el residu més petit, $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}_1$, l'ha produït la magnitud sostreta més gran, és a dir, $\mathfrak{B}_2 < \mathfrak{B}_1$. Aquesta demostració és un porisma de Nc $4'$.

943. Fins ara solament hem considerat el cercle ○$EFGH$, que hem exhaurit amb un polígon inscrit de 2^n costats, ⬠$EKFLGMHN$. Ara, considerem l'altre cercle, ○$ABCD$, i el polígon inscrit de 2^n costats semblant a l'anterior.

En definitiva, el cercle ○$ABCD$ és a l'àrea S com el polígon [inscrit] ⬠$AOBPGQDR$ al ⬠$EKFLGMHN$. [Ev 11]

Invertendo, el cercle ○$ABCD$ és al polígon [inscrit] com l'àrea S al polígon ⬠$EKFLGMHN$. [Ev 16]

Però el cercle ○$ABCD$ és més gran que el polígon [inscrit ⬠$AOBPGQDR$].

Per tant, l'àrea S ho és més que el polígon ⬠$EKFLGMHN$ [Dv 6]

i, alhora [hipòtesi a)], és més petita que ell. I això és impossible.

En definitiva, el quadrat de costat BD no és al de costat FH com el cercle ○$ABCD$ a [una magnitud S] més petita que el cercle ○$EFGH$.

♠

a_2) Amb el mateix raonament, podem veure que el quadrat de [costat] FH no és al de costat BD com el cercle ○$EFGH$ a una àrea més petita que [la del cercle] ○$ABCD$.[944] ♠

Ara afirmo que el quadrat de [costat] BD no és al de costat FH com el cercle ○$ABCD$ a una àrea més gran que [la d]el cercle ○$EFGH$.[945]

b) Si és possible,[946]

sigui l'àrea S més gran [que el cercle ○$EFGH$].

Aleshores, *invertendo*, el quadrat de costat FH és al de costat DB com l'àrea S al cercle ○$ABCD$. [Ev 7, porisma]

Però l'àrea S és al cercle ○$ABCD$ com el ○$EFGH$ a una àrea més petita que el primer cercle. [lema següent]

Aleshores, el quadrat de [costat] FH és al de costat BD com el cercle ○$EFGH$ a una àrea més petita que el cercle ○$ABCD$. [Ev 11]

I això és impossible. [per a_1] ♠

Aleshores, no és possible que el quadrat de costat BD sigui al de costat FH com el cercle ○$ABCD$ a una àrea més gran que el cercle ○$EFGH$.

I hem vist que tampoc no ho és a una de més petita.

---

944. De fet, aquesta observació és supèrflua.

945. Admesa l'afirmació anterior, aquesta afirmació és immediata. Vegeu la nota 947.

946. Hipòtesi de l'absurd.

En conseqüència, el quadrat de costat BD és al de costat FH com el cercle $\circ ABCD$ al $\circ EFGH$. ♠

En definitiva, la raó entre els cercles és la dels quadrats dels [seus] diàmetres.

I això és el que volíem demostrar. ♠[947]

Exii 2, lema. *Si S és una àrea més gran que [la d]el cercle $\circ EFGH$, S és al cercle $\circ ABCD$ com el cercle $\circ EFGH$ a una àrea més petita que [la d]el cercle $\circ ABCD$.*

[*Demostració.*] Hem vist que l'àrea S és al cercle $\circ ABCD$ com el cercle $\circ EFGH$ a una àrea T.

Afirmo que l'àrea T és més petita que el cercle $\circ ABCD$.

Atès que l'àrea S és al cercle $\circ ABCD$ com el $\circ EFGH$ a l'àrea T,

---

947. Si Euclides hagués presentat la dicotomia $\frac{S_1}{S_2} > \frac{d_1^2}{d_2^2}$ o $\frac{S_1}{S_2} < \frac{d_1^2}{d_2^2}$, n'hauria tingut prou amb demostrar un cas i, després, aplicant *invertendo*, hauria pogut reduir el segon cas al primer.

Però no ho fa així sinó amb l'ajuda del lema. Es basa en l'«element» Evi 12′. La demostració procedeix d'aquesta manera:

Siguin S_1 i S_2 dos cercles de diàmetres d_1 i d_2. Considerem els quadrats de costats d_1 i d_2. Per l'element Evi 12′, existeix una quarta proporcional S, és a dir, $\frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{S_1}{S}$. Aleshores, necessàriament, $S = S_2$, atès que no és possible que $S < S_2$ ni tampoc que $S > S_2$ (disjunció de casos).

a) Suposem que $\frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{S_1}{S}$, amb $S < S_2$ (hipòtesi de l'absurd). Exhaurim S_2 amb un polígon P_{2^n} de 2^n costats —cosa que Euclides estableix dins la demostració—, de manera que $S_2 - P_{2^n} < S_2 - S$. Per tant, $S < P_{2^n}$. Tenim que $\frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{p_{2^n}}{P_{2^n}} = \frac{S_1}{S}$ [Ev 11]. I, per Ev 11, que $\frac{S_1}{p_{2^n}} = \frac{S}{P_{2^n}}$, amb $p_{2^n} < S_1$ i $S < P_{2^n}$, que és impossible per Dv 5.

b) Suposem que $\frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{S_1}{S}$, amb $S > S_2$ (hipòtesi de l'absurd), i ho reduïm al cas *a*. Però necessitem un lema:

[Lema.] Si $S > S_2$, existeix un $T < S_1$ que satisfà: $\frac{S}{S_1} = \frac{S_2}{T}$.

Invertendo [Ev 7, porisma]: $\frac{d_2^2}{d_1^2} = \frac{S}{S_1}$, amb $S > S_2$. Pel lema, $\frac{S}{S_1} = \frac{S_2}{T} = \frac{d_2^2}{d_1^2}$ i $S_1 > T$. I la segona igualtat no es pot donar atès el cas *a*.

[Demostració del lema.] Donats S, S_1 i S_2, existeix la quarta proporcional T (Evi 12′). Hem de demostrar que $T < S_1$. Per Ev 16: $\frac{S}{S_1} = \frac{S_2}{T}$ implica $\frac{S}{S_2} = \frac{S_1}{T}$ i $S > S_2$. Per Dv 5: $T < S_1$.

alternando, l'àrea S és al cercle $\circ EFGH$ com el $\circ ABCD$ a l'àrea T, [Ev 16]

i l'àrea S és més gran que el cercle $\circ EFGH$.

Aleshores, $\circ ABCD$ és més gran que l'àrea T. [Ev 14]

En definitiva, l'àrea S és al cercle $\circ ABCD$ com el $\circ EFGH$ a una àrea més petita que el cercle $\circ ABCD$.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exii 3. *Podem dividir qualsevol piràmide de base triangular en dues de bases triangulars equivalents semblants entre si i a la piràmide [inicial], i en dos prismes equivalents que sumen més de la meitat de la piràmide inicial.*[948]

Considerem una piràmide de base el triangle $\triangle ABC$ i vèrtex el punt D.

Afirmo que la podem dividir en dues piràmides de bases triangulars iguals entre si i semblants a la [piràmide] inicial [$ABCD$],

i en dos prismes iguals la suma dels quals és més gran que la meitat de la piràmide inicial.

[*Construcció*.] Dimidiem les arestes AB, BC, CA, AD, DB i DC pels punts E, F, G, H, K i L[, respectivament]. [Ei 10]

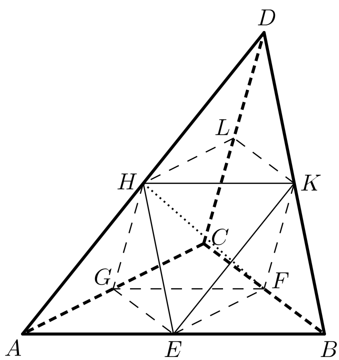


Figura Exii 3

948. Deixeu que insistim en el fet que aquest és l'«element» que li cal per poder aplicar el mètode d'exhaustió a la piràmide. És una proposició molt enginyosa i d'una gran habilitat, que podem comparar amb la descomposició que segles més tard faria Liu Hui (vegeu Pla (2009), p. 149-150). És un «element» de les proposicions que porten a la proposició clau Exii 7: «Tot prisma triangular admet una descomposició en tres piràmides equivalents.» Avui diríem: «El volum d'una piràmide de base triangular és igual a una tercera part del volum del prisma de la mateixa base i la mateixa altura.» Aquesta proposició és el fonament de la teoria dels volums de l'obra d'Euclides.

Unim $HE, EG, GH, HK, KL, LH, KF$ i FG.[949] [P1] ♣[950]

[*Demostració.*] Atès que AE i AH són iguals a EB i DH[, respectivament],

[els segments] EH i DB són paral·lels. [E VI 2]

Pel mateix [raonament], HK i AB també ho són.

Aleshores, $\square HEBK$ és un paral·lelogram

i, per tant, [els segments] HK i EB són iguals. [E I 34]

Però EB és igual a EA.

Per tant, AE és igual a HK, i AH a HD. [Nc 1]

Així doncs, els [segments] EA i AH són iguals a KH i HD, respectivament,

i els angles $\widehat{EAH}$ i $\widehat{KHD}$ també ho són entre si. [E I 29]

Aleshores, les bases EH i KD, també. [E I 4]

En definitiva, els triangles $\triangle AEH$ i $\triangle HKD$ són iguals i semblants. [E I 4][951]

Pel mateix raonament, els triangles $\triangle AHG$ i $\triangle HLD$ també ho són.

Atès que els segments [de les parelles] que es tallen, EH i HG,

i KD i DL són paral·lels, respectivament,

però que no són al mateix pla,

resulta que formen angles iguals. [E XI 10]

Aleshores, els angles $\widehat{EHG}$ i $\widehat{KDL}$ són iguals.

Per tant, com que els dos segments EH i HG són iguals als dos segments KD i DL, respectivament,

i els angles $\widehat{EHG}$ i $\widehat{KDL}$ són iguals;

les bases EG i KL també [ho són]. [E I 4]

En definitiva, els triangles $\triangle EHG$ i $\triangle KDL$ són iguals i semblants.[951]

Amb el mateix raonament, resulta que els triangles $\triangle AEG$ i $\triangle HKL$ també ho són.

Aleshores, la piràmide de base el triangle $\triangle AEG$

---

949. Hem dividit la piràmide $ABCD$ en quatre cossos. I hem de demostrar que tenen les propietats descrites.

950. Fixem-nos en la senzillesa de la descomposició: dimidiar les arestes i unir els punts mitjans dos a dos. Compareu-la amb la de Liu Hui.

951. És a dir, són superposables.

i vèrtex el punt H és igual i semblant a la piràmide de base el triangle $\triangle\, HKL$ i vèrtex el punt D.[952] [DXI 10]

Atès que hem tirat HK paral·lel a un dels costats, AB, del triangle $\triangle\, ADB$,
resulta que el triangle $\triangle\, ADB$ és equiangular amb el triangle $\triangle\, DHK$, [EI 29]
i tots dos tenen els costats proporcionals.

Per tant, els triangles $\triangle\, ADB$ i $\triangle\, DHK$ són semblants. [DVI 1]

Amb el mateix raonament, els triangles $\triangle\, DBC$ i $\triangle\, DKL$ també ho són,
i [els] $\triangle\, ADC$ i $\triangle\, DLH$ [també].

Dos segments que es tallen, BA i AC, paral·lels a dos segments que es tallen, KH i HL,
però que no són al mateix pla,
formen angles iguals. [EXI 10]

En conseqüència, els angles $\widehat{BAC}$ i $\widehat{KHL}$ són iguals,
i BA és a AC com KH a HL.[953]

Aleshores, els triangles $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, HKL$ són semblants. [EVI 6]

Per tant, la piràmide de base el triangle $\triangle\, ABC$ i vèrtex el punt D és semblant a la de base el triangle $\triangle\, HKL$ i vèrtex el punt D. [DXI 9]

Però hem vist que aquesta piràmide també és semblant a la de base el triangle $\triangle\, AEG$ i vèrtex el punt H.

Així doncs, cadascuna de les piràmides ◬ $AEGH$ i ◬ $HKLD$ és semblant a la piràmide inicial ◬ $ABCD$. [Nc 1][954]

I, atès que BF i FC són iguals,
el paral·lelogram ▱ $EBFG$ equival al doble del triangle $\triangle\, GFC$. [EI 41]

I, si dos prismes tenen la mateixa altura,
el primer té un paral·lelogram com a base i el segon un triangle
i el paral·lelogram [equival] al doble del triangle,
els prismes són equivalents. [EXI 39]

952. És a dir, són superposables.

953. Per construcció, EV 15; i, per substitució, EV 7 iterat: $\frac{AB}{AC} = \frac{2\,AE}{2\,AG} = \frac{AE}{AG} = \frac{KH}{HL}$.

954. Usa: «Dos sòlids semblants a un tercer són semblants entre si.»

És a dir, el prisma determinat pels dos triangles $\triangle BKF$ i $\triangle EHG$,
i els tres paral·lelograms ▱ $EBFG$, ▱ $EBKH$ i ▱ $HKFG$,
equival al determinat pels dos triangles $\triangle GFC$ i $\triangle HKL$,
i els tres paral·lelograms ▱ $KFCL$, ▱ $LCGH$ i ▱ $HKFG$.

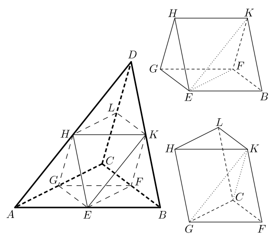
En definitiva, cadascun dels [dos] prismes,
el de bases oposades al paral·lelogram ▱ $EBFG$ i el segment HK,
i el de [bases oposades] als triangles $\triangle GFC$ i $\triangle HKL$,
és més gran que cadascuna de les piràmides de bases els triangles $\triangle AEG$ i $\triangle HKL$, i vèrtexs els punts H i D[, respectivament].[955]

Si unim els segments EF i EK, [P 1]
tenim que el prisma de base el paral·lelogram ▱ $EBFG$ i [cara] oposada al segment HK
és més gran que la piràmide de base el triangle $\triangle EBF$ i vèrtex el punt K.

Però aquesta piràmide equival a la de base el triangle $\triangle AEG$ i vèrtex el punt H,
ja que [totes dues piràmides estan determinades] per plans iguals i semblants.[956]

I, atès que el prisma de base el paral·lelogram ▱ $EBFG$ i [cara] oposada al segment HK és més gran que la piràmide de base el triangle $\triangle AEG$ i vèrtex el punt H,
que aquest prisma equival al de base el triangle $\triangle GFC$ i [cara] oposada al triangle $\triangle HKL$,
i que la piràmide de base el triangle $\triangle AEG$ i vèrtex el punt H equival a la piràmide de base el triangle $\triangle HKL$ i vèrtex el punt D,

955. Ho hem explicitat a la figura següent, en la qual hem extret, de la piràmide ◬ $ABCD$, dos prismes: a) el de bases triangulars $\triangle BFK$ i $\triangle EGH$, i costats oposats [el paral·lelogram] ▱ $EBFG$ i [el segment] HK, i b) el de bases triangulars $\triangle HKL$ i $\triangle FGC$ i costats els paral·lelograms ▱ $CFKL$, ▱ $FGHK$ i ▱ $CGHL$. En cada un dels prismes hem posat en relleu la piràmide ◬ $BEFK$, que és igual a la ◬ $HKLD$.



956. I tenen la mateixa altura.

resulta que la [suma dels] dos prismes [esmentats] és més gran que la [suma] de les dues piràmides de bases els triangles $\triangle AEG$ i $\triangle HKL$ i vèrtexs els punts H i D[, respectivament]. [Nc 4′]

En definitiva, la piràmide inicial, de base el triangle $\triangle ABC$ i vèrtex el punt D, l'hem dividit en dues piràmides equivalents entre si [i semblants a la inicial], i en prismes equivalents.

I [ho hem fet] de manera que la [suma dels] dos prismes és més gran que la meitat de la piràmide inicial.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exii 4. *Considerem dues piràmides amb les bases triangulars i la mateixa altura. Suposem que hem dividit cadascuna en dues piràmides equivalents entre si i semblants a la inicial, i en dos prismes equivalents. Aleshores, la raó de les bases de les piràmides és la que hi ha entre* [*la suma de tots*] *els prismes d'una piràmide i* [*la suma de tots*] *els prismes de l'altra.*[957]

Considerem dues piràmides de la mateixa altura, de bases triangulars $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$, i vèrtexs els punts G i H[, respectivament].

Les trossegem en dues piràmides equivalents i semblants a la inicial, i en dos prismes equivalents. [Exii 3]

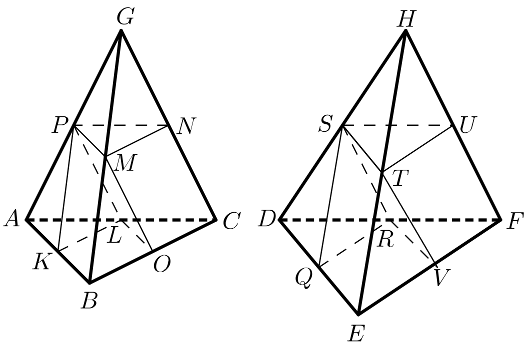


Figura Exii 4

Afirmo que la base $\triangle ABC$ és a la base $\triangle DEF$ com [la suma d]els prismes de la piràmide $ABCG$ a [la suma d]els prismes de la piràmide $DEFH$.

957. Quin resultat més inesperat: la suma dels volums dels prismes és com la de les bases triangulars. Aquesta proposició és un «element» de la següent. Fixem-nos en aquest fet: atès que les dues piràmides tenen la mateixa altura, hi ha una certa proporcionalitat entre les bases i una certa part molt ben determinada del volum de la piràmide. Novament, establim una proporció entre raons de magnituds de classes diferents però de la mateixa classe dues a dues. La demostració conté un procés d'iteració.

[*Demostració.*][958] Atès que [els segments] BO i AL són iguals [respectivament] als [segments] OC i LC;
[els segments] LO i AB són paral·lels, i els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle LOC$ semblants. [EVI 2]

Pel mateix [raonament], els triangles $\triangle DEF$ i $\triangle RVF$ també són semblants.

I, atès que [els segments] BC i EF són el doble de[ls] CO i FV[, respectivament],
BC és a CO com EF a FV. [EV 15]

A[ls segments] BC i CO hem descrit les figures rectilínies $\triangle ABC$ i $\triangle LOC$ semblants col·locades de manera semblant,
i a[ls segments] EF i FV, les [figures] $\triangle DEF$ i $\triangle RVF$ també semblants col·locades de manera semblant.

Aleshores, el triangle $\triangle ABC$ és al $\triangle LOC$ com el triangle $\triangle DEF$ al $\triangle RVF$. [EVI 22]

Alternando, el triangle $\triangle ABC$ és al $\triangle DEF$ com el $\triangle LOC$ al $\triangle RVF$. [EV 16]

Però el triangle $\triangle LOC$ és al $\triangle RVF$ com el prisma de base el triangle $\triangle LOC$ i [costat] oposat [el triangle] $\triangle PMN$ al prisma de base el triangle $\triangle RVF$ i [costat] oposat [el triangle] $\triangle STU$.
[pel lema següent]

Aleshores, el triangle $\triangle ABC$ és al $\triangle DEF$
com el prisma de base el triangle $\triangle LOC$ i [cara] oposada [el triangle] $\triangle PMN$ és al prisma de base el triangle $\triangle RVF$ i [cara] oposada [el triangle] $\triangle STU$.

I els prismes esmentats són entre si com el prisma de base el paral·lelogram $\square KBOL$ i [costat] oposat el segment PM és al prisma de base el paral·lelogram $\square QEVR$ i [costat] oposat el segment ST.
[EXI 39 i EXII 3]

I també com la suma del prisma de base el paral·lelogram $\square KBOL$ i [costat] oposat [el segment PM] i el de base [el triangle] $\triangle LOC$ i [costat] oposat [el triangle] $\triangle PMN$ és a la suma del prisma de base

958. Li cal un lema que enuncia de manera explícita i demostra un cop acabada aquesta demostració.

el ▱ $QEVR$ i [costat] oposat el segment ST i el de base el triangle $\triangle\, RVF$ i [costat] oposat [el triangle] $\triangle\, STU$. [Ev 12]

D'això en resulta que la base $\triangle\, ABC$ és a la $\triangle\, DEF$ com la suma dels dos primers prismes a la dels dos segons.[959] [Nc 1] ♠

I, amb el mateix raonament,[960] si hem trossejat [dues] piràmides ◬ $PMNG$ i ◬ $STUH$ en dos prismes i dues piràmides,
la base $\triangle\, PMN$ és a la $\triangle\, STU$ com [la suma de]ls dos prismes de la piràmide ◬ $PMNG$ a [la suma d]els dos de la piràmide ◬ $STUH$.

Però la base $\triangle\, PMN$ és a la $\triangle\, STU$ com la base $\triangle\, ABC$ a la $\triangle\, DEF$.

I els triangles $\triangle\, PMN$ i $\triangle\, STU$ són iguals als $\triangle\, LOC$ i $\triangle\, RVF$, respectivament. [demostrat a Exii 3]

Aleshores, la base $\triangle\, ABC$ és a la $\triangle\, DEF$ com [la suma d]els quatre prismes a [la suma d]els quatre prismes. [Ev 12]

De manera semblant, si dividim la piràmide de l'esquerra en dues piràmides i dos prismes, la base $\triangle\, ABC$ és a la $\triangle\, DEF$ com [la suma d]els prismes de la piràmide ◬ $ABCG$ a [la d]els prismes de la ◬ $DEFH$.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exii 4, lema. *Volem establir que el triangle $\triangle\, LOC$ és al $\triangle\, RVF$ com el prisma de base el triangle $\triangle\, LOC$ i [costat] oposat $\triangle\, PMN$ al de base el [triangle] $\triangle\, RVF$ i [costat] oposat $\triangle\, STU$.*

[*Demostració.*] A la mateixa figura, considerem les perpendiculars als plans ⏥ ABC i ⏥ DEF, pels [punts] G i H[, respectivament]. Exi 11]

959. Vegem els passos de manera sintètica. Un cop aclarit com són els triangles i el paral·lelogram de la base, tenim que $\frac{\triangle ABC}{\triangle LOC} \underset{\text{Evi 22}}{=} \frac{\triangle DEF}{\triangle RVF}$.

D'on: $\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} \underset{\text{Ev 16}}{=} \frac{\triangle LOC}{\triangle RVF} \underset{\text{lema}}{=} \frac{⬡\, LOC;PMN}{⬡\, RVF;STU} \underset{\text{Exi 39; Exii 3}}{=} \frac{⬡\, KBOLC;PM}{⬡\, QEVR;ST}$.

I, per tant: $\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} \underset{\text{Ev 12}}{=} \frac{⬡\, LOC;PMN + ⬡\, KBOLC;PM}{⬡\, RVF;STU + ⬡\, QEVR;ST}$.

960. Iterem el procés. Els dos prismes en els quals queden trossejades les piràmides ◬ $G;MNP$ i ◬ $H;STU$ són com les bases $\triangle\, MNP$ i $\triangle\, STU$; i les piràmides ◬ $P;ABO$ i ◬ $S;DEV$ com les bases $\triangle\, ABO$ i $\triangle\, DEV$. Però aquestes bases són com els respectius triangles $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, DEF$. Aleshores, apliquem Ev 12 i resulta que les sumes dels quatre prismes corresponents són entre si com les bases de les piràmides inicials.

Atès que hem suposat que les piràmides tenen la mateixa altura, és evident que [aquestes perpendiculars] són iguals.[961]

I, com que els dos segments, GC i el perpendicular per G,
són tallats pels plans paral·lels ▱ ABC i ▱ PMN,
resulta que ho són [en segments] amb les mateixes raons, [Exi 17]
i que GC és dimidiat pel pla ▱ PMN per [el punt] N. [Evi 2]

Aleshores, el [segment] perpendicular al pla ▱ ABC per G també ho és.

Pel mateix [raonament], el [segment] perpendicular al pla ▱ DEF per H és dimidiat pel pla ▱ STU,
i els [segments] perpendiculars als plans ▱ ABC i ▱ DEF per G i H són iguals[, respectivament].

Aleshores, els [segments] perpendiculars que van dels triangles $\triangle\, PMN$ i $\triangle\, STU$ als triangles $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, DEF$ també [ho són].

Per tant, els prismes de bases els triangles $\triangle\, LOC$ i $\triangle\, RVF$ i [costats] oposats $\triangle\, PMN$ i $\triangle\, STU$ tenen la mateixa altura.

D'això en resulta que els paral·lelepípedes sòlids determinats pels prismes esmentats també la tenen i són entre si com les bases respectives. [Exi 32]

I, de retruc, les seves meitats també ho són. [Exi 28]

En definitiva, la base $\triangle\, LOC$ és a la $\triangle\, RVF$ com els prismes esmentats entre si.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exii 5. *La raó de les piràmides que tenen bases triangulars i la mateixa altura és la de les seves bases.*

Siguin ◬ $ABCG$ i ◬ $DEFH$ [dues] piràmides de la mateixa altura, de bases els triangles $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, DEF$, i vèrtexs els punts G i H [respectivament].

Afirmo que la base $\triangle\, ABC$ és a la base $\triangle\, DEF$ com la piràmide ◬ $ABCG$ a la piràmide ◬ $DEFH$.

961. L'altura [d'una piràmide respecte d'una cara] la determina precisament la perpendicular pel vèrtex [oposat a la cara, la qual es considera que és la base]. Amb aquestes paraules, a Dvi 4, Euclides ho justifica per a figures planes. Hem de suposar que aquesta també és la definició en el cas dels sòlids.

[*Demostració*.] Si la base $\triangle ABC$ no és a la $\triangle DEF$ com la piràmide ◬ $ABCG$ a la ◬ $DEFH$,[962]
la base $\triangle ABC$ és a la base $\triangle DEF$ com la piràmide ◬ $ABCG$ a un sòlid que té una d'aquestes dues característiques:[963]

a) És més petit que la piràmide ◬ $DEFH$.

b) És més gran que la piràmide ◬ $DEFH$.[964]

a) [En aquesta primera possibilitat distingim dos casos.][965]

a_1) En primer lloc, suposem que aquest sòlid és proporcional a un sòlid ▱ W més petit [que la piràmide ◬ $DEFH$]. La trossegem en dues d'equivalents entre si i semblants a la inicial, i en dos prismes equivalents.[966]

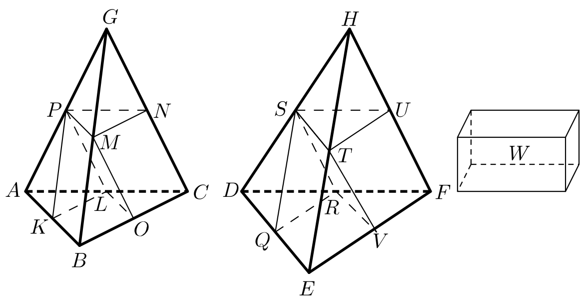


Figura Exii 5

Tenim que la suma dels dos prismes és més gran que la meitat de la piràmide inicial. [Exii 3]

Novament, considerem que les piràmides generades per la divisió han estat trossejades de manera semblant.

Iterem aquest procés fins que aconseguim unes piràmides que, sostretes de la piràmide ◬ $DEFH$, proporcionen un residu més petit que l'excés de la piràmide ◬ $DEFH$ sobre el sòlid ▱ W.[967] [Ex 1]

Siguin quines siguin aquestes piràmides —per exemple, ◬ $DPRS$ i ◬ $STUH$—, les traiem.

962. Hipòtesi de l'absurd.

963. Disjunció de casos.

964. Aquí Euclides suposa que, donats tres sòlids, sempre n'existeix un quart que n'és la quarta proporcional. Vegeu la nota 931 (pàgina 488).

965. Disjunció de casos.

966. Tal com s'ha descrit a Exii 3.

967. Com ja hem indicat abans, podem aplicar l'exhaustió gràcies a Exii 3.

D'això en resulta que [la suma d]els prismes de la piràmide $DEFH$ és més gran que el sòlid W.[968]

Ara, fem el mateix procés amb la piràmide $ABCG$.

És a dir, la dividim de manera anàloga a com ho hem fet amb la $DEFH$ el mateix nombre de vegades.[969]

Aleshores, la base $\triangle ABC$ és a la $\triangle DEF$ com la [suma] dels prismes de la piràmide $ABCG$ a la dels prismes de la piràmide $DEFH$.[970] [Exii 4]

Però també tenim que la base $\triangle ABC$ és a la $\triangle DEF$ com la piràmide $ABCG$ al sòlid W.

Per tant, la piràmide $ABCG$ és al sòlid W com la [suma] dels seus prismes [interiors] $ABCG$ a la [suma] dels prismes de la piràmide $DEFH$. [Ev 11]

I, *alternando*, la piràmide $ABCG$ és a la [suma] dels prismes interiors com el sòlid W a la [suma] dels prismes de la piràmide $DEFH$, [Ev 16]
i la piràmide $ABCG$ és més gran que la [suma dels] prismes [interiors].

Aleshores, el sòlid W també ho és més que la [suma] dels prismes [interiors] a la piràmide $DEFH$. [Ev 14]

Però també és més petit que aquesta suma. I això és impossible.

Així doncs, la base $\triangle ABC$ no és a la $\triangle DEF$ com la piràmide $ABCG$ a un sòlid més petit que la piràmide $DEFH$. ♠

a_2) Ara, amb un raonament anàleg, podem veure que la base $\triangle DEF$ no és a la base $\triangle ABC$ com la piràmide $DEFH$ a un sòlid més petit que la piràmide $ABCG$. ♠

b) En segon lloc, afirmo que no és possible que la $\triangle ABC$ sigui a la $\triangle DEF$ com la piràmide $ABCG$ a un sòlid més gran que la piràmide $DEFH$.

---

968. Tenim que $\sum$ piràmides $=$ $DEFH - \sum$ prismes $<$ $DEFH -$ W. O sigui, $\sum$ prismes $>$ W. Com ja hem indicat a la nota 942 (pàgina 491), Euclides accepta, de manera natural, que, donades tres magnituds, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ i $\mathfrak{C}$, si $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} < \mathfrak{A} - \mathfrak{C}$, aleshores $\mathfrak{B} > \mathfrak{C}$.

969. Compareu tot aquest procés amb el que Euclides fa servir a Exii 2.

970. La propietat es manté quan iterem el procés de subdivisió.

Si ho és,[971]
suposem que ho és [amb la raó que hi ha] entre ella i un [sòlid] més gran W.

Aleshores, *invertendo*, la base $\triangle\, DEF$ és a la $\triangle\, ABC$ com el sòlid W a la piràmide $ABCG$, [Ev 7, porisma]
i el sòlid W és a la piràmide $ABCG$ com la piràmide $DEFH$ a un [sòlid] més petit que la primera piràmide. [Exii 2, lema]

I, aleshores, la base $\triangle\, DEF$ és a la $\triangle\, ABC$ com la piràmide $DEFH$ a un [sòlid] més petit que la piràmide $ABCG$. [Ev 11]
I hem vist que això és absurd. ♠

En definitiva, no és possible que la base $\triangle\, ABC$ sigui a la $\triangle\, DEF$ com la piràmide $ABCG$ a un sòlid més gran que la piràmide $DEFH$.

I hem vist que entre ella i un sòlid més petit tampoc no hi ha la mateixa raó.

De tot això en resulta que la base $\triangle\, ABC$ és a la $\triangle\, DEF$ com la piràmide $ABCG$ a la $DEFH$.
I això és el que volíem demostrar. ♠

Exii 6. *La raó de les piràmides que tenen bases poligonals i de la mateixa altura és la de les seves bases.*[972]
Considerem [dues] piràmides [$ABCDE$ i $FGHKL$] de la mateixa altura, bases els polígons $ABCDE$ i $FGHKL$, i vèrtexs [respectius] els punts M i N.

Afirmo que les bases $ABCDE$ i $FGHKL$ són entre si com les piràmides $ABCDEM$ i $FGHKLN$.
[*Demostració.*] Unim AC, AD, FH i FK. [P 1]

Aleshores, atès que les dues piràmides $ABCM$ i $ACDM$ tenen bases triangulars i la mateixa altura,
resulta que són entre si com les bases [respectives]. [Exii 5]

És a dir, la base $\triangle\, ABC$ és a la $\triangle\, ACD$ com la piràmide $ABCM$ a la $ACDM$.

971. Hipòtesi de l'absurd.

972. És un porisma immediat d'Exii 5, resultat de triangular la base i aplicar Ev 16.

I, *componendo*, la base ⬠ $ABCD$ és a la △ ACD com la piràmide ◬ $ABCDM$ a la ◬ $ACDM$. [Ev 18]

Però la base △ ACD és a la △ ADE com la piràmide ◬ $ACDM$ a la ◬ $ADEM$. [Exii 5]

Aleshores, *ex æquali*, la base ⬠ $ABCD$ és a la △ ADE com la piràmide ◬ $ABCDM$ a la ◬ $ADEM$. [Ev 22]

De bell nou, *componendo*, la base poligonal ⬠ $ABCDE$ és a la △ ADE com la piràmide ◬ $ABCDEM$ a la ◬ $ADEM$. [Ev 18]

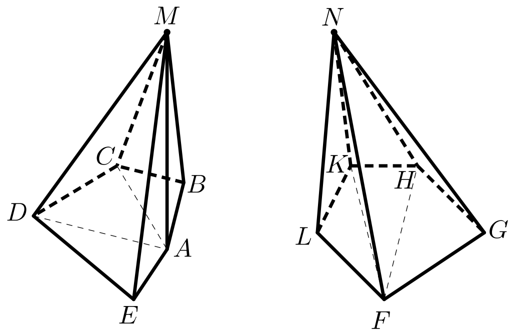


Figura Exii 6

De manera semblant,
podem veure que la base ⬠ $FGHKL$ és a la △ FGH com la piràmide ◬ $FGHKLN$ a la ◬ $FGHN$.

A més, atès que les dues piràmides ◬ $ADEM$ i ◬ $FGHN$ tenen les bases triangulars i la mateixa altura,
resulta que la base △ ADE és a la △ FGH com la piràmide ◬ $ADEM$ a la ◬ $FGHN$. [Exii 5]

Però la base △ ADE és a la ⬠ $ABCDE$ com la piràmide ◬ $ADEM$ a la ◬ $ABCDEM$.

Aleshores, *ex æquali*, la base ⬠ $ABCDE$ és a la △ FGH com la piràmide ◬ $ABCDEM$ a la ◬ $FGHN$. [Ev 22]

Però, a més, la base △ FGH és a la ⬠ $FGHKL$ com la piràmide ◬ $FGHN$ a la ◬ $FGHKLN$.

Finalment, *ex æquali*, la base ⬠ $ABCDE$ és a la ⬠ $FGHKL$ com la piràmide ◬ $ABCDEM$ a la ◬ $FGHKLN$. [Ev 22]

I això és el que volíem demostrar. ♠

EXII 7. *Tot prisma de base triangular es descompon en tres piràmides equivalents de base triangular.*[973]

Considerem un prisma de base el triangle $\triangle\, ABC$ i costat oposat el $\triangle\, DEF$.

Afirmo que podem trossejar el prisma $ABCDEF$ en tres piràmides equivalents de base triangular.

[*Construcció.*] Unim BD, EC i CD. [P 1] ♣

[*Demostració.*] Atès que $\square\, ABED$ és un paral·lelogram i que BD n'és la diagonal,

els triangles $\triangle\, ABD$ i $\triangle\, EBD$ són equivalents.[974] [EI 34]

Així doncs, la piràmide de base el triangle $\triangle\, ABD$ i vèrtex el punt C és equivalent a la piràmide de base el triangle $\triangle\, DEB$ i vèrtex el punt C. [EXII 5]

Però les piràmides de bases els triangles $\triangle\, DEB$ i $\triangle\, EBC$, i vèrtexs els punts C i D[, respectivament], són equivalents

ja que es troben entre els mateixos plans.[975]

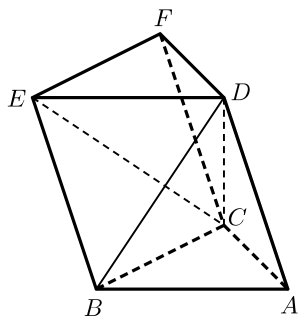


FIGURA EXII 7

Aleshores, les piràmides de base $\triangle\, ABD$ i vèrtex el punt C, i de base $\triangle\, EBC$ i vèrtex el punt D també ho són. [Nc 1][976]

973. Aquí Euclides inicia el camí que li permet comparar els volums de les piràmides i els prismes de la mateixa base i la mateixa altura amb raons.

974. De fet, són superposables.

975. Heus aquí un ús molt interessant de la nomenclatura simbòlica: dues maneres diferents de designar una mateixa piràmide que, per tant, cubica el que cubica. És a dir, les piràmides tenen els mateixos costats i els mateixos vèrtexs. En un cas, distingim un costat com a base i el vèrtex oposat com a vèrtex i, en l'altre, canviem la base, que és una altra cara de la mateixa piràmide, i el vèrtex corresponent. La piràmide, entesa com a cos, és la mateixa i, per tant, es «designa» d'aquesta manera una mateixa piràmide, que cubica el que cubica.

976. Recordem que, per Euclides, l'equivalència és una mena d'igualtat.

Novament, atès que ▱ $FCBE$ és un paral·lelogram
i que CE n'és la diagonal,
els triangles $\triangle\, CEF$ i $\triangle\, CBE$ són equivalents. [EI 34]

Aleshores, les piràmides de bases els triangles $\triangle\, BCE$ i $\triangle\, ECF$, i vèrtex el punt D, són equivalents. [EXII 5]

Però hem vist que la piràmide de base el triangle $\triangle\, BCE$ i vèrtex el punt D és equivalent a la de base el triangle $\triangle\, ABD$ i vèrtex el punt C.

Per tant, la piràmide de base el triangle $\triangle\, CEF$ i vèrtex el punt D, i la de base el triangle $\triangle\, ABD$ i vèrtex el punt C, també ho són. [Nc 1]

Així doncs, hem trossejat el prisma ⬠ $ABCDEF$ en tres piràmides equivalents de bases triangulars.[977] ♠

[*Porisma.*][978] Atès que la piràmide de base el triangle $\triangle\, ABD$ i vèrtex el punt C equival a la de base el triangle $\triangle\, CAB$ i vèrtex el punt D,
ja que es troben entre els mateixos plans,[979]
i que també equival a la piràmide de base el triangle $\triangle\, ABD$ i vèrtex el punt C;
resulta que hem demostrat que cubica una tercera part del que [cubica] el prisma de base el triangle $\triangle\, ABC$ i [costat] oposat el $\triangle\, DEF$.

En definitiva, doncs, la piràmide de base el triangle $\triangle\, ABC$ i vèrtex el punt D també [cubica] una tercera part del prisma amb la mateixa base —el triangle $\triangle\, ABC$— i [costat] oposat [el triangle] $\triangle\, DEF$.♠

[EXII 7, porisma.] *Tota piràmide cubica una tercera part del [que cubica] el prisma que té la base equivalent i la mateixa altura.*[980] ♠

977. Les tres piràmides són: ◬ $C; ABD$, ◬ $C; BDE$ i ◬ $C; DEF$, que podem reescriure d'altres maneres.

978. Euclides n'extreu, com a conseqüència, que una piràmide de base triangular cubica la tercera part del prisma que té la mateixa base i la mateixa altura. Inclou aquesta proposició dins la demostració d'EXII 7 i després l'enuncia en general.

979. Vegeu la nota 975 (pàgina 506).

980. Per triangulació, com a EXII 6 (pàgina 504).

Exii 8. *Les piràmides triangulars semblants tenen entre si una raó que és el cub de la raó dels seus costats respectius.*[981]

Tenin dues piràmides semblants col·locades de manera semblant, de bases [els triangles] $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$, i vèrtexs [respectius] els punts G i H.

Afirmo que la raó de les piràmides ◬ $ABCG$ i ◬ $DEFH$ és el cub de la raó[982] de[ls costats] BC i EF.

[*Demostració.*] Completem els paral·lelepípedes corresponents a cada piràmide.

Siguin ⬭ $BGML$ i ⬭ $EHQP$. [P 5]

Atès que les piràmides ◬ $ABCG$ i ◬ $DEFH$ són semblants, els angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{GBC}$ i $\widehat{ABG}$ són iguals als $\widehat{DEF}$, $\widehat{HEF}$ i $\widehat{DEH}$[, respectivament].

I AB és a DE com BC a EF, i BG a EH. [Exi 9]

I, com que AB és a DE com BC a EF i els costats que formen angles iguals són proporcionals,

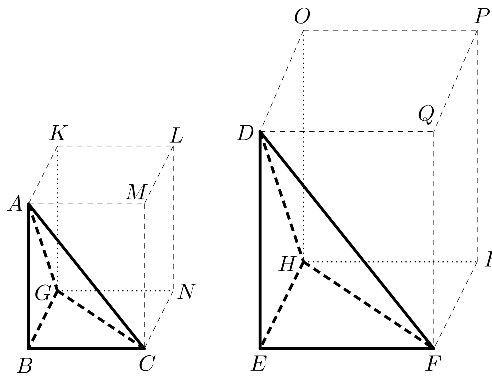


Figura Exii 8

els paral·lelograms ▱ BM i ▱ EQ són semblants. [Dvi 1]

Pel mateix [raonament], [els paral·lelograms] ▱ BN i ▱ BK són semblants als ▱ ER i ▱ EO[, respectivament].

I els [paral·lelograms] ▱ MB, ▱ BK i ▱ BN ho són als ▱ EQ, ▱ EO i ▱ ER[, respectivament]. [Ev 11]

Però, alhora, també són equivalents i semblants als oposats, i els ▱ EQ, ▱ EO i ▱ ER també ho són als seus. [Exi 24]

981. Com que podem completar-los fins a fer-ne paral·lelepípedes [P 5], aquesta proposició i la següent són porismes immediats dels resultats corresponents per a paral·lelepípedes [d'Exi 33].

982. La raó triple.

Per tant, els sòlids $BGML$ i $EHQP$ estan constituïts per un mateix nombre de plans semblants [col·locats de manera semblant].

Així doncs, el sòlid $BGML$ és semblant al $EHQP$. [Dxi 9]

I paral·lelepípedes semblants tenen [entre si] la raó al cub de [la raó] dels costats corresponents. [Exi 33]

Per tant, el sòlid $BGML$ és al $EHQP$ com la raó que hi ha entre els costats corresponents BC i EF al cub.

I el sòlid $BGML$ és al $EHQP$ com la piràmide $ABCG$ a la $DEFH$,

atès que la piràmide cubica una sisena part del sòlid, [Ev 15]
pel fet que el prisma és, alhora, la meitat del paral·lelepípede [Exi 22]
i tres vegades la piràmide. [Exii 7]

En definitiva, la raó entre la piràmide $ABCG$ i la $DEFH$ és la mateixa que hi ha entre BC i EF. [Ev 11]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exii 8, porisma. *Les piràmides semblants de bases poligonals [són] entre si com el cub de la raó dels costats corresponents.*[983]

[*Demostració.*] Trossegem [les piràmides] en [piràmides de] bases triangulars [obtingudes] a partir dels polígons semblants amb les bases [de les piràmides inicials], de manera que també quedin dividides en el mateix nombre de triangles semblants. Veiem que, per tant, les piràmides inicials són entre si com les bases inicials. [Evi 20]

Una piràmide de base triangular de la primera [piràmide pertanyent a la base poligonal] és a una piràmide de base triangular de la segona [piràmide, en correspondència amb la de la primera i pertanyent a la base poligonal,]

com [la suma de] totes les piràmides de bases triangulars de la primera piràmide a [la suma de] totes les piràmides de bases triangulars de la segona, [Ev 12]

és a dir, com la [primera] piràmide de base poligonal a la [segona].

I una piràmide de base triangular és a una altra com la raó al cub dels costats corresponents. [Exii 8]

983. Novament, la triangulació.

Aleshores, la raó entre les [piràmides] de base poligonal és el cub de la que hi ha entre els costats corresponents.

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

Exii 9. a*) Les bases de les piràmides triangulars equivalents són inversament proporcionals a les seves altures.* b*) Les piràmides de bases triangulars inversament proporcionals a les altures són equivalents.*[984]

a) Siguin ◬ $ABCG$ i ◬ $DEFH$ [dues] piràmides equivalents de bases triangulars $\triangle\, ABC$ i $\triangle\, DEF$, i vèrtexs [respectius] els punts G i H.

Afirmo que les bases de les piràmides ◬ $ABCG$ i ◬ $DEFH$ són inversament proporcionals a les altures respectives,

o sigui, que la base $\triangle\, ABC$ és a la $\triangle\, DEF$ com l'altura de la piràmide ◬ $DEFH$ a l'altura de la ◬ $ABCG$.

[*Demostració.*] Completem els paral·lelepípedes ⬭ $BGML$ i ⬭ $EHQP$. [P 5]

Atès que les piràmides ◬ $ABCG$ i ◬ $DEFH$ són equivalents,

i que els sòlids ⧈ $BGML$ i ⧈ $EHQP$ són sis vegades les piràmides ◬ $ABCG$ i ◬ $DEFH$[, respectivament], [Exii 8]

resulta que els sòlids ⧈ $BGML$ i ⧈ $EHQP$ són equivalents. [Nc 1][985]

Però les bases dels paral·lelepípedes equivalents són inversament proporcionals a les altures respectives. [Exi 34]

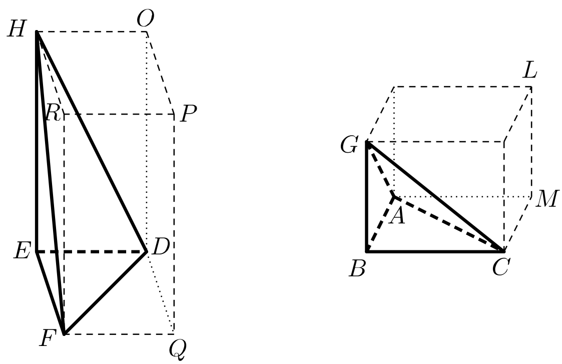


Figura Exii 9

Aleshores, la base ▱ BM és a la ▱ EQ com l'altura del sòlid ⧈ $EHQP$ a la del sòlid ⧈ $BGML$.

984. Vegeu Evi 15 i compareu les dues proposicions tenint en compte Evi 1.

985. Vegeu la nota 976 (pàgina 506).

Però la base ▱ BM és a la ▱ EQ com el triangle $\triangle\, ABC$ al $\triangle\, DEF$. [EI 34]

Per tant, el triangle $\triangle\, ABC$ és al $\triangle\, DEF$ com l'altura del sòlid $EHQP$ a la del sòlid $BGML$. [EV 11]

Però les altures dels sòlids $EHQP$ i $BGML$ són les mateixes que les de les piràmides $DEFH$ i $ABCG$[, respectivament].

En conseqüència, la base $\triangle\, ABC$ és a la $\triangle\, DEF$ com l'altura de la piràmide $DEFH$ a la de la piràmide $ABCG$.

En definitiva, les bases de les piràmides $ABCG$ i $DEFH$ són inversament proporcionals a les altures respectives. ♠

b) Ara suposem que les bases de les piràmides $ABCG$ i $DEFH$ són inversament proporcionals a les altures respectives,
és a dir, la base $\triangle\, ABC$ és a la $\triangle\, DEF$ com l'altura de la piràmide $DEFH$ a la de la piràmide $ABCG$.

Afirmo que les piràmides $ABCG$ i $DEFH$ són equivalents.

[*Demostració*.] Amb la mateixa construcció d'abans,
la base $\triangle\, ABC$ és a la $\triangle\, DEF$ com l'altura de la piràmide $DEFH$ a la de la piràmide $ABCG$.

Però la base $\triangle\, ABC$ és a la $\triangle\, DEF$ com el paral·lelogram ▱ BM al ▱ EQ. [EI 34]

Per tant, el paral·lelogram ▱ BM és al ▱ EQ com l'altura de la piràmide $DEFH$ a la de la piràmide $ABCG$. [EV 11]

Però les altures de les piràmides $DEFH$ i $ABCG$ són les mateixes que les dels paral·lelepípedes $EHQP$ i $BGML$. [DVI 3]

Així doncs, la base ▱ BM és a la ▱ EQ com l'altura del paral·lelepípede $EHQP$ a la del paral·lelepípede $BGML$.

[per substitució]

Però els paral·lelepípedes amb les bases inversament proporcionals a les altures respectives són equivalents. [EXI 34]

Aleshores, els paral·lelepípedes $BGML$ i $EHQP$ són equivalents.

Però sabem que les piràmides $ABCG$ i $DEFH$ cubiquen una sisena part de[l que cubiquen els paral·lelepípedes] $BGML$ i $EHQP$. [EXII 8]

Aleshores, les piràmides $\triangle ABCG$ i $\triangle DEFH$ són equivalents.

[Ev 15] ♠

I, així, les bases triangulars de les piràmides equivalents són inversament proporcionals a les altures respectives,
i les piràmides amb bases triangulars que són inversament proporcionals a les altures respectives són equivalents.
I això és el que volíem demostrar. ♠

Exii 10. *Un con cubica la tercera part del cilindre que té la mateixa base i la mateixa altura.*[986]
Considerem un con amb la mateixa base que un cilindre, [és a dir,] que tingui el cercle $\circ ABCD$ [com a base], i la mateixa altura.

[Dxi 18 i 21]

Afirmo que el con cubica una tercera part del cilindre,
és a dir, que el cilindre equival a tres vegades el con.
[*Demostració.*] Si el cilindre no equival a tres vegades el con,[987]
tenim que el cilindre cubica una d'aquestes dues possibilitats:[988]
a) Més de tres vegades el con.
b) Menys de tres vegades el con.[989]
a) En primer lloc, suposem que cubica més de tres vegades [el que cubica el con].

Considerem el quadrat $\square ABCD$ inscrit en el cercle $\circ ABCD$.

[Eiv 6]

Sabem que el quadrat $\square ABCD$ [té una àrea que] val més de la meitat del cercle $\circ ABCD$. [Exii 2]

Construïm un prisma de la mateixa altura que el cilindre i base el quadrat $\square ABCD$.[990]

986. Com és natural, la demostració procedeix per exhaustió: l'exhaustió del cercle amb polígons regulars de 2^n costats produeix l'exhaustió del con amb les piràmides que tenen els polígons regulars com a bases i el mateix vèrtex del con, és a dir, l'altura del con.

987. Hipòtesi de l'absurd.

988. Disjunció de casos.

989. Vegeu la nota 964 (pàgina 502).

990. Aquesta construcció és possible. Vegeu l'ítem *a* del problema 31 (pàgina 78).

D'això en resulta que el prisma construït cubica més de la meitat del cilindre

ja que, si circumscrivim un quadrat al cercle $\bigcirc ABCD$, [EIV 7]

el quadrat inscrit en ell és la meitat del circumscrit. [EI 47]

Els sòlids construïts [amb la base] en cadascun dels quadrats són prismes paral·lelepipèdics de la mateixa altura.

I els paral·lelepípedes de la mateixa altura són entre si com les bases respectives. [EXI 32]

Aleshores, el prisma construït [amb la base] sobre el quadrat $\square ABCD$ equival a la meitat del prisma construït [amb la base] sobre el quadrat circumscrit al cercle $\bigcirc ABCD$,

[EXI 28, o EXII 6 i EXI 7, porisma]

i el cilindre és més petit que aquest darrer prisma.[991]

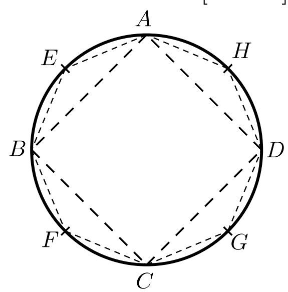


FIGURA EXII 10

Per tant, el prisma construït sobre el quadrat $\square ABCD$ i amb la mateixa altura que el cilindre cubica la meitat d'aquest cilindre.[992]

Ara dimidiem els arcs $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}$ i $\widehat{DA}$ pels punts E, F, G i H. [EIII 30]

Unim $AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH$ i HA. [P 1]

Tenim que [l'àrea de] cada un dels triangles $\triangle AEB, \triangle BFC$, $\triangle CGD$ i $\triangle DHA$ és més de la meitat del segment circular $\frown ABCD$, com hem vist abans. [EXII 2]

Considerem els prismes de la mateixa altura que el cilindre, construïts amb la base als triangles $\triangle AEB, \triangle BFC, \triangle CGD$ i $\triangle DHA$.

Cadascun cubica més de la meitat del segment del cilindre corresponent[993] en el qual està inscrit.

991. La raó d'aquesta afirmació és que el prisma està inscrit en el cilindre.

992. Compareu aquest raonament amb el que Euclides feia en el lema que hem anomenat *lema d'EXII 2* (pàgina 489).

993. Es tracta de la part del cilindre de base el segment circular, base limitada per la seva superfície i el pla perpendicular a ella que passa per la corda del segment circular.

I això és així perquè, si pels punts E, F, G i H tirem [segments] paral·lels als AB, BC, CD i DA,
completem els paral·lelograms sobre els segments AB, BC, CD i DA, [P 5]
i damunt construïm els paral·lelepípedes de la mateixa altura que el cilindre [que s'aixeca a sobre].[994] [P 5]

Cadascun dels prismes amb les bases sobre els triangles $\triangle AEB$, $\triangle BFC$, $\triangle CGD$ i $\triangle DHA$ cubica la meitat dels [paral·lelepípedes], i els segments del cilindre menys que elles.[995]

Finalment, doncs, els prismes de bases sobre els triangles $\triangle AEB$, $\triangle BFC$, $\triangle CGD$ i $\triangle DHA$ cubiquen més de la meitat dels segments del cilindre [que els circumscriuen].

I, [si] dimidiem els arcs resultants, unim els segments, construïm els prismes de base en cadascun dels triangles,
i ho iterem tot de manera contínua,
aleshores obtenim, residualment, [una certa quantitat finita de] segments del cilindre la suma dels quals és més petita que l'excés del cilindre sobre el con. [Ex 1][996]

Siguin [aquests segments] $AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH$ i HA. [Nc 1]

Aleshores, el prisma que queda, de base el polígon $AEBFCGDH$ i la mateixa altura que el cilindre, cubica més de tres vegades el con.

Però el prisma amb la base el polígon $AEBFCGDH$ i la mateixa altura que el cilindre és tres vegades la piràmide amb la base al polígon $AEBFCGDH$ i la mateixa altura que el con. [Ex II 7, porisma]

Així doncs, la piràmide amb la base al polígon $AEBFCGDH$ i el mateix vèrtex que el con és més gran que la de base el cercle $\bigcirc ABCD$.

994. Euclides compara els prismes amb seccions adequades del cilindre que queden determinades, com dèiem abans, per la superfície d'aquest cilindre que s'aixeca damunt l'arc i pel pla perpendicular a la base per la corda corresponent de l'arc.

995. S'hi troben inscrits.

996. Vegeu la nota 934 (pàgina 489).

Però, alhora, és més petita perquè aquest con hi està inscrit.
I això és impossible.

El cilindre no cubica, doncs, més de tres vegades el con. ♠

b) Afirmo que el cilindre tampoc no és més petit que tres vegades el con.

Si el cilindre és més petit que tres vegades el con,[997]
invertendo, el con és més gran que la tercera part del cilindre.

Considerem el quadrat $\square\, ABCD$ inscrit en el cercle $\circ ABCD$. [EIV 6]

Aleshores, el quadrat $\square\, ABCD$ és més gran que la meitat del cercle $\circ ABCD$. [EXII 2]

Considerem una piràmide de vèrtex el del con i base el quadrat $\square\, ABCD$.

Aleshores, la piràmide construïda és més gran que la meitat del con ja que hem vist que, si circumscrivim un quadrat al cercle, [EIV 7]
aquest quadrat $\square\, ABCD$ és la meitat que ell. [EXII 2]

I, si considerem els paral·lelepípedes quadrats —també anomenats *prismes*— de la mateixa altura que el con,
aleshores el [prisma] de base el quadrat $\square\, ABCD$ és la meitat del [prisma] de base el quadrat circumscrit al cercle.

Aquests [prismes] són entre si com les seves bases. [EXI 32]

Per tant, [això] val [també] per a les terceres parts. [EV 15]

Així doncs, la piràmide de base el quadrat $\square\, ABCD$ cubica la meitat que la de base el quadrat circumscrit al cercle, [EXII 7, porisma]
i la piràmide construïda sobre el quadrat circumscrit al cercle és més gran que el con perquè l'engloba.

Aleshores, la piràmide de base el quadrat $\square\, ABCD$ i el mateix vèrtex que el con és més gran que la meitat del con.

Dimidiem els arcs $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CD}$ i $\overset{\frown}{DA}$ pels punts E, F, G i H [respectivament]. [EIII 30]

Unim $AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH$ i HA. [P 1]

Cadascun dels triangles $\triangle\, AEB, \triangle\, BFC, \triangle\, CGD$ i $\triangle\, DHA$ és més gran que la meitat dels segments del cercle $\circ ABCD$ corresponents. [EXII 2]

997. Hipòtesi de l'absurd.

Construïm les piràmides amb el mateix vèrtex que el con i les bases cadascun dels triangles $\triangle AEB, \triangle BFC, \triangle CGD$ i $\triangle DHA$.

Aleshores, de la mateixa manera [que abans, veiem que] cada una de les piràmides cubica més de la meitat del que ho fa la part del con [amb base] sobre el segment [circular].

Si ara dimidiem els nous arcs, unim les cordes,
considerem les piràmides amb el mateix vèrtex que el con i base cadascun dels triangles,
i iterem el procés d'una manera continuada;
els residus de [les parts] del con sobre els segments [circulars] són més petits que l'excés del con sobre la tercera part del cilindre. [Ex 1]

Suposem que aquests segments de con tenen de base els segments circulars ⌓ AE, ⌓ EB, ⌓ BF, ⌓ FC, ⌓ CG, ⌓ GD, ⌓ DH i ⌓ HA.

La piràmide que queda, de base el polígon ⬠ $AEBFCGDH$ i el mateix vèrtex que el con,
és més gran que la tercera part del cilindre.

Però la piràmide de base el polígon ⬠ $AEBFCGDH$ i vèrtex el del con
és la tercera part del prisma amb la base el polígon ⬠ $AEBFCGDH$ i la mateixa altura que el cilindre. [Exii 7, porisma]

En definitiva, el prisma amb la base el polígon ⬠ $AEBFCGDH$ i la mateixa altura que el cilindre
és més gran que el cilindre amb la base sobre el cercle $\circ ABCD$.

Però[, alhora,] és més petit que ell perquè hi està contingut. I això és impossible.

Per tant, el cilindre no és més petit que tres vegades el con. ♠

Però hem vist que tampoc no és més gran que això. [part a)]

Així doncs, el cilindre és tres vegades el con.

En definitiva, el con cubica la tercera part que el cilindre.

Per tant, cada con és la tercera part del cilindre que té la seva base i la seva altura.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exii 11. *Els cons i els cilindres que tenen la mateixa altura són entre si com les seves bases.*

Considerem cons i cilindres de la mateixa altura amb les bases sobre els cercles ○$ABCD$ i ○$EFGH$, eixos KL i MN, i diàmetres de les bases AC i EG[, respectivament].

Afirmo que el cercle ○$ABCD$ és al ○$EFGH$ com el con AL al EN.

[*Demostració.*] Si no és així,[998]

el cercle ○$ABCD$ és al ○$EFGH$ com el con AL a un sòlid:[999]

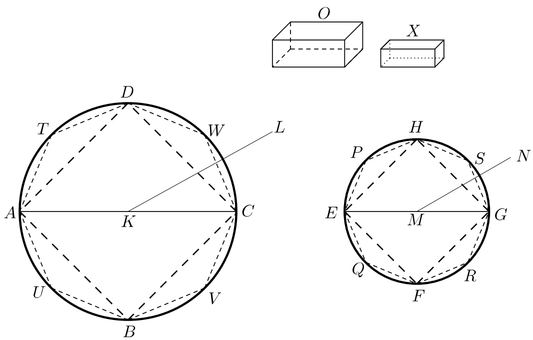


Figura Exii 11

a) Més petit que el con EN.

b) Més gran que el con EN.

a) En primer lloc, suposem que té [aquesta raó] amb un sòlid més petit O.

Ara considerem el sòlid X equivalent a l'excés del con EN sobre el sòlid O.[1000]

El con EN és igual a [la suma de]ls sòlids O i X.

Considerem el quadrat □$EFGH$ inscrit en el cercle ○$EFGH$.

[Eiv 6]

Aquest quadrat és més gran que la meitat del cercle. [Exii 2]

Considerem també una piràmide de la mateixa altura que el con, construïda damunt del quadrat □$EFGH$. [P 1]

Aquesta piràmide és més gran que la meitat del con, atès que, si circumscrivim un quadrat al cercle [Eiv 7]

998. Hipòtesi de l'absurd.

999. Disjunció de casos.

1000. Vegeu la nota 964 (pàgina 502).

i considerem una piràmide de la mateixa altura que el con,
resulta que tenim que la piràmide inscrita cubica la meitat que la circumscrita.

Totes dues piràmides són entre si com les seves bases, [Exii 6]
i el con és més petit que la piràmide circumscrita.[1001]

Dimidiem els arcs $\widehat{EF}, \widehat{FG}, \widehat{GH}$ i $\widehat{HE}$ pels punts P, Q, R i S. [Eiii 30]

Unim $HP, PE, EQ, QF, FR, RG, GS$ i SH. [P 1]

Aleshores, cadascun dels triangles $\triangle HPE, \triangle EQF, \triangle FRG$ i $\triangle GSH$ és més gran que la meitat del segment circular corresponent. [Exii 2]

Construïm les piràmides de la mateixa altura que el con amb la base en cada un dels triangles $\triangle HPE, \triangle EQF, \triangle FRG$ i $\triangle GSH$. [P 1]

Cada piràmide construïda és més gran que la meitat de [la part] del con sobre el segment circular [corresponent]. [Exii 10]

Si dimidiem els arcs, tirem les cordes, considerem les piràmides de la mateixa altura que el con i bases en cadascun dels triangles,
i iterem el procés de manera continuada;
disposem [d'una quantitat] de segments que és més petita que el sòlid X. [Ex 1][1002]

Els considerem tots i suposem que són els de base [els segments circulars] ⌓ HPE, ⌓ EQF, ⌓ FRG i ⌓ GSH.

La piràmide que queda, amb la base el polígon ⬠ $HPEQFRGS$ i l'altura del con, és més gran que el sòlid O.

Ara considerem el polígon ⬠ $DTAUBVCW$, semblant i col·locat de manera semblant al polígon ⬠ $HPEQFRGS$, inscrit en el cercle $\circ ABCD$. [Evi 18]

I construïm la piràmide de la mateixa altura que el con AL.

Atès que el quadrat de [costat] AC és al de costat EG com el polígon ⬠ $DTAUBVCW$ al ⬠ $HPEQFRGS$, [Exii 1]
i que el quadrat de [costat] AC és al de costat EG com el cercle $\circ ABCD$ al $\circ EFGH$, [Exii 2]

1001. Perquè la conté.

1002. Vegeu la nota 934 (pàgina 489).

resulta que el cercle ○$ABCD$ és al ○$EFGH$ com el polígon $DTAUBVCW$ al $HPEQFRGS$,
el cercle ○$ABCD$ al ○$EFGH$ com el con AL al sòlid O,
i el polígon $DTAUBVCW$ al $HPEQFRGS$ com la piràmide de base el polígon $DTAUBVCW$ i vèrtex el punt L a la piràmide de base el polígon $HPEQFRGS$ i vèrtex el punt N. [Exii 6]

En definitiva, el con AL és al sòlid O com la piràmide de base [el polígon] $DTAUBVCW$ i vèrtex el punt L a la piràmide de base el polígon $HPEQFRGS$ i vèrtex el punt N. [Ev 11]

Aleshores, *alternando*, el con AL és a la piràmide inscrita com el sòlid O a la piràmide inscrita en el con EN. [Ev 16]

Però el con AL és més gran que la piràmide inscrita.

Per tant, el sòlid O també ho és que la piràmide inscrita en el con EN. [Ev 14]

Però també és més petit que ella. I això és impossible. ♠

Aleshores, el cercle ○$ABCD$ no és al cercle ○$EFGH$ com el con AL a un sòlid més petit que el con EN.

De manera semblant, podem veure que el cercle ○$EFGH$ no és al ○$ABCD$ com el con EN a un sòlid més petit que el con AL.

♠

b) Afirmo que el cercle ○$ABCD$ no és al ○$EFGH$ com el con AL a un sòlid més gran que el con EN.

Si és possible,[1003]
[la raó dels cercles] és com la del con AL i un sòlid O més gran [que el con EN].

Aleshores, *invertendo*, el cercle ○$EFGH$ és al ○$ABCD$ com el sòlid O al con AL. [Ev 7, porisma]

Però el sòlid O és al con AL com el EN a un sòlid més petit que el con AL. [Exii 2, lema]

I, aleshores, el cercle ○$EFGH$ és al ○$ABCD$ com el con EN a un sòlid més petit que el con AL.

Però hem vist que això és impossible.

Per tant, el cercle ○$ABCD$ no és al ○$EFGH$ com el con AL a un sòlid més gran que el con EN. ♠

1003. Hipòtesi de l'absurd.

I abans hem establert que [la raó dels cercles] tampoc no pot ser com la del con △AL i un [sòlid] més petit [que el con △EN].

En definitiva, el cercle ○$ABCD$ és al ○$EFGH$ com el con △AL al △EN. ♠

c) Atès que cada [cilindre és] tres vegades cada [con], [Exii 10]
el con és al con com el cilindre al cilindre. [Ev 15]

Aleshores, el cercle ○$ABCD$ també és al ○$EFGH$ com [la raó entre] els cilindres amb bases els cercles i la mateixa altura.

Així doncs, els cons i els cilindres de la mateixa altura són entre si com les seves bases. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exii 12. *Els cons i els cilindres semblants són entre si com la raó dels seus diàmetres al cub.*

Considerem els cons i els cilindres semblants de bases els cercles ○$ABCD$ i ○$EFGH$, de diàmetres BD i FH
i d'eixos [els segments] KL i MN[, respectivament].

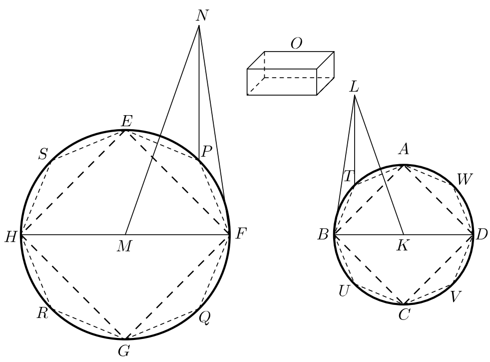


Figura Exii 12

Afirmo que la raó entre el con de base el cercle ○$ABCD$ i vèrtex el punt L i el con de base el cercle ○$EFGH$ i vèrtex el punt N és la raó entre BD i FH al cub.[1004]

[*Demostració*.] Si entre els cons △$ABCDL$ i △$EFGHN$ no hi ha la raó de BD i FH al cub,[1005] sí que es dona entre el primer con △$ABCDL$ i un sòlid que pot ser:[1006]

a) Més petit que el con △$EFGHN$.[1007]

1004. És a dir, la raó dels diàmetres respectius al cub.
1005. Hipòtesi de l'absurd.
1006. Disjunció de casos.
1007. Vegeu la nota 964 (pàgina 502).

b) Més gran que el con $EFGHN$.

a) En primer lloc, considerem que hi ha aquesta raó entre el primer con i [un sòlid] O més petit [que el segon con].

Considerem el quadrat $\square\, EFGH$ inscrit en el cercle $\circ EFGH$.

[EIV 6]

Aleshores, el quadrat $\square\, EFGH$ és més gran que la meitat del cercle $\circ EFGH$. [EXII 2]

Considerem la piràmide amb el mateix vèrtex que el con i base el quadrat $\square\, EFGH$. [P 1]

Aquesta piràmide és més gran que la meitat del con. [EXII 10]

Dimidiem els arcs $\widehat{EF}, \widehat{FG}, \widehat{GH}$ i $\widehat{HE}$ pels punts P, Q, R i S[, respectivament].

Unim $EP, PF, FQ, QG, GR, RH, HS$ i SE. [P 1]

Aleshores, cadascun dels triangles $\triangle\, EPF, \triangle\, FQG, \triangle\, GRH$ i $\triangle\, HSE$ és més gran que la meitat del segment circular ⌓ EFGH corresponent. [EXII 2]

Construïm una piràmide amb el mateix vèrtex que el con i bases cadascun dels triangles $\triangle\, EPF, \triangle\, FQG, \triangle\, GRH$ i $\triangle\, HSE$. [P 1]

Cada piràmide és més gran que la meitat del segment de con corresponent. [EXII 10]

Ara dimidiem els arcs que hem obtingut, unim els segments, construïm les piràmides amb el mateix vèrtex que el con i base cadascun dels triangles, [P 1]
i iterem el procés d'una manera continuada.

Aleshores, els segments del con que queden sumen menys que l'excés del con $EFGHN$ sobre el sòlid O. [EX 1][1008]

Considerem, doncs, els [segments de con] de base ⌓ EP, ⌓ PF, ⌓ FQ, ⌓ QG, ⌓ GR, ⌓ RH, ⌓ HS i ⌓ SE.

La piràmide que queda, de base el polígon ⬠ $EPFQGRHS$ i vèrtex el punt N, és més gran que el sòlid O.

Considerem el polígon ⬠ $ATBUCVDW$, semblant i col·locat de manera semblant al polígon ⬠ $EPFQGRHS$, inscrit en el cercle $\circ ABCD$. [EVI 18]

1008. Vegeu la nota 934 (pàgina 489).

Construïm la piràmide amb el mateix vèrtex que el con i base el polígon ⬠ $ATBUCVDW$. [P 1]

Siguin $\triangle LBT$ un dels triangles de la piràmide de base el polígon ⬠ $ATBUCVDW$[1009] i vèrtex el punt L,
i $\triangle NFP$ un dels triangles de la piràmide de base el polígon ⬠ $EPFQGRHS$ i vèrtex el punt N. [Dxi 12][1010]

Unim KT i MP. [P 1]

Ara, atès que els cons $ABCDL$ i $EFGHN$ són semblants,
BD és a FH com l'eix KL a l'eix MN, [Dxi 24]
i BD a FH com BK a FM.

En conseqüència, BK és a FM com KL a MN. [Ev 11]

I, *alternando*, BK és a KL com FM a MN. [Ev 16]

Per tant, els costats dels angles iguals $\widehat{BKL}$ i $\widehat{FMN}$ són proporcionals,
i els triangles $\triangle BKL$ i $\triangle FMN$ semblants. [Evi 6]

De bell nou, atès que BK és a KT com FM a MP,
aquests segments són els costats dels angles iguals $\widehat{BKT}$ i $\widehat{FMP}$,
ja que tots dos són la mateixa part de quatre [angles] rectes amb vèrtexs K i M, respectivament.

És a dir, els costats d'angles iguals són proporcionals.

Per tant, els triangles $\triangle BKT$ i $\triangle FMP$ són semblants. [Evi 6]

Novament, com que hem vist que BK és a KL com FM a MN,
i que BK és igual a KT, i FM a PM,
resulta que TK és a KL com PM a MN. [per substitució][1011]

Per tant, els costats dels angles iguals $\widehat{TKL}$ i $\widehat{PMN}$ —tots dos, segments rectilinis— són proporcionals.

Aleshores, els triangles $\triangle LKT$ i $\triangle NMP$ són semblants. [Evi 6]

I, atesa la semblança dels triangles $\triangle LKB$ i $\triangle NMF$,
LB és a BK com NF a FM. [Dvi 1]

I, atesa la semblança dels triangles $\triangle BKT$ i $\triangle FMP$,
KB és a BT com MF a FP. [Dvi 1]

1009. Una cara de la piràmide.

1010. Fixem-nos en l'ambigüitat. No explicita que la piràmide està limitada per triangles.

1011. És un porisma d'Ev 7 i Ev 11.

Per tant, *ex æquali*, LB és a BT com NF a FP. [EV 22]

De bell nou, atesa la semblança dels triangles $\triangle LTK$ i $\triangle NPM$,
LT és a TK com NP a PM [DVI 1]
i, d'acord amb la semblança dels triangles $\triangle TKB$ i $\triangle PMF$,
KT és a TB com MP a PF. [DVI 1]

Per tant, *ex æquali*, LT és a TB com NP a PF. [EV 22]

Però hem vist que TB és a BL com PF a FN.

Per tant, *ex æquali*, TL és a LB com PN a NF. [EV 22]

En conseqüència, els costats dels triangles $\triangle LTB$ i $\triangle NPF$ són proporcionals.

I els triangles $\triangle LTB$ i $\triangle NPF$, equiangulars [EVI 5]
i, de retruc, semblants. [EVI 1]

En definitiva, la piràmide de base el triangle $\triangle BKT$ i vèrtex el punt L és semblant a la piràmide de base el triangle $\triangle FMP$ i vèrtex el punt N,
ja que totes dues piràmides estan determinades pel mateix nombre de plans semblants. [DXII 9][1012]

A més, les piràmides semblants amb bases triangulars són entre si com la raó dels costats corresponents al cub. [EXII 8]

Per tant, la piràmide $BKTL$ és a la $FMPN$ com BK a FM al cub.

De manera semblant, unim els [punts] A, W, D, V, C i U amb [el centre] K, [P 1]
i [els punts] E, S, H, R, G i Q amb [el centre] M. [P 1]

I construïm les piràmides amb els mateixos vèrtexs que els cons sobre cadascun dels triangles [que hem obtingut]. [P 1]

També podem veure que cadascuna de les piràmides, preses ordenadament, és a cadascuna de les piràmides, preses ordenadament,
com la raó que hi ha entre els costats corresponents BK i FM al cub,
és a dir, entre BD i FH al cub. [per substitució]

Ara bé, [per a dues col·leccions de magnituds proporcionals] una [magnitud] de la primera [col·lecció] és a una de l'altra com [la suma

1012. Fixem-nos que, per poder saber que dos sòlids són semblants, cal conèixer la naturalesa de les cares que els limiten.

de] totes [les magnituds] de la primera és a [la suma de] totes les de la segona. [Ev 12]

Així doncs, la piràmide $BKTL$ és a la $FMPN$ com la piràmide completa de base el polígon $ATBUCVDW$ i vèrtex el punt L és a la piràmide completa de base el polígon $EPFQGRHS$ i vèrtex el punt N.

I, per tant, la raó que hi ha entre les piràmides de bases els polígons $ATBUCVDW$ i $EPFQGRHS$ i vèrtexs els punts L i N és la de BD i FH al cub.

Però hem vist que la raó entre el con de base el cercle ○$ABCD$ i vèrtex el punt L i el sòlid O és la de BD i FH al cub.

Aleshores, el con de base el cercle ○$ABCD$ i vèrtex el punt L és al sòlid O com la piràmide de base el [polígon] $ATBUCVDW$ i vèrtex el punt L a la piràmide de base el [polígon] $EPFQGRHS$ i vèrtex el punt N. [Ev 11]

I, *alternando*, el con de base el cercle ○$ABCD$ i vèrtex el punt L és a la piràmide de base el polígon $ATBUCVDW$ i vèrtex el punt L com el [sòlid] O a la piràmide de base el polígon $EPFQGRHS$ i vèrtex el punt N. [Ev 16]

I, pel que acabem de dir, el con és més gran que la piràmide inscrita precisament perquè està inscrita.

Així doncs, el sòlid O també és més gran que la piràmide de base el polígon $EPFQGRHS$ i vèrtex el punt N.

Però, alhora, és més petita que ell. I això és impossible. ♠

En definitiva, la raó entre el con de base el cercle ○$ABCD$ i vèrtex el [punt] L i un sòlid més petit que el con de base el cercle ○$EFGH$ i vèrtex el punt N no és la de BD i FH al cub.

De manera semblant, s'estableix que la raó entre el con $EFGHN$ i un sòlid més petit que el con $ABCDL$ no és la de FH i BD al cub. ♠

b) Afirmo que la raó entre el con $ABCDL$ i un sòlid més gran que el con $EFCHN$ tampoc no ho és.

Si ho és,[1013]
suposem que ho és amb el sòlid O, més gran [que el con].

1013. Hipòtesi de l'absurd.

Per tant, *invertendo*, la raó entre el sòlid O i el con $ABCDL$ és la de FH i BD al cub, [Ev 7, porisma]
i el sòlid O és al con $ABCDL$ com el con $EFGHN$ a un sòlid més petit que el con $ABCDL$. [Exii 2, lema]

Així doncs, la raó entre el con $EFGHN$ i un sòlid més petit que el con $ABCDL$ és la de FH i BD al cub.

Però hem vist que això és impossible.

Per tant, la raó entre el con $ABCDL$ i un sòlid més gran que el con $EFGHN$ no és mai la de BD i FH al cub. ♠

Però hem vist que tampoc no hi ha aquesta raó entre aquest con i un [sòlid] més petit [que el con $EFGHN$].

D'això en resulta que la raó entre els cons $ABCDL$ i $EFGHN$ és la de BD i FH al cub. ♠

I, atès que el con és al con com el cilindre al cilindre,
ja que un cilindre és tres vegades el con de la mateixa base i altura que el con, [Exii 10]
resulta que el cilindre té amb el cilindre la raó de BD i FH al cub. [Ev 15]

En definitiva, la raó entre cons i cilindres semblants és la que hi ha entre els diàmetres de les seves bases al cub.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exii 13. *Si tallem un cilindre amb un pla paral·lel als seus plans oposats, el cilindre és al cilindre com l'eix a l'eix.*[1014]
Suposem que tallem el cilindre AD amb el pla GH, paral·lel als seus plans oposats AB i CD,
i que el pla GH talla l'eix pel punt K.

Afirmo que el cilindre BG és al GD com l'eix EK al KF.

[*Demostració*.] Prolonguem l'eix EF en totes dues direccions fins als punts L i M. [P 2]

Considerem un cert nombre [de segments], EN i NL, iguals a l'eix EK, [sobre el segment EL,]

1014. És un porisma d'Exii 11 i Dv 5.

i un cert nombre [de segments],[1015] FO i OM, iguals a [l'eix] FK [sobre el segment KM]. [Ei 2]

Construïm el cilindre ⌭PW de bases els cercles ○PQ i ○VW, i eix LM. [Dxi 21]

Tirem plans paral·lels, a ▱AB i ▱CD,
i a les bases del cilindre ⌭PW, pels punts N i O. [Exi 14]

Obtenim els cercles ○RS i ○TU de centres respectius N i O.[1016]

I, atès que els eixos LN, NE i EK són iguals, els cilindres ⌭QR, ⌭RB i ⌭BG són entre si com les seves bases. [Exii 11]

Però les bases són iguals.[1017]

Per tant, els cilindres ⌭QR, ⌭RB i ⌭BG també ho són. [Dv 5]

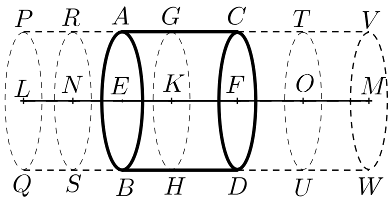


Figura Exii 13

I, atès que els eixos LN, NE i EK també,
que els cilindres ⌭QR, ⌭RB i ⌭BG també,
i que el nombre [dels primers] és igual al nombre [dels segons],
resulta que l'eix KL és tants múltiples de l'eix EK com el cilindre ⌭QG del cilindre ⌭GB. [Ev 4 i 15]

Pel mateix [raonament], l'eix MK és tants múltiples de l'eix KF com el cilindre ⌭WG del cilindre ⌭GD.

Per tant, si l'eix KL és igual, més gran o més petit que l'eix KM, el cilindre ⌭QG també ho és que el ⌭GW.[1018]

En definitiva, l'eix EK és al KF com el cilindre ⌭BG al ⌭GD. [Dv 5]

I això és el que volíem demostrar. ♠

1015. Aquests dos nombres són arbitraris i poden ser diferents.

1016. Els plans tallen els cilindres en cercles iguals a les bases. És una conseqüència immediata de la definició Dxi 21.

1017. És una conseqüència immediata de Dxi 21 i 23.

1018. Se suposa que, si dos cilindres tenen bases iguals, el que té l'altura més petita és superposable a una secció cilíndrica del que la té més gran.

Exii 14. *Els cons i els cilindres que tenen bases iguals*[1019] *són entre si com les seves altures.*

Siguin ⌭EB i ⌭FD dos cilindres de bases equivalents[, en concret,] de bases els cercles ○AB i ○CD [respectivament].

Afirmo que el cilindre ⌭EB és al ⌭FD com l'eix GH al KL.

[*Demostració.*] Prolonguem l'eix KL fins al punt N [P 2]

i tirem [el segment] LN igual a l'eix GH. [Ei 2]

Considerem el cilindre ⌭CM d'eix LN [i base el cercle ○CD].

Aleshores, com que els cilindres ⌭EB i ⌭CM tenen la mateixa altura, són entre si com les seves bases. [Exii 11]

Però les bases són iguals entre si.

Per tant, els cilindres ⌭EB i ⌭CM també són equivalents. [Dv 5]

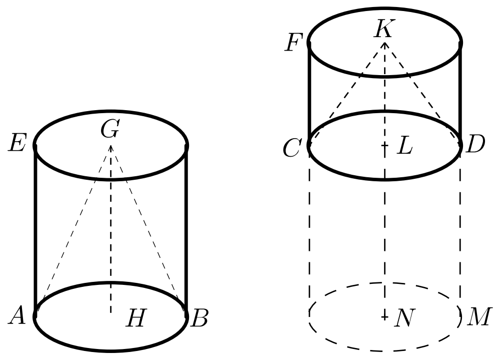


Figura Exii 14

I, atès que hem tallat el cilindre ⌭FM amb el pla CD, paral·lel als plans [oposats],[1020]

el cilindre ⌭CM és al ⌭FD com l'eix LN al KL. [Exii 13]

Però els cilindres ⌭CM i ⌭EB són equivalents, i els eixos LN i GH iguals.

Per tant, el cilindre ⌭EB és al ⌭FD com l'eix GH al KL, i el cilindre ⌭EB al ⌭FD com el con △ABG al △CDK. [Exii 10]

En definitiva, també l'eix GH és al KL com el con △ABG al △CDK, i el cilindre ⌭EB al ⌭FD.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exii 15. a*) Les bases de cons i cilindres equivalents són inversament proporcionals a les seves altures respectives. I, recíprocament,* b*) els*

1019. De fet, són superposables.

1020. Resulta de la construcció del cilindre ⌭CM.

cons i els cilindres amb bases inversament proporcionals a les altures respectives són equivalents.

a) Considerem els cons i els cilindres equivalents de bases els cercles ○$ABCD$ i ○$EFGH$,

diàmetres [de les bases] AC i EG, i eixos KL i MN, que són també les seves altures.

[*Demostració.*] Completem els cilindres ⌭AO i ⌭EP.[1021]

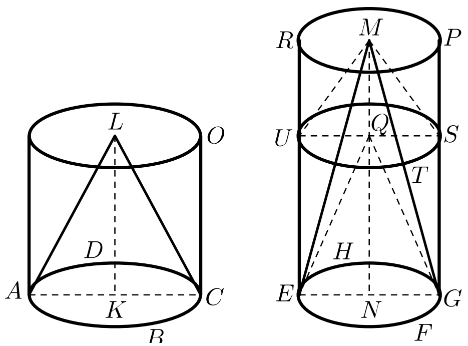


Figura Exii 15

Afirmo que les bases dels cilindres ⌭AO i ⌭EP són inversament proporcionals a les altures respectives,

és a dir, la base ○$ABCD$ és a la ○$EFGH$ com l'altura MN a la KL.

Aleshores, es dona una d'aquestes dues possibilitats:[1022]

a_1) L'altura LK és igual a la MN.

a_2) L'altura LK no ho és a la MN.

a_1) En primer lloc, suposem que els cilindres ⌭AO i ⌭EP són equivalents.

Sabem, però, que els cilindres i els cons que tenen la mateixa altura són entre si com les seves bases. [Exii 11]

Aleshores, la base ○$ABCD$ és igual a la ○$EFGH$. [Dv 5]

I, per tant, recíprocament, la base ○$ABCD$ és a la ○$EFGH$ com l'altura MN a la KL. [Ev7, iterat, i 11] ♠

a_2) En segon lloc, suposem que l'altura LK no és igual a MN, i que MN és la més gran de les dues.[1023]

1021. De fet, tant els cons com els cilindres són donats, i el con està inscrit en el cilindre.

1022. Disjunció de casos.

1023. L'elecció de l'altura més gran no afecta el raonament.

En l'altura MN agafem QN igual a KL.[1024]

Tallem el cilindre ⛁EP amb el pla ▱TUS que passa pel punt Q i és paral·lel als plans dels cercles ○$EFGH$ i ○RP. [ExI 14]

Obtenim el cilindre ⛁ES de base el cercle ○$EFGH$ i altura NQ.[1025]

I, atès que els cilindres ⛁AO i ⛁EP són equivalents,
el cilindre ⛁AO és al ⛁ES com el ⛁EP al ⛁ES. [EV 7]

Però el cilindre ⛁AO és al ⛁ES com la base ○$ABCD$ a la ○$EFGH$ perquè [tenen] la mateixa altura. [EXII 11]

I el cilindre ⛁EP és al ⛁ES com l'altura MN a la QN,
ja que hem tallat el cilindre ⛁EP amb el pla paral·lel als plans oposats. [EXII 13]

Per tant, la base ○$ABCD$ és a la ○$EFGH$ com l'altura MN a la QN, [EV 11]
i l'altura QN és igual a la KL.

En definitiva, la base ○$ABCD$ és a la ○$EFGH$ com l'altura MN a la KL. [EV 7]

En conseqüència, les bases dels cilindres ⛁AO i ⛁EP són inversament proporcionals a les seves altures. ♠

b) Suposem que les bases dels cilindres ⛁AO i ⛁EP són inversament proporcionals a les seves altures,
i que la base ○$ABCD$ és a la ○$EFGH$ com l'altura MN a la KL.

Afirmo que el cilindre ⛁AO equival al ⛁EP.

Amb la mateixa construcció que abans,
atès que la base ○$ABCD$ és a la ○$EFGH$ com l'altura MN a la KL,
i que l'altura KL és igual a la QN,
tenim que la base ○$ABCD$ és a la ○$EFGH$ com l'altura MN a la QN.

Però la base ○$ABCD$ és a la ○$EFGH$ com el cilindre ⛁AO al ⛁ES, ja que tenen la mateixa altura, [EXII 11]
i l'altura MN és a la QN com el cilindre ⛁EP al ⛁ES. [EXI 13]

En definitiva, el cilindre ⛁AO és al ⛁ES com el ⛁EP al ⛁ES. [EV 11]

1024. A partir d'un dels extrems, en concret, el N.

1025. És un porisma d'EXI 21.

D'això en resulta que els cilindres ⌭AO i ⌭EP són equivalents.

[EV 11] ♠

c) De manera semblant, [podem aplicar-ho] als cons. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

EXII 16. *En el gran de dos cercles concèntrics,*[1026] *hi podem inscriure un polígon equilàter amb un nombre parell de costats que no toca el cercle més petit.*[1027]

Siguin ○$ABCD$ i ○$EFGH$ dos cercles concèntrics donats de centre K.

Volem inscriure en el més gran, ○$ABCD$, un polígon equilàter amb un nombre parell de costats que no toqui el cercle petit ○$EFGH$.

[*Construcció.*] Tirem el diàmetre BKD [del cercle gran]. [P 1 i 2]

Pel punt G,[1028] tirem el [segment] GA perpendicular al BD.[1029]

[EI 11]

Aleshores, la corda AC[1030] toca el cercle ○$EFGH$.

[EIII 16, porisma]

Ara dimidiem l'arc $\widehat{BAD}$ i després la seva meitat, i així successivament fins a aconseguir un arc $\widehat{LD}$ més petit que el $\widehat{AD}$. [EX 1]

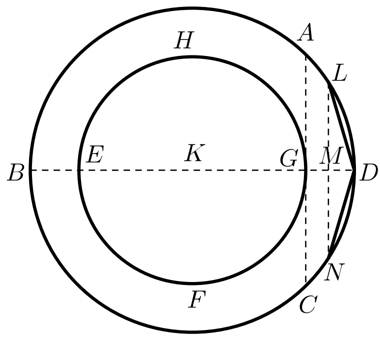


FIGURA EXII 16

Pel punt L, tirem el [segment] LD perpendicular a[l diàmetre] BD.

[EI 12]

El prolonguem fins al punt N [del cercle petit]. [P 2] ♣

1026. Diu: αὐτὸ κέντρον, 'amb el mateix centre'.

1027. És un «element» de la proposició següent que, al seu torn, ho és de la darrera proposició del llibre tretzè, un llibre molt important.

1028. És un dels dos punts pels quals el diàmetre BKD talla el cercle petit, és a dir, un dels extrems que hi determina el diàmetre BKD.

1029. Aquest diàmetre especifica necessàriament el del cercle petit ○EKG? Vegeu el problema 35 (pàgina 78).

1030. Prolonguem el segment AG fins que talla el cercle petit [P 1 i P$\dot{2}$].

[*Demostració.*] Unim LD i DN. [P 1]

Aleshores, LD i DN són iguals. [EIII 3 i I 4]

I, atès que [el segment] LN és paral·lel al AC, [EI 28]
i que AC toca el cercle $\circ EFGH$,[1031]
tenim que LN no el toca.[1032]

Així doncs, els segments LD i DN no toquen ni tallen el cercle $\circ EFGH$. [EIV 1]

I, si inserim [segments] iguals al segment LD en el cercle $\circ ABCD$, hi haurem inscrit un polígon equilàter amb un nombre parell de costats que no toca el cercle petit $\circ EFGH$.

I això és el que volíem fer. ♠

EXII 17. *En la gran de dues esferes concèntriques, hi podem inscriure un sòlid polièdric que no toca la superfície de la petita.*[1033]

Siguin dues esferes concèntriques de centre A.

En l'esfera més gran, volem inscriure-hi un poliedre que no toca la superfície de la més petita.

[*Construcció.*] Tallem totes dues esferes amb un pla que passa pel centre.

Les seccions obtingudes són cercles, ja que una esfera és el resultat de fer girar un semicercle al voltant d'un diàmetre fix. [DXI 14]

I, sigui quina sigui la posició en la qual concebem el semicercle,
el pla que el conté[, prolongat convenientment,] determina un cercle sobre la superfície de l'esfera.

I també és clar que [aquest cercle és] màxim
perquè el diàmetre de l'esfera,
que, òbviament, és el diàmetre del semicercle i, de retruc, del cercle, és més gran que qualsevol altra corda del cercle o de l'esfera. [EIII 15]

Així doncs, sigui $\circ BCDE$ el cercle de l'esfera gran i $\circ FGH$ el de la petita.

Considerem dos diàmetres perpendiculars [del cercle $\circ BCDE$],
[a saber,] BD i CE.

I, donats els dos cercles concèntrics $\circ BCDE$ i $\circ FGH$,

---

1031. És a dir, és un segment tangent al cercle $\circ EFGH$.
1032. Ni tampoc el talla, ja que no té punts en comú amb el segment AC.
1033. La demostració és una mica caòtica.

considerem un polígon equilàter amb un nombre parell de costats inscrit en el cercle gran ○$BCDE$ que no toca el petit ○FGH. [Exii 16]

Suposem que els costats del quadrant són BK, KL, LM i ME.

Unim KA [P 1]
i el prolonguem fins a N. [P 2]

Sigui AO la perpendicular per A al pla del cercle ○$BCDE$. [Exi 12]

I sigui O el punt pel qual talla la superfície de l'esfera [gran].

Considerem [els] plans que passen per AO i per cadascun de[ls segments] BD i KN.

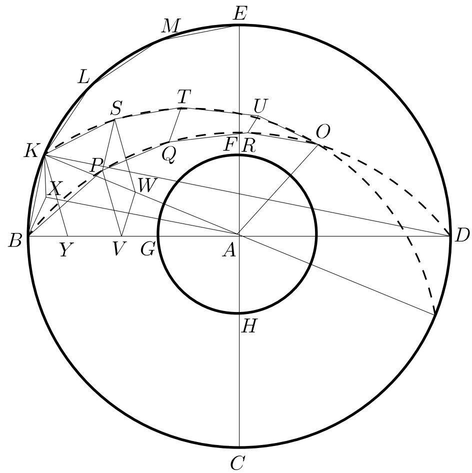


Figura Exii 17a[1034]

D'acord amb [l'explicació] anterior, aquests plans produeixen cercles a la superfície de l'esfera [gran].

Els construïm.

Siguin ⌓BOD i ⌓KON semicercles sobre els diàmetres BD i KN[, respectivament].

Atès que OA és perpendicular al pla del cercle ○$BCDE$,
també ho són tots els plans que contenen [el segment] OA. [Exi 18]

Per tant els semicercles ⌓BOD i ⌓KON també ho són.

I, atès que els semicercles ⌓BED, ⌓BOD i ⌓KON són iguals, ja que tenen diàmetres BD i KN iguals; [Diii 1]
els quadrants BE, BO i KO també ho són entre si.

Aleshores, als quadrants BO i KO, hi fem tants costats del polígon [corresponent] com els que hi ha al quadrant BE, que siguin iguals als segments BK, KL, LM i ME.

1034. La figura no fa visible la tercera dimensió. Vegeu la figura Exii 17b.

Els inscrivim.

Siguin $BP, PQ, QR, RO, KS, ST, TU$ i UO els segments que obtenim.

Unim SP, TQ i UR. [P 1]

Pels punts P i S, tirem perpendiculars PV i SW al pla del cercle ○$BCDE$, [Exi 11]
que cauen damunt les seccions comunes dels plans ▱BD i ▱KN [amb el cercle ○$BCDE$],
ja que els plans de ⌓BOD i ⌓KON també són perpendiculars al pla del cercle ○$BCDE$. [Dxi 4]

Els deixem caure. Determinen els arcs $\widehat{BP}$ i $\widehat{KS}$.

Unim WV. [P 1]

Atès que $\widehat{BP}$ i $\widehat{KS}$ són arcs [de circumferència] iguals dels semicercles iguals ⌓BOD i ⌓KON, [Diii 28]
i que [els segments] PV i SW són perpendiculars,
resulta que [els segments] PV i BV són iguals
als [segments] SW i KW[, respectivament]. [Eiii 27 i Ei 26]

Ara bé, els diàmetres BA i KA també són iguals.

Per tant, els residus VA i WA també ho són.

D'això en resulta que BV és a VA com KW a WA.
[Ei 3, v 7, iterat]

En conseqüència, WV és paral·lel a KB. [Evi 2]

I, atès que [cadascun dels segments] PV i SW és perpendicular al pla del cercle ○$BCDE$,
PV és paral·lel a SW. [Exi 6]

Però hem vist que, a més, tots dos segments són iguals.

Per tant, WV i SP són iguals i paral·lels. [Ei 33]

I, atès que WV és paral·lel a SP, i WVa KB;
SP i KB també ho són, [Exi 1]
i BP i KS uneixen els seus extrems.

En definitiva, el quadrilàter ⏢$KBPS$ es troba en un pla perquè, si prenem dos punts arbitraris de dos segments paral·lels,
un de cadascun,
el segment que els uneix és al mateix pla dels [segments] paral·lels.
[Exi 7]

Pel mateix [raonament], cadascun dels quadrilàters $SPQT$ i $TQRU$ també és en un pla.

Si ara considerem [els segments] que uneixen els punts P, S, Q, T, R i U al [punt] A,
haurem construït un sòlid polièdric entre els arcs $\widehat{BO}$ i $\widehat{KO}$
que es compon de piràmides, amb les bases els quadrilàters ▱ $KBPS$, ▱ $SPQT$, ▱ $TQRU$ i el triangle $\triangle URO$,
que tenen el vèrtex al punt A.

I, si la construcció que hem fet amb el costat BK la repetim en cada un dels costats KL, LM i ME, i en els altres tres quadrants;
haurem inscrit, en l'esfera, un sòlid polièdric format per les piràmides de bases els quadrilàters esmentats i el triangle $\triangle URO$,
i els [quadrilàters i triangles] corresponents amb vèrtex al punt A. ♣

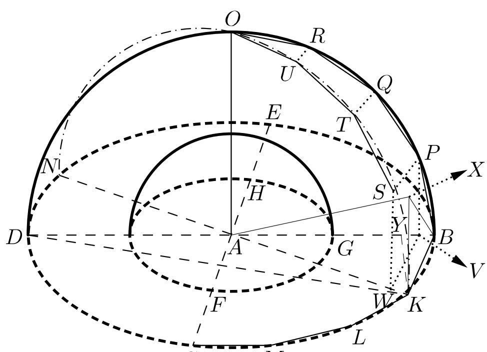


Figura Exii 17*b*

Afirmo que aquest poliedre no toca la superfície de l'esfera que es troba al cercle $\bigcirc FGH$.

[*Demostració.*] Des del punt A tirem un [segment] AX perpendicular al pla ▱ $KBPS$.

Suposem que el talla pel punt X. [Exi 11]

Unim XB i XK. [P 1]

Aleshores, atès que [el segment] AX és perpendicular al pla del quadrilàter $KBPS$,
també ho és a tots els segments d'aquest pla que tallen el segment perpendicular. [Dxi 3]

Per tant, AX és perpendicular a cadascun dels [segments] BX i XK.

I, atès que AB i AK són iguals,
el quadrat de [costat] AB també ho és al de costat AK,[1035]
i la [suma dels quadrats de costats] AX i XB és igual al quadrat de [costat] AB, ja que l'angle [de vèrtex] X és recte. [Ei 47]

1035. Vegeu la nota 596 (pàgina 256).

Ara bé, la [suma dels quadrats de costats] AX i XK és igual al quadrat de [costat] AK. [EI 47]

Aleshores, la [suma dels quadrats de costats] AX i XB ho és a la [dels quadrats de costats] AX i XK. [Nc 1]

Sostraiem el quadrat de [costat] AX de totes dues [sumes].

El quadrat de costat BX és igual al de costat XK. [Nc 3]

Per tant, BX és igual a XK.[1036]

De manera semblant, podem veure que els segments que uneixen X amb P i S són iguals a BX i XK.

Aleshores, un cercle dibuixat [al pla del quadrilàter] amb centre X i radi un [dels segments] XB o XK passa per P i S,
i el quadrilàter ⌂ $KBPS$ està inscrit en el cercle. [DIV 3]

I, atès que KB és més gran que WV, i WV igual a SP;
KB és més gran que SP
i igual a cadascun dels [segments] KS i BP.

Per tant, KS i BP són més grans que SP. [per substitució]

I, atès que el quadrilàter ⌂ $KBPS$ està inscrit en un cercle,
que KB, BP i KS són iguals,
que PS és més petit que ells,
i que BX és el radi del cercle,
resulta que el quadrat de [costat] KB és més gran que el doble del [quadrat] de costat BX.[1037]

Per [el punt] K, tirem el [segment] KY perpendicular a BV.[1038]

BD és més petit que el doble de DY,
i és a DY com el rectangle de [costats] DB i BY al [de costats] DY i YB
—un quadrat de costat BY i un rectangle de costat curt el segment BY completat sobre YD—,

1036. Vegeu la nota 596 (pàgina 256).

1037. Cadascun dels segments KB, BP i KS és més gran que els costats del quadrat inscrit, que valen $\sqrt{2}\,BX$. Vegeu el problema 37 (pàgina 78). Hi apliquem el principi de substitució.

1038. Observem que els dos punts Y i V són el mateix, ja que els arcs $\widehat{BK}$ i $\widehat{BO}$ són iguals. Vegeu VITRAC (2001), nota 277, p. 353.

aleshores el rectangle de [costats] DB i BY també és més petit que el doble del rectangle de [costats] DY i YB.

Unim KD. [P 1]

El rectangle de [costats] DB i BY equival al de costat BK,
i el de [costats] DY i YB al de costat KY. [EIII 31 i VI 8, porisma]

Per tant, el quadrat de [costat] KB és més petit que el doble del quadrat de costat KY.

Però el de costat KB és més gran que el doble del quadrat de [costat] BX.

Per tant, el quadrat de [costat] KY és més gran que el de costat BX.[1039]

I, atès que BA és igual a KA;
el quadrat de [costat] BA és igual al de costat AK,[1040]
la [suma dels quadrats de costats] BX i XA ho és al quadrat de [costat] BA,
i la [suma dels quadrats de costats] KY i YA al quadrat de [costat] KA. [EI 47]

Per tant, la [suma dels quadrats de costats] BX i XA és igual a la [suma dels quadrats de costats] KY i YA.

D'això en resulta que el quadrat de [costat] KY és més gran que el de costat BX.

Aleshores, el quadrat de [costat] YA és més petit que el de costat XA.

Així doncs, AX és més gran que AY.[1041]

Per tant, AX és molt més gran que AG.[1042]

Però, d'una banda, AX és [un segment] perpendicular a una de les bases del poliedre
i, de l'altra, AG és dins la superfície de l'esfera petita.[1043]

En definitiva, el poliedre no toca aquesta superfície. ♠

1039. Usa la transitivitat de la relació de desigualtat.

1040. Vegeu la nota 596 (pàgina 256).

1041. Vegeu PLA (2018), problema 52, ítem f_{4ii}, p. 67.

1042. Aquesta conclusió depèn del fet que la corda del polígon d'EXII 16 no toca el cercle inscrit. Vegeu el problema 36 (pàgina 78).

1043. És a dir, n'és un radi.

Per tant, donades dues esferes concèntriques,
podem inscriure, en l'esfera gran, un sòlid polièdric que no toca la superfície de la petita. [Ev 15]
I això és el que volíem demostrar. ♠

Exii 17, porisma. *Si en una esfera* $\ominus$*BCDE inscrivim un sòlid polièdric semblant a un d'inscrit en una altra esfera, la raó entre el sòlid polièdric de la primera esfera i el de la segona és la dels diàmetres de l'esfera* $\ominus$*BCDE i l'altra esfera al cub.*[1044]

[*Demostració.*] Si trossegem els sòlids en piràmides semblants col·locades de manera semblant,
aquestes piràmides tenen [entre si] la raó dels costats corresponents al cub. [Exii 8, porisma]

Aleshores, la raó entre la piràmide de base un quadrilàter ▱*KBPS* i vèrtex el punt A
i la piràmide col·locada de manera semblant en l'altra esfera
és la que hi ha entre un costat i el costat corresponent al cub,
és a dir, la [raó] entre el radi AB de l'esfera de centre A i el radi de l'altra esfera al cub.

Igualment, la raó entre les piràmides que són en l'esfera de centre A i les col·locades de manera semblant en l'altra esfera
és la de AB i el radi de l'altra esfera el cub.

I[, en dues col·leccions de magnituds proporcionals amb el mateix nombre de termes,] una de les primeres [magnituds] és a una de les segones com [la suma de] totes les primeres a [la suma de] totes les segones. [Ev 12]

Per tant, la raó entre el sòlid polièdric [inscrit] en l'esfera de centre A i l'inscrit en l'altra
és la de[l radi] AB i el radi de l'altra esfera al cub,

1044. D'entrada, aquesta inversió en l'ordre de les proposicions respecte d'Exii 1 i Exii 2 pot resultar curiosa. Però, quan analitzem les demostracions, veiem que, de fet, és un porisma del porisma d'Exii 8 que se segueix de manera natural de la teoria de la proporció. Per tant, el que resulta curiós és que Euclides l'estableixi ara. Això només pot respondre a la voluntat de mantenir un cert paral·lelisme amb les dues primeres proposicions del llibre.

que és la mateixa que hi ha entre el diàmetre BD i el diàmetre de l'altra esfera.

I això és el que volíem demostrar. ♠

ExII 18. *Les esferes són entre si com la raó dels seus diàmetres respectius al cub.*[1045]

Considerem les esferes $\ominus ABC$ i $\ominus DEF$ de diàmetres [respectius] BC i EF.

Afirmo que la raó entre les esferes $\ominus ABC$ i $\ominus DEF$ és la de BC i EF al cub.

[*Demostració.*] Si la raó entre les esferes $\ominus ABC$ i $\ominus DEF$ no és la de BC i EF al cub,[1046]

aleshores la raó de BC i EF al cub és una d'aquestes dues:[1047]

a) La que hi ha entre l'esfera $\ominus ABC$ i una esfera més petita que l'esfera $\ominus DEF$.

b) La que hi ha entre l'esfera $\ominus ABC$ i una esfera més gran que l'esfera $\ominus DEF$.

a) En primer lloc, suposem que la raó és la que hi ha entre l'esfera $\ominus ABC$ i una de més petita $\ominus GHK$.

Suposem que [l'esfera] $\ominus DEF$ és concèntrica amb la $\ominus GHK$.[1048]

Considerem un sòlid polièdric inscrit en l'esfera més gran $\ominus DEF$, que no toca la més petita $\ominus GHK$. [ExII 17]

Considerem un sòlid polièdric, semblant al de l'esfera $\ominus DEF$, inscrit en l'esfera $\ominus ABC$.

Aleshores, la raó entre el sòlid polièdric de l'esfera $\ominus ABC$ i el de l'esfera $\ominus DEF$ és la de BC i EF al cub, [ExII 12, porisma] i la raó entre l'esfera $\ominus ABC$ i l'esfera $\ominus GHK$ també.

Aleshores, l'esfera $\ominus ABC$ és a la $\ominus GHK$ com el sòlid polièdric de l'esfera $\ominus ABC$ al de l'esfera $\ominus DEF$. [EV 11]

1045. Euclides tanca el llibre XII amb un teorema que és la generalització del teorema que l'obre: «La determinació de la relació dels volums de les esferes». És interessant comparar aquesta demostració amb la d'Arquimedes a *De l'esfera i el cilindre*, proposició 34, edició catalana, p. 137.

1046. Hipòtesi de l'absurd.

1047. Disjunció de casos.

1048. Hi ha una esfera de radi i centre donats, atesos P 3, DI 18 i DXI 14.

Alternando, l'esfera ⊖ ABC és al sòlid polièdric inscrit [en ella] com l'esfera ⊖ GHK a aquest sòlid. [Ev 16]

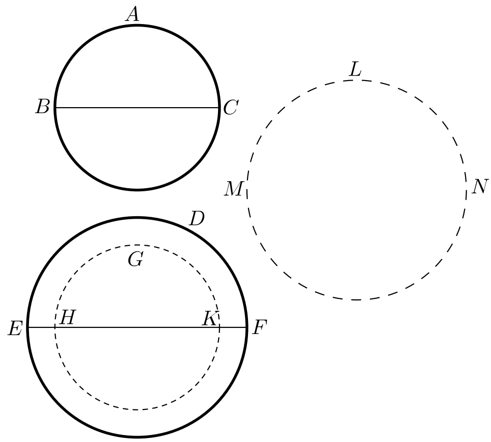


Figura Exii 18

I l'esfera ⊖ ABC és més gran que el sòlid polièdric inscrit.

Per tant, l'esfera ⊖ GHK també ho és més que el sòlid polièdric inscrit en l'esfera ⊖ DEF. [Ev 14]

Però, alhora, també és més petit que ell perquè és un sòlid inscrit. [I això és impossible.]

Per tant, la raó entre l'esfera ⊖ ABC i [una esfera] més petita que la ⊖ DEF no és la del diàmetre BC i el EF al cub. ♠

a_1) De manera semblant, podem veure que la raó entre l'esfera ⊖ DEF i una esfera més petita que la ⊖ ABC no és la de EF i BC al cub. ♠

Afirmo que la raó entre l'esfera ⊖ ABC i una de més gran que la ⊖ DEF no és la que hi ha entre BC i EF al cub.

b) Suposem que és possible.[1049]

Aleshores la raó entre BC i EF al cub és la que hi ha entre l'esfera ⊖ ABC i una de més gran, ⊖ LMN.

Invertendo, la raó entre l'esfera ⊖ LMN i la ⊖ ABC és la del diàmetre EF i el BC al cub. [Ev 7, porisma]

I l'esfera ⊖ LMN és a la ⊖ ABC com la ⊖ DEF a una [esfera] més petita que l'esfera ⊖ ABC,

ja que, com hem vist, [l'esfera] ⊖ LMN és més gran que [la] ⊖ DEF. [Exii 2, lema]

I, aleshores, la raó entre l'esfera ⊖ DEF i una de més petita que ⊖ ABC és la de EF i BC al cub.

1049. Hipòtesi de l'absurd.

I això és impossible. ♠

Per tant, la raó entre l'esfera $\ominus ABC$ i una de més gran que la $\ominus DEF$ és la de BC i EF al cub.

I també hem vist que l'esfera $\ominus ABC$ no té aquesta raó amb una esfera més petita.

En definitiva, la raó entre l'esfera $\ominus ABC$ i la $\ominus DEF$ no és la de BC i EF al cub.

I això és el que volíem demostrar. ♠

A.5 Els sòlids platònics: Exiii

p. 64 **Comentaris.** I arribem al darrer llibre dels *Elements* d'Euclides,[1050] que mostra la manera de construir els sòlids platònics —el tetraedre, l'octaedre, l'icosaedre, el cub i el dodecaedre— ja definits al llibre xi. N'estableix l'existència. I clou el llibre i la monumental obra demostrant que només hi ha aquests cinc. Quina cloenda més notable!

La invenció d'aquests sòlids s'atribueix a l'Escola pitagòrica.[1051] Com que la concepció de l'univers que proposa Plató al *Timeu* es basa en el fet que els sòlids platònics són els components o «elements» de la naturalesa, molts pensadors han atribuït un caràcter platònic als *Elements* d'Euclides, obra l'objectiu de la qual són precisament aquests components.[1052] Això no obstant, segons Suida, les propietats d'aquests cossos —i, en particular, de l'icosaedre i del dodecaedre—, s'atribueixen a Teetet.[1053]

1050. Vegeu Heath (1925), volum iii, p. 365-437; Vera (1970), volum i, p. 959-980; Frajese i Maccioni (1970), p. 984-1040; Kayas (1978), volum i, p. 202-226; Puertas (2008), p. 313-358; Vitrac (2001), p. 377-414; Acerbi (2007), p. 1634-1693. Vegeu també <http://www.opera-platonis.de/euklid/>, llibre xiii, i <http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pd>, p. 471-538.

1051. Pla (2016*b*), p. 140 i 149.

1052. Pla (2016*b*), text C 7*j*, p. 554-559.

1053. Heath (1921), volum i, 159.

Val a dir que la construcció dels sòlids que ofereix Euclides és obscura i complexa. Per això, Hipsicles n'ofereix una de més senzilla, amb només algunes propietats, en un llibre ulterior —el XIV.[1054]

Les proposicions EXIII 1, 2, 3, 4 i 5 —totes relatives a la mitjana i extrema raó— les podia haver plantejat al llibre II,[1055] cosa que li hauria permès donar una visió més completa de la geometria algebraitzada.[1056]

Les proposicions d'EXIII 6 a 12 proporcionen certs lligams de les arestes dels polígons regulars com a elements de les proposicions següents.

Les proposicions EXIII 13, 14, 15, 16 i 17 ofereixen la construcció dels poliedres regulars, i proporcionen, en llenguatge geomètric, el valor dels seus costats en relació amb el radi de l'esfera que els circumscriu.

També n'hi trobem de referides a les propietats i els lligams dels polígons regulars de tres, cinc, sis i deu costats inscrits en un cercle [EXIII 18].[1057] A més, com a cloenda, dona la demostració que solament n'hi ha cinc [EXIII 18].

A.5*a* Les definicions (Ὅροι) p. 64

No hi ha definicions. S'hi fan servir les del llibre XI.

1054. Vegeu § 1.6 (pàgina 68).

1055. Hauria pogut donar la definició alternativa a DVI 2: «La divisió "àuria" d'un segment la determina un punt que el divideix en dues parts, de manera que el rectangle format pel segment total i la part petita equival al quadrat de la part gran.» I, al llibre VI, hauria pogut veure que la divisió és en «mitjana i extrema raó».

1056. D'acord amb PROCLE (1970*b*), § 67 6, edició anglesa, p. 55, i francesa, p. 59-60; són resultats obtinguts per Èudox. Pel que fa al seu lligam amb l'«anàlisi» i la «síntesi», vegeu PUERTAS (2008), nota 70, p. 314.

1057. De fet, són resultats propis del llibre IV però que, com que necessiten la teoria de la proporció, s'haurien d'haver establert al llibre VI. No obstant això, Euclides els desplaça a aquest punt perquè són «elements» d'aquest llibre XIII.

p. 64

A.5*b* Les proposicions

EXIII 1. *Si dividim un segment rectilini en mitjana i extrema raó, el quadrat de costat la part*[1058] *gran més la meitat del segment equival a cinc vegades el quadrat de costat la meitat.*[1059]

Pel punt C, tallem un segment rectilini AB en mitjana i extrema raó. [EII 11 i EVI 3]

Sigui AC la part més gran.

Prolonguem CA amb [el segment] AD igual a la meitat de AB. [P 2]

[Considerem els quadrats $\square\, AE$ i $\square\, DH$ de costats AB i DA.] ♣

Afirmo que el quadrat de [costat] CD és cinc vegades el de costat DA.

[*Demostració.*] Considerem els quadrats $\square\, AE$ i $\square\, DF$ de costats AB i DC[, respectivament]. [EI 46]

Dibuixem la figura DF.[1060] [EI 46]

Considerem el segment FC i el prolonguem fins a G. [P 2]

Atès que hem dividit AB en mitjana i extrema raó per [el punt] C, el [rectangle de costats AB i BC], $\square\, ABC$,[1061]

1058. En aquest capítol, llevat que ho indiquem de manera explícita, usem el terme *part* en el sentit que té en català i no en l'específic de DV 1.

1059. Amb aquesta proposició i la següent, Euclides proporciona una caracterització geomètrica de la mitjana i extrema raó, i inicia un grup de sis proposicions que en parlen.

En terminologia actual, la demostració «completa un quadrat». En concret, si la longitud del segment és a, aleshores la longitud de la part gran s'obté resolent l'equació que proporciona la proporció $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, és a dir, $x^2 + a\,x - a^2 = x^2 + 2\,\frac{a}{2}\,x - 4\,(\frac{a}{2})^2 = 0$. Si completem el quadrat, tenim: $x^2 + 2\,\frac{a}{2}\,x + (\frac{a}{2})^2 = 4\,(\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2$. Per tant, $(x + \frac{a}{2})^2 = 5\,(\frac{a}{2})^2$. La part gran x val $x = \frac{1}{2}\,(\sqrt{5} - 1)\,a$ i la part petita, $a - x = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})\,a$.

Com ja hem indicat abans, aquesta proposició es podria haver establert, enunciant-la de manera adient, al llibre II. Però, atès que és un «element» del llibre XIII, Euclides, fidel a una metodologia que ja hem trobat abans i hem comentat, l'estableix ara, quan li fa falta.

1060. El quadrat de costat CD.

1061. De vegades, Euclides usa ABC per designar els dos costats del rectangle, AB i BC. Nosaltres ho hem evitat i hem preferit l'expressió «de costats AB i CD».

equival al de costat AC. [Dii11][1062]

Siguin ▭ CE el [rectangle] de costats AB i BC,
i □ FH el quadrat de [costat] AC.

D'això en resulta que ▭ CE equival a □ FH. [Nc 1, iterat]

I, com que BA és el doble de AD,
BA és igual a KA, i AD a AH,
resulta que KA també és el doble de AH. [Nc 5′]

I KA és a AH com ▭ CK a ▭ CH. [Evi 1]

Per tant, ▭ CK és el doble de ▭ CH. [Dv 5]

Però ▭ LH més ▭ HC també és el doble de ▭ CH. [Ei 43 i Nc 2]

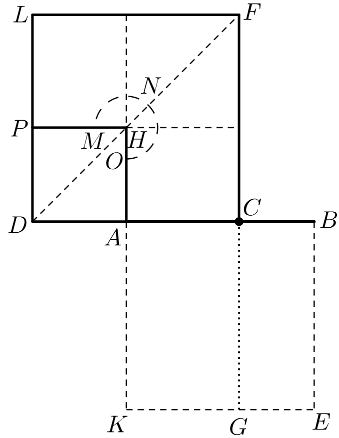


Figura Exiii 1

Aleshores, ▭ KC equival a ▭ LH més ▭ HC. [Nc 1]

Però hem vist que ▭ CE equival a □ HF.

Per tant, el quadrat □ AE equival al gnòmon ⌝ MNO.[1063] [Nc 2]

I, atès que BA és el doble de AD,
el quadrat de [costat] BA és quatre vegades el de costat AD,
és a dir, □ AE quatre vegades □ DH. [Eii 4]

I □ AE equival al gnòmon ⌝ MNO.

En definitiva, el gnòmon ⌝ MNO ho és a quatre vegades □ AP.[1064]

Per tant, tot [el quadrat] □ DF equival a cinc vegades □ AP. [Nc 1]

I □ DF i □ AP són els quadrats de [costats] DC i DA, respectivament.

De tot això en resulta que el quadrat de [costat] CD és cinc vegades el de costat DA.

I això és el que volíem demostrar. ♠

1062. També podem atribuir-ho a Dvi 3 i Evi 17, ja que, de fet, al llibre ii no ha introduït la definició de mitjana i extrema raó perquè no disposa del concepte de proporció.

1063. Pel mètode tangram.

1064. Les dues expressions □ AP i □ DH fan referència al quadrat de costat AD.

EXIII 2. *Si el quadrat d'un segment rectilini equival a cinc vegades el quadrat de costat una part* [*del segment*]*, i el doble d'aquesta part es talla en mitjana i extrema raó, la part gran és el que sobra del segment*[*, és a dir, l'altra part*]*.*[1065]

Considerem el quadrat de costat el segment AB [equivalent a] cinc vegades el de costat la part AC,

i [el segment] CD [igual a]l doble d'aquesta part. [P 2 i EI 2]

Afirmo que, si tallem [el segment] CD en mitjana i extrema raó, la part més gran és [precisament] CB.

[*Demostració.*] Fem els quadrats $\square AF$ i $\square CG$ de costats [respectius] AB i CD. [EI 46]

Un cop fet [el quadrat] $\square AF$, [dins el quadrat $\square CG$] prolonguem [el costat FB] una distància equivalent al segment BE. [P 2]

Atès que el quadrat de [costat] BA equival a cinc vegades el de costat AC,

$\square AF$ ho és a cinc vegades $\square AH$.

I, aleshores, resulta que el gnòmon $\urcorner MNO$ equival a quatre vegades $\square AH$. [Nc 3]

A més, atès que [el segment] DC és el doble del CA,

el quadrat de [costat] DC també equival a quatre vegades el de costat CA, [EII 4]

és a dir, $\square CG$ ho és a quatre vegades $\square AH$,

i el gnòmon $\urcorner MNO$ també.

Per tant, el gnòmon $\urcorner MNO$ equival al [quadrat] $\square CG$. [Nc 1]

Però, com que DC és el doble de CA

i DC i AC són iguals a CK i CH, respectivament,

resulta que [KC també és el doble de CH], [Nc 5′]

▭ KB de ▭ BH, [EVI 1]

i ▭ LH més ▭ HB de ▭ HB. [EI 43]

1065. Aquesta proposició és la recíproca de l'anterior. Fixem-nos en el redactat. No s'hauria entès millor, si hagués dit: «Considerem un segment, dividim-lo en dues parts i prenem el segment format per la part gran [del segment donat] prolongada una meitat. Si el quadrat d'aquest segment equival a cinc vegades el de la meitat del segment donat, aleshores el segment donat s'ha dividit en mitjana i extrema raó»? Vegeu el problema 39 (pàgina 79) i la demostració directa del lema.

Aleshores, ▭ KB equival a ▭ LH més ▭ HB. [Nc 1]

Però hem vist que el gnòmon ⌝ MNO ho és a tot □ CG.

En conseqüència, el residu □ HF equival al ▭ BG, [Nc 3]
i[, per construcció,] ▭ BG és el rectangle de [costats] CD i DB.

Però [el costat] CD és igual al DG i □ HF és el quadrat de costat CB.

Per tant, el rectangle de [costats] CD i DB equival al quadrat de [costat] CB. [Nc 1]

A més, DC és a CB com CB a BD, [Evi 17]
i DC és més gran que CB. [vegeu el lema]

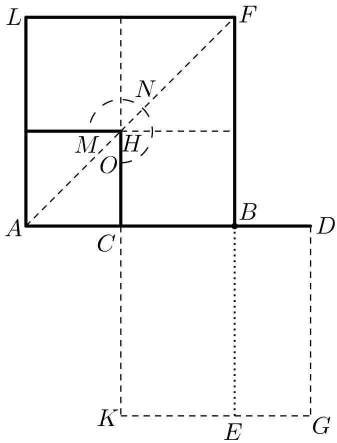


Figura Exiii 2

De tot això en resulta, doncs, que CB també és més gran que BD. [Ev 14]

Per tant, si tallem el segment CD en mitjana i extrema raó, la part més gran és CB. [Dvi 3]

En definitiva, si el quadrat de costat un segment donat equival a cinc vegades el quadrat d'una part [del costat donat]
i el doble d'aquesta part es divideix en mitjana i extrema raó,
la part més gran [de la mitjana i extrema raó] és el residu del segment original.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exiii 2, lema. *El doble de* $AC[, DC,]$ *és més gran que* BC.[1066]

Ho podem veure així.

[*Demostració.*] Suposem que el doble de AC no és més gran que BC.[1067]

a) Sigui BC el doble de CA. [P 2 i Ei 2]

1066. Heiberg dubta de l'autenticitat del lema i considera desmesurat l'ús de la reducció a l'absurd. És categòric. Diu: «Dubito un hoc lemma genuinum non sit, neque enim opus est, et dicendi genus lin. 18 paulo insolentius est.»

1067. Hipòtesi de l'absurd.

Aleshores, el quadrat de [costat] BC equival a quatre vegades el de costat CA. [EII 4]

Per tant, la [suma dels quadrats] de costats BC i CA equival a cinc vegades el quadrat de [costat] CA. [Nc 2]

I hem suposat que el quadrat de [costat] BA ho és a cinc vegades el de costat CA.

Per tant, el quadrat de [costat] BA equival a la [suma dels quadrats de costats] BC i CA. [Nc 1]

I això és impossible. [EII 4]

En conseqüència, CB no és el doble de AC. ♠

b) De manera semblant, podem veure que un segment més petit que CB tampoc no és el doble de AC perquè això encara és més absurd. ♠

Així doncs, el doble de AC és més gran que CB.

I això és el que volíem demostrar. ♠

EXIII 3. *Si tallem un segment en mitjana i extrema raó, el quadrat de costat la part petita afegida a la meitat de la part gran equival a cinc vegades el quadrat de costat la meitat de la part gran.*[1068]

Suposem que hem tallat un segment AB en mitjana i extrema raó pel punt C.

Sigui AC la part més gran.

Suposem també que hem dimidiat [el segment] AC per [el punt] D [i construïm els quadrats de costats BD i DC]. [EI 46] ♣

Afirmo que el quadrat de [costat] BD equival a cinc vegades el de costat DC.

[*Demostració*.] Considerem el quadrat $\square AE$ de costat AB. [EI 46]

Atès que AC és el doble de DC,

el quadrat de [costat] AC equival a quatre vegades el de costat DC, [EII 4]

és a dir, [el quadrat] $\square RS$ ho és a quatre vegades el $\square FG$.

Tirem els segments paral·lels DL, CS, RM i HN [EI 31] (figura EXIII 3).

1068. Vegeu els valors algebraics $x, a-x$ de les parts gran i petita de la mitjana i extrema raó d'un segment de longitud a (nota 1059, pàgina 542).

Atès que el rectangle de [costats] AB i BC
—que és [el] ▭ CE—
equival al quadrat de [costat] AC, [Dvi 3 i Evi 17]
tenim que [el rectangle] ▭ CE ho és a[l quadrat] □ RS,
i □ RS equival a quatre vegades [el quadrat] □ FG.

Aleshores, [el rectangle] ▭ CE també ho és a quatre vegades [el quadrat] □ FG. [Nc 1]

De bell nou, atès que [els segments] AD i DC són iguals,
també ho són [els segments] HK i KF. [Ei 33 o 34]

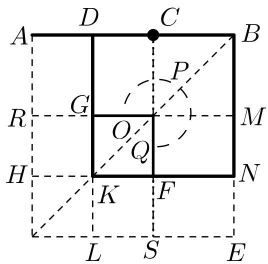


Figura Exiii 3

Per tant, els quadrats □ GF i □ HL són equivalents.[1069]

A més, GK és igual a KL, és a dir, MN [igual] a NE. [Di 22 i Ei 34]

D'això en resulta que ▭ MF i ▭ FE també ho són. [Ei 36]

Però [el rectangle] ▭ MF ho és a[l rectangle] ▭ CG. [Ei 43]

Per tant, [els rectangles] ▭ CG i ▭ FE també són iguals. [Nc 1]

Afegim [el rectangle] ▭ CN a cadascun.

Aleshores, el gnòmon ⌝ OPQ és igual a[l rectangle] ▭ CE. [Nc 2]

Però hem vist que [el rectangle] ▭ CE equival a quatre vegades [el quadrat] □ GF.

En definitiva, doncs, el gnòmon ⌝ OPQ també ho és a quatre vegades el quadrat □ FG. [Nc 1]

D'això en resulta que aquest gnòmon més el quadrat □ FG equival a cinc vegades [el quadrat] □ FG. [Nc 2]

Però[, per construcció,] el gnòmon ⌝ OPQ més el quadrat □ FG ho és a[l quadrat] □ DN,
i □ DN i □ GF són els [quadrats] de costats DB i DC[, respectivament].

Per tant, el quadrat de [costat] DB equival a cinc vegades el de costat DC. [Nc 1]

I això és el que volíem demostrar. ♠

1069. Vegeu la nota 596 (pàgina 256).

Exiii 4. *Si tallem un segment en mitjana i extrema raó, la suma dels quadrats de costat el segment i la seva part petita equival a tres vegades el quadrat de costat la seva part gran.*[1070]

Siguin AB un segment dividit en mitjana i extrema raó pel punt C i AC la part més gran.

Afirmo que la suma dels quadrats de [costats] AB i BC equival a tres vegades el quadrat de [costat] CA.

[*Demostració.*] Considerem el quadrat □ $ADEB$ de costat AB, [Ei 46]
i dibuixem la resta [de la figura Exiii 4].[1071]

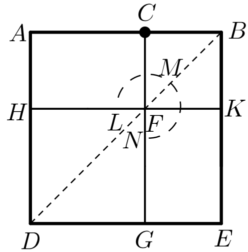


Figura Exiii 4

Aleshores, com que hem dividit [el segment] AB en mitjana i extrema raó per [el punt] C,
i AC és la part més gran;
el rectangle de [costats] AB i BC equival al quadrat de [costat] AC. [Dvi 3 i Evi 17]

I [el rectangle] ▭ AK és el rectangle de [costats] AB i BC,
i □ HG el quadrat de [costat] AC.

Per tant, ▭ AK equival a □ HG. [Nc 1]

I, atès que ▭ AF i ▭ FE són equivalents, [Ei 43]
si afegim ▭ CK a tots dos,
tenim que els totals, ▭ AK i ▭ CE, també ho són. [Nc 2]

Aleshores, ▭ AK més ▭ CE equival al doble de ▭ AK. [Nc 2]

Però ▭ AK més ▭ CE és el gnòmon ⌝ LMN més el quadrat □ CK.

Així doncs, el gnòmon ⌝ LMN més el quadrat □ CK equival al doble de ▭ AK. [Nc 1]

1070. Amb els valors algebraics d'aquestes parts (nota 1059, pàgina 542), l'enunciat diu: $a^2+(a-x)^2=3\,x^2$. En efecte, tenim que $a^2+(a-x)^2 = (a+(a-x))^2-2\,a\,(a-x) = 4\,a^2-4\,a\,x+x^2-2\,x^2 = 4\,a\,(a-x)-x^2 = 4\,x^2-x^2 = 3\,x^2$.

1071. Els segments CG i HK són paral·lels als costats respectius del quadrat [Ei 31].

Però hem vist que [el rectangle] ▭ AK ho és a[l quadrat] □ HG.

Per tant, el gnòmon ⌝ LMN més [el quadrat] □ CK equival al doble de □ HG. [Nc 2]

En definitiva, el gnòmon ⌝ LMN [més] els quadrats □ CK i □ HG ho és a tres vegades el quadrat □ HG. [Nc 2]

Però el gnòmon ⌝ LMN més els quadrats □ CK i □ HG equival al total de □ AE més □ CK

—que són els quadrats de costats AB i BC[, respectivament],—

i □ GH és el quadrat de costat AC.

Per tant, la suma dels quadrats de [costats] AB i BC equival a tres vegades el quadrat de costat AC. [Nc 1]

I això és el que volíem demostrar. ♠

EXIII 5. *Si tallem un segment en mitjana i extrema raó i hi afegim un* [*segment*] *igual a la part més gran, el segment que en resulta també està dividit en mitjana i extrema raó, i el segment original n'és la part més gran.*[1072]

Dividim el segment AB en mitjana i extrema raó pel punt C.

Sigui AC la part gran.

Fem AD igual a AC. [P 2 i EI 2]

Afirmo que el segment DB queda dividit en mitjana i extrema raó pel punt A,

i el [segment] original AB n'és la part més gran.[1073]

[*Demostració.*] Considerem el quadrat □ AE de costat AB [EI 46]

i fem la resta de la figura EXIII 5.

Atès que hem dividit [el segment] AB en mitjana i extrema raó pel punt C,

---

1072. D'alguna manera, aquest teorema mostra el caràcter iteratiu de la divisió d'un segment en mitjana i extrema raó: «Si dividim un segment en mitjana i extrema raó i portem la part petita damunt la gran, resulta que [la part gran] queda dividida en mitjana i extrema raó, i la petita és la part gran [d'aquesta nova divisió].» Vegeu el problema 40 (pàgina 79). Euclides itera cap enfora mentre que l'enunciat que acabem d'exposar ho fa cap endins.

1073. Vegeu que, algebraicament, si $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, aleshores, *invertendo*, $\frac{x}{a} = \frac{a-x}{x}$, i, *componendo*, $\frac{a+x}{a} = \frac{a}{x}$. Anàlogament, podríem haver establert més directament que $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, i, *separando*, que $\frac{a-x}{x} = \frac{2\,x-a}{a-x}$.

resulta que el rectangle de [costats] AB i BC equival al quadrat de [costat] AC, [DVI3 i EVI 17]
▭ CE és el rectangle de [costats] AB i BC,
i □ CH el quadrat de [costat] AC.

Però el [rectangle] ▭ HE equival al ▭ CE, [EI 43]
i el □ DH al □ HC.

Per tant, □ DH també equival a ▭ HE. [Nc 1]

[Afegim ▭ HB a tots dos.]

Aleshores, el total ▭ DK equival al total ▭ AE, [Nc 2]
i ▭ DK és el rectangle de [costats] BD i DA.

Però AD és igual a DL [per construcció]
i ▭ AE és el quadrat de [costat] AB.

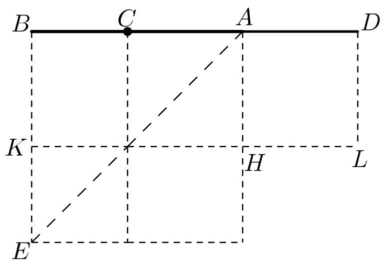


FIGURA EXIII 5

Per tant, el rectangle de [costats] BD i DA equival al quadrat de [costat] □ AB, [Nc 1]
DB és a BA com BA a AD, [EVI 17]
DB és més gran que BA, [per construcció]
però BA també ho és més que AD. [EV 14]

En definitiva, hem dividit DB en mitjana i extrema raó per [el punt] A,
i la part més gran és [el segment original] AB.
I això és el que volíem demostrar. ♠[1074]

EXIII 6. *Si dividim un segment en mitjana i extrema raó, cadascuna de les parts és un [segment] irracional anomenat* apòtom.[1075]

1074. Les cinc proposicions s'haurien d'haver establert després d'EII 11.

1075. Hi ha un escoli d'EXIII 17 que prova això mateix, cosa que fa que no tingui sentit aquesta proposició i que, per tant, l'hàgim de considerar una interpolació, probablement de Pappos, que la situa abans de la demostració alternativa d'EXIII 5. Però, de fet, és una interpolació supèrflua, un cop establertes les proposicions EX 36 i EX 37. Vegeu les notes corresponents. Tanmateix, a EXIII 17, la part més gran de la divisió ha de ser un apòtom però la petita no.

Suposem que hem dividit [el segment] AB en mitjana i extrema raó per [el punt] C.

Sigui AC la part més gran.

Afirmo que cadascun [dels segments] AC i CB és [un segment] irracional anomenat *apòtom.*

[*Demostració.*]

a_1) Prolonguem BA fins a D de manera que AD sigui [igual] a la meitat de BA. [P 2, EI 2 i 3, i 10]

Atès que hem dividit el segment AB en mitjana i extrema raó per [el punt] C,

FIGURA EXIII 6

i que, a la part més gran AC,
hi hem afegit AD, que equival a la meitat de AB,
resulta que el quadrat de [costat] CD equival a cinc vegades el de costat DA. [EXIII 1]

Aleshores, la raó entre els quadrats de [costats] CD i DA és la que hi ha entre un nombre i un altre.

Per tant, el quadrat de [costat] CD és commensurable amb el de costat DA, [EX 6]
i el quadrat de [costat] DA és racional. [DX 1.4]

Ara bé, DA és racional perquè la meitat de AB ho és. [DX 1.3]

Aleshores, el quadrat de [costat] CD també ho és. [DX 1.4]

Per tant, [el segment] CD és racional. ♠

a_2) Però, atès que la raó entre els quadrats de [costats] CD i DA no és la que hi ha entre un nombre quadrat i un altre;
CD és incommensurable en longitud amb DA. [EX 9]

Per tant, CD i DA són [segments] racionals [que] només són commensurables en quadrat,
i AC és un apòtom. [EX 73] ♠

b) De bell nou, atès que hem dividit [el segment] AB en mitjana i extrema raó, i que AC n'és la part més gran,
el rectangle de [costats] AB i BC equival al quadrat de [costat] AC. [DVI 3 i EVI 17]

Aleshores, el quadrat de [costat] l'apòtom AC,
aplicat al [segment] racional AB, produeix una amplada BC.

Però el quadrat de [costat] un apòtom, aplicat a un [segment] racional, produeix l'amplada d'un primer apòtom. [Ex 97]

A més, CB és un primer apòtom. ♠

I hem vist que CA també és un apòtom.

Per tant, si dividim un [segment] racional en mitjana i extrema raó, cadascuna de les parts és un [segment] irracional anomenat *apòtom.* I això és el que volíem demostrar. ♠

Exiii 7. *Si tres angles, consecutius o no, d'un pentàgon equilàter són iguals, el pentàgon és equiangle.*[1076]

Siguin iguals entre si els tres angles d'un pentàgon equilàter ⬠ $ABCDE$.

a) En primer lloc, suposem que són [els angles] consecutius [de vèrtexs] A, B i C.

Afirmo que el pentàgon ⬠ $ABCDE$ és equiangle.

[*Demostració*.] Unim AC, BF i FD. [P 1]

Atès que els [segments] CB i BA són igual als BA i AE, respectivament, i que els angles $\widehat{CBA}$ i $\widehat{BAE}$ són iguals, resulta que les bases AC i BE, i els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle ABE$ també ho són.

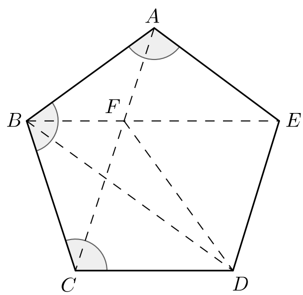


Figura Exiii 7

Per tant, els altres angles són iguals, respectivament, als angles que subtendeixen costats iguals, [Ei 4] és a dir, [els angles] $\widehat{BCA}$ i $\widehat{ABE}$ als $\widehat{BEA}$ i $\widehat{CAB}$, respectivament.

Aleshores, els costats AF i BF són iguals. [Ei 6]

Però hem vist que les cordes AC i BE també ho són.

Per tant, els residus FC i CD són iguals als residus FE i DE. [Nc 3]

Així, els dos [segments] FC i CD ho són als dos [segments] FE i ED[, respectivament], i la base FD és comuna.

1076. En un pentàgon equilàter, tres angles determinen que sigui regular. Observem, tanmateix, que un pentàgon equilàter amb dos angles iguals no és necessàriament regular. Vegeu el problema 41 (pàgina 79).

Aquí, Euclides inicia un grup de sis proposicions que lliguen els quadrats dels costats del pentàgon, del triangle equilàter i del decàgon.

A més, l'angle $\widehat{FCD}$ és igual al $\widehat{FED}$. [EI 8]

I hem vist que [els angles] $\widehat{BCA}$ i $\widehat{AEB}$ també ho són.

Per tant, els angles totals $\widehat{BCD}$ i $\widehat{AED}$ també. [Nc 2]

Però hem suposat que [l'angle] $\widehat{BCD}$ [és igual] als angles $\hat{A}$ i $\hat{B}$ [de vèrtexs A i B].

Per tant, [l'angle] $\widehat{AED}$ també ho és. [Nc 1]

De manera semblant, podem veure que l'angle $\widehat{CDE}$ és igual als angles $\hat{A}, \hat{B}$ i $\hat{C}$ [de vèrtexs A, B i C].

En definitiva, el pentàgon $\pentagon\, ABCDE$ és equiangle. ♠

b) Ara considerem que els [tres] angles iguals no són consecutius, per exemple, els [angles] $\hat{A}, \hat{C}$ i $\hat{D}$ [de vèrtexs els punts A, C i D].

Afirmo que, en aquest cas, el pentàgon $\pentagon\, ABCDE$ també és equiangle.

[*Demostració.*] Unim BD. [P 1]

Atès que els [segments] BA i AE són iguals als BC i CD,
i que contenen angles iguals,
resulta que les bases BE i BD són iguals,
els triangles $\triangle\, ABE$ i $\triangle\, BCD$ també,
i la resta d'angles ho és a la resta d'angles que subtendeixen costats iguals, respectivament. [EI 4]

Aleshores, els angles $\widehat{AEB}$ i $\widehat{BED}$ són iguals a[ls angles] $\widehat{CDB}$ i $\widehat{BDE}$,
ja que el costat BE també ho és al BD. [EIII 28]

Per tant, els angles totals $\widehat{AED}$ i $\widehat{CDE}$ també ho són. [Nc 2]

Però hem suposat que [l'angle] $\widehat{CDE}$ és igual als angles $\hat{A}$ i $\hat{C}$ [de vèrtexs A i C].

Per tant, l'angle $\widehat{AED}$ també ho és. [Nc 1]

Pel mateix [raonament], [l'angle] $\widehat{ABC}$ és igual als angles $\hat{A}, \hat{C}$ i $\hat{D}$ [de vèrtexs A, C i D].

En definitiva, el pentàgon $\pentagon\, ABCDE$ és equiangle. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exiii 8. *Dos segments que subtendeixen dos angles consecutius*[1077] *d'un pentàgon regular es tallen entre si en mitjana i extrema raó, i les parts més grans [corresponents] són [iguals a]l costat del pentàgon.*[1078]

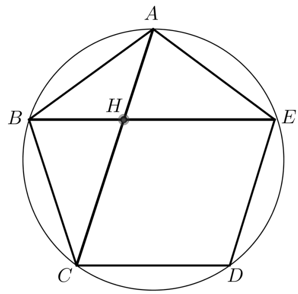


Figura Exiii 8

Considerem les diagonals AC i BE del pentàgon regular ⬠ $ABCDE$ que subtendeixen dos angles consecutius $\hat{A}$ i $\hat{B}$[, de vèrtexs A i B,] que es tallen pel punt H.

Afirmo que el punt H talla totes dues [diagonals] en mitjana i extrema raó,
i que les parts grans [de cada una] són iguals al costat del pentàgon.

[*Demostració.*] *a*) Considerem el cercle ○$ABCDE$ que circumscriu el pentàgon ⬠ $ABCDE$. [Eiv 14]

Atès que els segments EA i AB són iguals als AB i BC[, respectivament],
i que contenen angles iguals,
resulta que les bases BE i AC,
i els triangles $\triangle\, ABE$ i $\triangle\, ABC$ són iguals,
i els altres angles ho són als altres angles que subtendeixen cordes iguals. [Ei 4]

Aleshores, l'angle $\widehat{BAC}$ és igual a [l'angle] $\widehat{ABE}$.

Per tant, [els angles] $\widehat{AHE}$ i $\widehat{EAC}$ són el doble [dels angles] $\widehat{BAH}$ i $\widehat{BAC}$, [Ei 32]
ja que l'arc de circumferència $\widehat{EDC}$ és el doble de [l'arc de circumferència] $\widehat{CB}$. [Eiii 28 i Evi 33]

Aleshores, l'angle $\widehat{HAE}$ és igual a [l'angle] $\widehat{AHE}$. [Nc 5′]

En conseqüència, el segment HE també ho és al EA,
és a dir, al AB. [Ei 6]

I, atès que el segment BA és igual al AE,
l'angle $\widehat{ABE}$ també ho és al $\widehat{AEB}$. [Ei 5]

1077. És a dir, dues diagonals.

1078. Aquesta proposició, que lliga amb Eiv 12, constitueix una part de l'«anàlisi» del pentàgon i justifica la manera que fa servir Euclides per construir el pentàgon regular.

Aleshores, els angles $\widehat{BEA}$ i $\widehat{BAH}$ també són iguals, [Nc 1]
i [l'angle] $\widehat{ABE}$ és comú als dos triangles $\triangle\, ABE$ i $\triangle\, ABH$.

Per tant, l'altre angle $\widehat{BAE}$ és igual a l'altre [angle] $\widehat{AHB}$. [EI 32]

I els triangles $\triangle\, ABE$ i $\triangle\, ABH$ són equiangles.[1079]

En conseqüència, EB és a BA com AB a BH. [EVI 4]

Però BA és igual a EH.

Per tant, BE és a EH com EH a HB, [EV 7, iterat]
i [el segment] BE és més gran que el EH.

De retruc, EH també ho és més que HB. [EV 14]

En definitiva, el punt H divideix [el segment] BE en mitjana i extrema raó,
i la part més gran HE és igual al costat del pentàgon. ♠

b) De manera semblant, podem veure que el punt H divideix AC en mitjana i extrema raó,
i que la part més gran CH és igual al costat del pentàgon. ♠

I això és el que volíem demostrar. ♠

EXIII 9. *Si ajuntem un costat d'un hexàgon amb un d'un decàgon, tots dos* [*regulars*] *inscrits en el mateix cercle, el punt d'unió dels segments units divideix* [*el segment que en resulta*] *en mitjana i extrema raó, i la part més gran és el costat de l'hexàgon.*[1080]

Considerem un cercle $\bigcirc ABC$.

Siguin BC i CD els costats d'un decàgon i d'un hexàgon regulars inscrits en el cercle $\bigcirc ABC$[, respectivament].

Els col·loquem en un segment [rectilini, l'un al costat de l'altre]. [EI 2]

1079. La demostració és molt semblant a la que fem actualment. Tanmateix, és curiós que Euclides usi aquests triangles i no els $\triangle\, ADC$ i $\triangle\, ECB$, que són els que fa servir a EIV 11, com a «elements» de la «construcció efectiva del pentàgon».

1080. És a dir, $\frac{r+d_{10}}{r} = \frac{r}{d_{10}}$, en què r és el radi del cercle i, de retruc, el costat de l'hexàgon. D'això en resulta que $d_{10} = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\, r$. Fixemnos que aquest element lliga, d'una manera geomètrica molt especial, els costats de l'hexàgon i el pentàgon inscrits en un mateix cercle, d_6 i d_{10}. De fet, també resol, d'una manera alternativa, la construcció del decàgon inscrit en un cercle sense haver de recórrer al pentàgon.

Afirmo que [el punt] C talla el segment conjunt BD en mitjana i extrema raó, i que [el segment] CD n'és la part més gran.

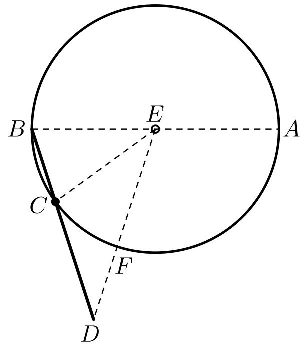


FIGURA EXIII 9

[*Demostració.*][1081] Considerem el centre E del cercle. [EIII 1]

Unim EB, EC i ED. [P 1]

Prolonguem BE fins a[l punt] A. [P 2]

Aleshores, atès que BC és un costat d'un decàgon equilàter, l'arc $\widehat{ACB}$ és cinc vegades el $\widehat{BC}$. [EIII 20]

Per tant, l'arc $\widehat{AC}$ és quatre vegades el $\widehat{CB}$.[1082]

I, com que l'arc $\widehat{AC}$ és al $\widehat{CB}$ com l'angle $\widehat{AEC}$ al $\widehat{CEB}$, [EVI 33] [l'angle] $\widehat{AEC}$ és quatre vegades el $\widehat{CEB}$. [DV 5]

I, com que l'angle $\widehat{EBC}$ és igual al $\widehat{ECB}$, [EI 5] l'angle $\widehat{AEC}$ és el doble del $\widehat{ECB}$. [EI 32]

Ara bé, el segment EC és igual al CD —cadascun és igual al costat de l'hexàgon [regular inscrit] en el cercle $\circ ABC$—, [EIV 15, porisma] i l'angle $\widehat{CED}$ ho és al $\widehat{CDE}$. [EI 5]

Per tant, l'angle $\widehat{ECB}$ val el doble que el $\widehat{EDC}$. [EI 32]

Però hem vist que [l'angle] $\widehat{AEC}$ és el doble del $\widehat{ECB}$.

Per tant, [l'angle] $\widehat{AEC}$ és quatre vegades el $\widehat{EDC}$. [Nc 5′]

Però també hem vist que [l'angle] $\widehat{AEC}$ és quatre vegades el $\widehat{BEC}$.

Aleshores, [l'angle] $\widehat{EDC}$ és igual al $\widehat{BEC}$, [Nc 1] i el $\widehat{EBD}$ és comú als dos triangles $\triangle BEC$ i $\triangle BED$.

Per tant, l'altre [angle] $\widehat{BED}$ és igual a [l'altre angle] $\widehat{ECB}$. [EI 32]

I els triangles $\triangle EBD$ i $\triangle EBC$ són equiangles.

En conseqüència, DB és a BE com EB a BC, [EVI 4] i EB és igual a CD.

Aleshores, BD és a DC com DC a CB. [EV 7]

Però BD és més gran que DC.

Per tant, DC també ho és més que CB. [EV 14]

1081. Tot analitzant els angles, estableix l'equivalència dels triangles $\triangle EBD$ i $\triangle EBC$. La proposició és, aleshores, immediata.

1082. Sostracció d'arcs o d'angles [Nc 3].

En definitiva, [el punt C] divideix el segment BD en mitjana i extrema raó, i [el segment] DC n'és la part més gran.
I això és el que volíem demostrar. ♠[1083]

Eɪɪɪ 10. *Si inscrivim un pentàgon equilàter en un cercle, el quadrat de costat el del pentàgon equival a la suma dels quadrats de costats el de l'hexàgon i el del decàgon inscrits en aquest cercle.*[1084]
Siguin $\bigcirc ABCDE$ un cercle
i $\pentagon\, ABCDE$ el pentàgon equilàter que hi està inscrit.[1085]

Afirmo que el quadrat de costat el costat del pentàgon $\pentagon\, ABCDE$ és la [suma dels quadrats] de costats el de l'hexàgon i el del decàgon inscrits en el cercle $\bigcirc ABCDE$.

[*Demostració.*] Considerem el centre del cercle. [Eɪɪɪ 1]
Sigui aquest centre el punt F.
Unim AF i el prolonguem fins al punt G [P 1 i 2]
i unim també FB. [P 1]
Pel punt F tirem el [segment] FH perpendicular a AB. [Eɪ 12]
El prolonguem fins al punt K. [P 2]
Unim AK i KB. [P 1]
Novament, considerem el segment FL perpendicular a[l segment] AK per [el punt] F. [Eɪ 12]
El prolonguem fins a[l punt] M. [P 2]
Unim KN. [P 1]
Atès que l'arc $\widehat{ABCG}$ és igual al $\widehat{AEDG}$,[1086]
i que els arcs $\widehat{ABC}$ i $\widehat{AED}$ també ho són entre si,
[per definició i Nc 5′]
tenim que els arcs que queden, $\widehat{CG}$ i $\widehat{GD}$, també. [Nc 3]

1083. Analíticament, Euclides ha trobat el valor a_{10} del decàgon regular en funció del radi: $a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$.

1084. És l'expressió numèrica de la longitud del costat del pentàgon a_5 en funció del radi r de la circumferència circumscrita. Pel teorema anterior, tenim que $AK = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$. I, per tant, $AB^2 = r^2 + \frac{r^2}{4}(6-2\sqrt{5}) = \frac{r^2}{4}(10-2\sqrt{5})$. Per tant, $a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

1085. Si té els costats iguals i està inscrit en un cercle, té els angles iguals. És a dir, és regular. Vegeu Eɪɪɪ 24, 28 i 29.

1086. Són dues semicircumferències. Vegeu Dɪ 17.

I, com que CD és [un costat] del pentàgon,[1087]
CG n'és [un] del decàgon.[1088]

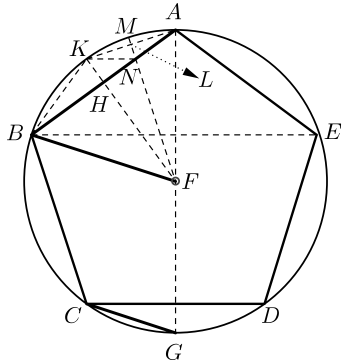


Figura EIII 10

I com que FA és igual a FB,
i FH és perpendicular [a AB],
els angles $\widehat{AFK}$ i $\widehat{KFB}$ són iguals. [P 4 i EI 5 i 26]

Per tant, l'arc $\overset{\frown}{AK}$ ho és al $\overset{\frown}{KB}$. [EIII 26]

Aleshores, l'arc $\overset{\frown}{AB}$ és el doble del $\overset{\frown}{BK}$. [Nc 2]

Per tant, el segment AK és el costat del decàgon.[1087]

Per les mateixes raons, AK és el doble de KM.

I, atès que l'arc $\overset{\frown}{AB}$ és el doble del $\overset{\frown}{BK}$,
i el $\overset{\frown}{CD}$ és igual al $\overset{\frown}{AB}$, [hipòtesi i EIII 28]
tenim que l'arc $\overset{\frown}{CD}$ també és el doble del $\overset{\frown}{BK}$. [Nc 1]

Però [hem vist que] l'arc $\overset{\frown}{CD}$ és el doble del $\overset{\frown}{CG}$.

Per tant, el $\overset{\frown}{CG}$ és igual al $\overset{\frown}{BK}$. [Nc 1]

Però el $\overset{\frown}{BK}$ és el doble del $\overset{\frown}{KM}$,
ja que el $\overset{\frown}{KA}$ també [ho és] del $\overset{\frown}{KM}$. [Nc 5′]

Aleshores, [l'arc] $\overset{\frown}{CG}$ també ho és. [Nc 1]

I el $\overset{\frown}{CB}$ el doble del $\overset{\frown}{BK}$, [Nc 1]
ja que els arcs $\overset{\frown}{CB}$ i $\overset{\frown}{BA}$ són iguals. [Nc 1]

I, a més, l'arc conjunt $\overset{\frown}{GB}$ també és el doble del $\overset{\frown}{BM}$.[1089]

D'això en resulta que l'angle $\widehat{GFB}$ també ho és del $\widehat{BFM}$. [EVI 33]

Però [l'angle] $\widehat{GFB}$ ho és del $\widehat{FAB}$,
ja que [els angles] $\widehat{FAB}$ i $\widehat{ABF}$ són iguals. [Nc 1]

Per tant, [els angles] $\widehat{BFN}$ i $\widehat{FAB}$ són iguals. [Nc 5′]

I l'angle $\widehat{ABF}$ és comú als triangles $\triangle ABF$ i $\triangle BFN$.

En conseqüència, [l'altre angle] $\widehat{AFB}$ és igual a [l'altre angle] $\widehat{BNF}$. [EI 32]

1087. Vegeu Pla (2018), nota 781, p. 254.

1088. Per tant, l'arc $\overset{\frown}{CD}$ és el doble del $\overset{\frown}{CG}$. [EIII 30].

1089. Sumem dues parelles d'arcs. Els arcs d'una parella valen el doble que els arcs de l'altra. Podem recórrer a EV 12.

En definitiva, els triangles $\triangle\, ABF$ i $\triangle\, BFN$ són equiangles.

Per proporcionalitat, el segment AB és al BF com el FB al BN. [Evi 4]

Per tant, el rectangle de [costats] AB i BN equival al quadrat de [costat] BF. [Evi 17]

De bell nou, atès que [el segment] AL és igual al LK, [per construcció i Eiii 3]
i que LN és comú i perpendicular [a KA],
resulta que les bases KN i AN són iguals. [Ei 4]

Aleshores, l'angle $\widehat{LKN}$ ho és al $\widehat{LAN}$.

Però l'angle $\widehat{LAN}$ ho és al $\widehat{KBN}$. [Eiii 29 i Ei 5]

Per tant, [els angles] $\widehat{LKN}$ i $\widehat{KBN}$ també són iguals. [Nc 1]

I [l'angle de vèrtex el punt] A és comú als dos triangles $\triangle\, AKB$ i $\triangle\, AKN$.

En conseqüència, [l'altre angle] $\widehat{AKB}$ és igual a [l'altre angle] $\widehat{KNA}$. [Ei 32]

I els triangles $\triangle\, KBA$ i $\triangle\, KNA$ són equiangles.

Per tant, el segment BA és al AK com el KA al AN. [Evi 4]

Aleshores, el rectangle de [costats] BA i AN equival al quadrat de [costat] AK. [Evi 17]

Però hem vist que el rectangle de [costats] AB i BN ho és al quadrat de [costat] BF.

Per tant, el rectangle de [costats] AB i BN més el de [costats] BA i AN,
que és el quadrat de [costat] BA, [Eii 2]
equival al quadrat de [costat] BF més el de costat AK. [Nc 2]

Però BA és el costat del pentàgon, BF el de l'hexàgon [Eiv 15, porisma]
i AK el del decàgon.

Per tant, el quadrat de costat el del pentàgon [inscrit en un cercle] equival a la suma dels quadrats de costats el de l'hexàgon i el del decàgon inscrits en aquest cercle.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exiii 11. *El costat d'un pentàgon regular inscrit en un cercle és un [segment] irracional anomenat* menor.

Considerem el pentàgon equilàter $\pentagon\, ABCDE$ inscrit en el cercle $\bigcirc ABCDE$ de diàmetre racional.

Afirmo que el costat del pentàgon [$\pentagon\, ABCDE$] és un [segment] irracional anomenat *menor*.[1090]

[*Demostració.*] *a*) Determinem el centre F del cercle. [EIII 1]

Unim AF i FB. [P 1]

Els prolonguem fins als punts G i H[, respectivament]. [P 2]

Unim AC. [P 1]

Ara agafem FK [igual] a la quarta part de AF.

Com que AF és racional, FK i BF també ho són. [DX 1.3]

I, per tant, el [segment suma] BK també. [DX 1.3]

Ara, atès que els arcs de circumferència $\widehat{ACG}$ i $\widehat{ADG}$ són iguals,
i les seves parts respectives $\widehat{ABC}$ i $\widehat{AED}$ també,
tenim que els residus $\widehat{CG}$ i $\widehat{GD}$ també ho són.

I, si unim AG,[1091] [P 1]
els angles [de vèrtex el punt] L són [angles] rectes,
i CD és el doble de CL. [EI 4]

Pel mateix [raonament], els [de vèrtex el punt] M també ho són,
i [el segment] AC és el doble del CM.

En conseqüència, atès que els angles $\widehat{ALC}$ i $\widehat{AMF}$ són iguals,
i que el $\widehat{LAC}$ és comú als dos triangles $\triangle\, ACL$ i $\triangle\, AMF$;
l'altre [angle] $\widehat{ACL}$ és igual a l'altre [angle] $\widehat{MFA}$. [EI 32 i NC 3]

Aleshores, els triangles $\triangle\, ACL$ i $\triangle\, AMF$ són equiangles.

D'això en resulta que LC és a CA com MF a FA. [EVI 4]

I, ara, [si prenem] els dobles de les [magnituds] antecedents,
el doble de LC és a CA com el doble de MF a FA, [EV 24]
i el doble de MF és a FA com MF a la meitat de FA. [EV 15]

Per tant, el doble de LC és a CA com MF a la meitat de FA. [EV 11]

Prenem les meitats de les [magnituds] conseqüents.

El doble de LC és a la meitat de CA com MF a la quarta [part] de FA,
DC és el doble de LC,

1090. Vegeu EX 76 (pàgina 340).

1091. En el text grec hi ha un error irrellevant, on diu «si unim AD».

CM la meitat de CA,
i FK la quarta part de FA.

Aleshores, DC és a CM com MF a FK. [Ev 7, iterat]

Componendo, la suma de DC i CM —és a dir, la suma de DM— és a CM com MK a KF. [Ev 18]

Per tant, el quadrat de [costat] la suma DC i CM és al de costat CM com el de costat MK al de costat KF.[1092]

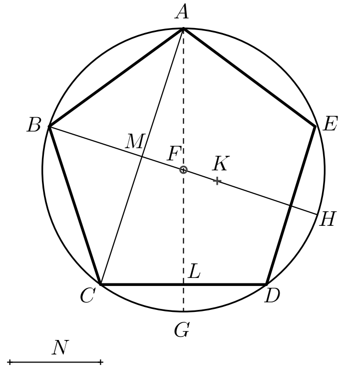


FIGURA EXIII 11

I quan es divideix en mitjana i extrema raó [el segment] que subtendeix dos costats d'un pentàgon, com ara AC, la part més gran —que és, de fet, DC— és igual al costat del pentàgon, [EXIII 8]
el quadrat [de costat] la part més gran afegida a la meitat del total és cinc vegades el quadrat de [costat] la meitat del total, [EXIII 1]
i CM és la meitat del total AC.

Aleshores, el quadrat de [costat] DC i CM, [considerat] com un sol segment, és cinc vegades el de costat CM.

Però hem vist que el de costat DC i CM, [pres] com un de sol, és al de costat CM com el de costat MK al de costat KF.

Per tant, el quadrat de [costat] MK és cinc vegades el de costat KF
i el quadrat de costat KF és racional
perquè el diàmetre ho és. [Dx 1.4]

Aleshores, el quadrat de [costat] MK també ho és. [Dx 1.4]

En conseqüència, MK és racional. [Dx 1.4]

I, atès que BF és quatre vegades FK,
BK és cinc vegades KF. [Nc 2]

Aleshores, el quadrat de [costat] BK equival a vint-i-cinc vegades el de costat KF,
i el de [costat] MK, cinc vegades.

Així doncs, el quadrat de [costat] BK equival a cinc vegades el de costat KM.

1092. Aquí Euclides aplica la «composició» de proporcions. És un porisma immediat d'EVI 20.

Però la raó entre els quadrats de [costat] BK i MK no és la que hi ha entre un nombre quadrat i un altre.

En definitiva, BK és incommensurable en longitud amb KM, [Ex 9] i cadascun és un [segment] racional.

Per tant, [els segments] BK i KM són [segments] racionals commensurables només en quadrat.

I, si d'un [segment] racional en sostraiem un de racional commensurable només en quadrat amb [el segment] total,
el residu MB és un [segment] irracional anomenat *apòtom*
i MK n'és [el segment] adjunt.[1093] [Ex 73] ♠

Afirmo també que MB és un quart [apòtom].

b) Fem un quadrat [de costat] N igual a l'excés del quadrat [de costat] BK sobre el [de costat] KM.

Aleshores, atès que KF és commensurable [en longitud] amb FB,
componendo, [Dv 14 i Ev 18]
KB també ho és amb FB. [Ex 15]

Però BF és commensurable [en longitud] amb BH
i, per tant, BK també ho és. [Ex 12]

I, com que el quadrat de [costat] BK és cinc vegades el de costat KM,
la raó entre els quadrats de costats BK i KM és 5 a 1.[1094] [Dv 5]

Aleshores, *convertendo*, [Dv 16 i Ev 17]
la raó entre els quadrats de costats BK i N és 5 a 4, [Ev 19, porisma] que no és, en absolut, la raó entre dos nombres quadrats.

Així doncs, BK és incommensurable [en longitud] amb N. [Ex 9]

Aleshores, el quadrat de costat BK excedeix el de costat KM el de costat [un segment] incommensurable [en longitud] amb BK.

En conseqüència, atès que el quadrat de costat el [segment] complet BK excedeix el de costat l'adjunt KM el de costat [un segment] incommensurable [en longitud] amb BK

1093. O «annex», com diu Euclides: ἡ προσαρμόζουσα. Vegeu Ex 79 i Vera (1970), volum i, nota 43, p. 907.

1094. Curiosament, l'original conté nombres. Sembla que Euclides vulgui posar de manifest la dicotomia magnitud/nombre —limitat/il·limitat o discret/continu. Vegeu Pla (2016*b*), p. 108.

i que el [segment] complet BK és commensurable [en longitud] amb el racional proposat inicialment BH;
MB és un quart apòtom. [Dx 3.4] ♠

c) De retruc, el rectangle format per un [segment] racional i un quart apòtom és irracional,
i la seva arrel quadrada és[1095] un [segment] irracional
que anomenem *menor.* [Ex 94] ♠

Finalment, atès que el quadrat de costat AB equival al rectangle de costats HB i BM
pel fet que, si tirem [el segment] AH, els triangles $\triangle\, ABH$ i $\triangle\, ABM$ són equivalents, [Evi 8]
tenim que HB és a BA com AB a BM. ♠

En definitiva, el costat AB del pentàgon és un [segment] irracional, que anomenem *menor.*[1096]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exiii 12. *Si inscrivim un triangle equilàter en un cercle, el quadrat que té el mateix costat que ell equival a tres vegades el de costat el radi del cercle.*[1097]

Considerem un cercle $\bigcirc ABC$.

Hi inscrivim un triangle equilàter $\triangle\, ABC$. [Eiv 2]

Afirmo que el quadrat amb el mateix costat que el triangle $\triangle\, ABC$ equival a tres vegades el quadrat de [costat] el radi del cercle $\bigcirc ABC$.

[*Demostració.*] Sigui D el centre del cercle $\bigcirc ABC$. [Eiii 1]

Unim AD. [P 1]

El prolonguem fins a[l punt] E. [P2]

1095. Diu: καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν.

1096. En un cercle de radi la unitat, el costat del pentàgon val $a_5 = \frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Aquesta expressió es pot escriure en la «forma menor» següent: $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{1+k^2}}-\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{1+k^2}}$, en la qual $\rho = \frac{\sqrt{10}}{2}$ i $k = 2$ [Ex 94].

1097. Aquí Euclides ofereix la relació que hi ha entre el costat del triangle equilàter inscrit en un cercle i el radi, en termes de quadrats, és a dir, $a_3^2 = 3\,r^2$. De fet, és una proposició que, deductivament i formalment, pertany al llibre iv, encara que, per establir-la, usi un resultat del vi. Ara bé, com que és un «element» de la proposició següent, d'acord amb el seu mètode docent, Euclides l'ofereix ara.

Unim BE. [P 1]

Ara, atès que el triangle $\triangle\, ABC$ és equilàter,[1098]
l'arc de circumferència $\widehat{BEC}$ és la tercera part de la circumferència del cercle $\circ ABC$. [EIII 27]

Per tant, l'arc de circumferència $\widehat{BE}$ n'és la sisena part. [EIII 30]

Aleshores, BE és [el costat] de l'hexàgon [regular] [EIII 29][1098]
i és igual al radi DE. [EIV 15, porisma]

A més, atès que AE és el doble de DE,
el quadrat de [costat] AE equival a quatre vegades el de costat ED,
és a dir, a [quatre vegades] el de costat BE. [EII 4]

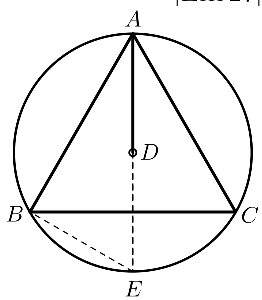


FIGURA EIII 12

Ara bé, el quadrat de [costat] AE ho és a la [suma dels quadrats de costats] AB i BE. [EIII 31 i EI 47]

Aleshores, aquesta suma equival a quatre vegades el quadrat de [costat] BE. [Nc 1]

En definitiva, *separando*, [DV 15 i EV 17]
el quadrat de [costat] AB equival tres vegades al de costat BE,
i BE és igual a DE.

Per tant, el quadrat de [costat] AB és tres vegades el de costat DE. [Nc 1]

Finalment, el quadrat de costat el costat del triangle és tres vegades el de costat el radi [del cercle].
I això és el que volíem demostrar. ♠[1099]

EIII 13. *Volem* a*) construir una piràmide*[1100] *inscrita en una esfera donada i* b*) establir que el quadrat de costat el diàmetre de l'esfera és una vegada i mitja el de costat l'aresta de la piràmide.*[1101]

1098. Vegeu PLA (2018), nota 781, p. 254.

1099. Aquesta proposició tanca aquest grup de proposicions.

1100. Cal entendre que és una piràmide regular, un tetraedre.

1101. Amb aquesta proposició, Euclides inicia el camí cap a la construcció dels cinc sòlids platònics.

[*Construcció.*] a_0)[1102] Sigui AB el diàmetre de l'esfera [figura Exiii 13, superior].

El punt C talla $[AB]$ de manera que AC és el doble de CB. [Evi 10]

Considerem el semicercle ⌓ ADB de [diàmetre] AB.

Tirem la perpendicular CD pel punt C del [segment] AB. [Ei 11]

Unim DA. [P 2] ♣

[*Construcció i demostració.*] a_1) Considerem el cercle $\bigcirc EFG$ amb el radi igual a DC [figura Exiii 13, inferior].[1103] [P 2 i 3, i Ei 2]

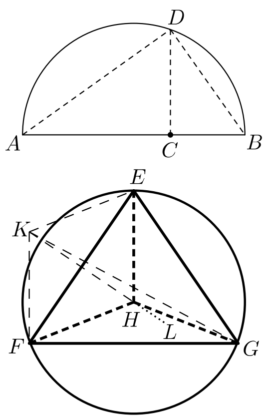


Figura Exiii 13

Sigui $\triangle EFG$ el triangle equilàter inscrit en el cercle $\bigcirc EFG$. [Eiv 2]

Considerem el centre H del cercle. [Eiii 1][1104]

Unim EH, HF i HG. [P 1]

Pel punt H, tirem la perpendicular HK al pla del cercle $\bigcirc EFG$, [Exi 12]
de longitud igual al segment AC. [Ei 2]

Unim KE, KF i KG. [P 1]

Atès que [el segment] KH és perpendicular al pla del cercle $\bigcirc EFG$,
també ho és a tots [els segments] d'aquest pla que passen pel seu peu. [Dxi 3]

KH insideix en HE, HF i HG. [P 1]

En conseqüència, HK és perpendicular a cadascun de[ls segments] HE, HF i HG.

I, atès que [els segments] AC i CD són iguals a HK i HE, respectivament,
i que [tots] formen angles rectes;
les bases DA i KE també són iguals. [Ei 4]

Pel mateix [raonament], cadascun de[ls segments] KF i KG és igual a DA. [Ei 47 i Nc 1][1105]

1102. És un lema auxiliar.

1103. El fet d'elegir aquestes mides és fruit de l'anàlisi. Aquí se'ns donen de manera sintètica. Vegeu, tanmateix, la part *b* més endavant.

1104. De fet, donat el radi, per poder tirar el cercle, cal fixar el centre. Per tant, aquest pas és superflu, està inclòs en la consideració del cercle.

1105. Per construcció, tenim tres triangles rectangles $\triangle ACD$ (figura

Per tant, els tres [segments] KE, KF i KG són iguals entre si. [Nc1]

I, com que AC és el doble de CB, AB és el triple de BC.

I, ja ho veurem més avall,[1106]
AB és a BC com el quadrat de [costat] AD al de costat DC.
[EXIII 13, lema]

Aleshores, el quadrat de [costat] AD equival a tres vegades el de costat DC.

Però el de costat FE ho és a tres vegades el de [costat] EH,
[EXIII 12]
i [els segments] DC i EH són iguals.

De tot això en resulta que DA també és igual a EF.
[Nc 1 i nota 596]

Però hem vist que DA ho és a cadascun de[ls segments] KE, KF i KG.

En definitiva, [els segments] EF, FG i GE són iguals als [segments] KE, KF i KG, respectivament. [Nc 1]

Així doncs, els quatre triangles $\triangle\, EFG, \triangle KEF, \triangle KFG$ i $\triangle\, KEG$ són equilàters. [DI 20]

Finalment, doncs, hem construït una piràmide la base de la qual és el triangle $\triangle\, EFG$, i el vèrtex el punt K. ♣ ♠

Hem de veure que [la piràmide] està inscrita en l'esfera donada i demostrar que el quadrat de costat el diàmetre de l'esfera és una vegada i mitja el de [costat] una aresta de la piràmide.

a_2) Prolonguem el segment d'extrems H i L fins a aconseguir [el segment] HL igual a CB. [P 2 i EI 2]

Aleshores, atès que AC és a CD com CD a CB, [EVI 8, porisma]
i AC, CD i CB són iguals a KH, HE i HL, respectivament,
resulta que KH és a HE com EH a HL. [EV 7, iterat]

Per tant, el rectangle de [costats] KH i HL equival al quadrat de costat EH, [EVI 17]
i els angles $\widehat{KHE}$ i $\widehat{EHL}$ són rectes.

superior), i $\triangle\, KHF$ i $\triangle\, KHG$ (figura inferior), amb els catets corresponents iguals.

1106. Vegeu el lema següent.

En conseqüència, el semicercle sobre KL passa per [el punt] E.[1107]
[Evi 8 i Eiii 31]

Per tant, si fem girar el semicercle al voltant del [segment] KL, que es manté fix fins que ha fet una volta completa i ha retornat a la posició inicial;
[el semicercle] també passa pels punts F i G
[perquè], de manera semblant, si unim FL i LG, [P 1]
els angles de vèrtexs [els punts] F i G són rectes.

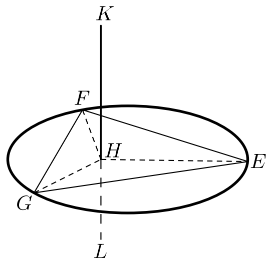
De tot això en resulta que l'esfera circumscriu la piràmide
ja que el diàmetre KL de l'esfera és igual al diàmetre AB de l'esfera donada,
en la qual hem fet [els segments] KH i HL iguals a AC i CB, respectivament. ♣

Afirmo que el quadrat de costat el diàmetre de l'esfera és una vegada i mitja el de costat una aresta de la piràmide.
b) Atès que AC és el doble de CB,
AB és el triple de BC. [Nc 2]

Convertendo, BA és una vegada i mitja AC, [Dv 5]
i BA és a AC com el quadrat de [costat] BA al de costat AD.[1108]

Per tant, el quadrat de [costat] BA també és una vegada i mitja el de costat AD, [Nc 1]
BA és el diàmetre de l'esfera donada
i AD és igual a les arestes de la piràmide.

1107. Si unim EL [P 1], l'angle $\widehat{LEK}$ és recte pel fet que el triangle $\triangle ELK$ és equiangle amb cadascun dels triangles $\triangle ELH$ i $\triangle EHK$ [Evi 8 i iii 31]. Observem que, malgrat la manca de perspectiva del dibuix inferior de la figura Exiii 13, el segment HK és perpendicular al pla del cercle ○EFG, i el segment HL que prolonga KH es troba a l'altra banda del pla esmentat, com HK (figura adjunta).



1108. Unim DB [P 1] i tenim que BA és a AD com DA a AC, atesa la semblança dels triangles $\triangle DAB$ i $\triangle DAC$ [Evi 8]. Per tant, el primer és al tercer com el quadrat de costat el primer és al quadrat de costat el segon.

En definitiva, el quadrat de costat el diàmetre de l'esfera és una vegada i mitja el de costat l'aresta de la piràmide.

I això és el que volíem demostrar.[1109] ♠

Exiii 13, lema. *AB és a BC com el quadrat de [costat] AD al de costat DC.*[1110]

[*Demostració.*] Considerem la figura anterior [figura Exiii 13, superior].

Unim DB. [P 1]

Fem el quadrat $\square EC$ de costat AC [figura Exiii 13, lema]. [Ei 46]

Ara considerem el paral·lelogram ▱ FB.

Aleshores, com que els triangles $\triangle DAB$ i $\triangle DAC$ són equiangles, [Evi 8 i Evi 4]
BA és a AD com DA a AC.

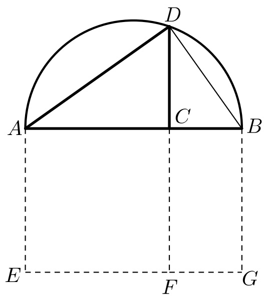


Figura Exiii 13, lema

En conseqüència, el rectangle de [costats] BA i AC equival al quadrat de costat AD. [Evi 17]

I, atès que AB és a BC com ▭ EB a ▭ BF, [Evi 1]
que ▭ EB és el rectangle de [costats] BA i AC,
ja que EA és igual a AC,
i que [el rectangle] ▭ BF és el de [costats] AC i CB,[1111]
resulta que AB és a BC com el rectangle de costats BA i AC al de costats AC i CB. [Ev 7, iterat]

A més, el rectangle de [costats] BA i AC equival al quadrat de [costat] AD, [Evi 8, porisma][1112]
i el [rectangle] de [costats] AC i CB ho és al [quadrat] de [costat] DC,
ja que la perpendicular DC és la mitjana proporcional dels dos trossos AC i CB de la base perquè l'angle $\widehat{ADB}$ és recte. [Evi 8, porisma]

1109. Si el radi de l'esfera és la unitat, l'aresta de la piràmide val $A_4 = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. Com dèiem abans, això solament ho podem saber com a resultat de l'anàlisi del tetraedre regular, acceptant que ja està construït.

1110. És un resultat que Euclides ja podria haver establert al llibre vi. Tanmateix, els estudiosos creuen que és apòcrif.

1111. Vegeu Pla (2018), problema 52, ítem f_2, p. 67.

1112. Euclides no especifica aquest resultat.

Aleshores, AB és a BC com el quadrat de [costat] AD al de [costat] DC. [Ev 7, iterat]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exiii 14. *Com en la proposició anterior, volem* a*) construir un octaedre* [*regular*] *inscrit en una esfera donada i* b*) establir que el quadrat de costat el diàmetre de l'esfera és el doble del quadrat de costat l'aresta de l'octaedre.*[1113]

[*Construcció i demostració.*] a_1) Sigui AB el diàmetre de l'esfera.

El dimidiem pel punt C. [Ei 10]

Considerem el semicercle $\frown ADB$ sobre [el segment] AB.

I, pel punt C, aixequem la perpendicular CD a AB. [Ei 11]

Unim DB. [P 1]

Fem el quadrat $\square\, EFGH$ de costats iguals a DB. [Ei 46]

Unim HF i EG. [P 1]

Pel punt K que en resulta, tirem el segment KL perpendicular al pla del quadrat $\square\, EFGH$.[1114] [Exi 12]

El prolonguem fins a l'altre costat del pla, per exemple, fins a KM.

Agafem [els segments] KL i KM iguals a un dels [segments] EK, FK, GK i HK. [Ei 2]

I unim LE, LF, LG, LH, ME, MF, MG i MH. [P 1]

Aleshores, atès que KE és igual a KH
i que l'angle $\widehat{EKH}$ és recte,
el quadrat de [costat] HE és el doble del quadrat de costat EK. [Ei 47]

Novament, atès que LK és igual a KE
i que l'angle $\widehat{LKE}$ és recte,
el quadrat de [costat] EL és el doble del quadrat de costat EK. [Ei 47]

Però hem vist que el quadrat de [costat] HE també és el doble del quadrat de costat EK.

Per tant, el quadrat de [costat] LE és igual al de costat EH. [Nc 1]

I, de retruc, els segments LE i EH són iguals.[1115]

1113. Novament, aquesta relació és fruit de l'anàlisi de l'octaedre regular inscrit en l'esfera.

1114. Vegeu un altre cop la manca de perspectiva de la figura. Si cal, refeu-la.

1115. Vegeu la nota 596 (pàgina 256).

Pel mateix [raonament, els segments] LH i HE també ho són.

En definitiva, doncs, el triangle $\triangle LEH$ és equilàter.

De manera semblant, podem veure que cadascun dels altres triangles, les bases dels quals són els costats del quadrat $\square EFGH$
i els vèrtexs els punts L i M,
són equilàters.

Per tant, hem construït l'octaedre format per vuit triangles equilàters.

♣ ♠

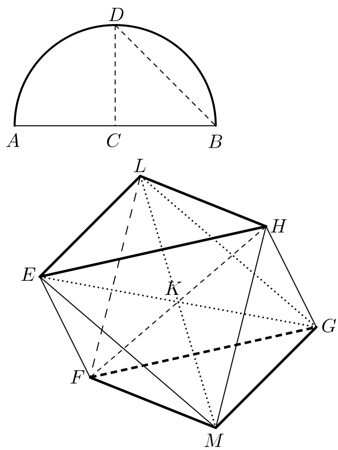


FIGURA EXIII 14

Ara hem de veure que aquest octaedre està inscrit en l'esfera donada,
i que el quadrat de costat el diàmetre de l'esfera és el doble del quadrat de [costat] l'aresta de l'octaedre.

[*Demostració.*] a_2) Atès que els segments LK, KM i KE són iguals, el semicercle sobre [el segment] LM passa per [el punt] E. [P 3 i DI 18]

I, per les mateixes [raons],
si LM es manté fix
i el semicercle gira al voltant seu fins a retornar a la posició inicial;
també passa pels punts F, G i H,
i l'octaedre està inscrit en una [certa] esfera. ♠

Afirmo que està inscrit en l'esfera donada.

a_3) i b) Atès que LK i KM són iguals, i que KE és comú
i determina amb cada un d'ells un [angle] recte,
resulta que les bases LE i EM són iguals. [EI 4]

I, com que l'angle $\widehat{LEM}$ és recte
—és un angle inscrit en un semicercle—, [EIII 31]
el quadrat de [costat] LM val el doble que el de costat LE. [EI 47]

De bell nou, atès que AC i CB són iguals,
AB equival al doble de BC. [Nc 2]

Sabem que AB és a BC com el quadrat de [costat] AB al de [costat] BD. [EVI 8 i DV 9]

Aleshores, el quadrat de [costat] AB és el doble del quadrat de costat BD. [Dv 5]

I hem vist que el quadrat de [costat] LM també equival al doble del quadrat de costat LE.

En conseqüència, els quadrats de [costats] DB i LE són iguals. [Nc 1]

Ara bé, hem agafat [el segment] EH igual al DB.

I, per construcció, el quadrat de [costat] AB també és igual al de costat LM. [Ei 47]

Aleshores, AB és igual a LM,[1116]
i AB és el diàmetre de l'esfera donada.

Per tant, LM és igual al diàmetre de l'esfera donada. [Nc 1]

En definitiva, hem inscrit l'octaedre en aquesta esfera ♠
i, alhora, hem establert que el quadrat de costat el diàmetre de l'esfera és el doble del quadrat de costat l'aresta de l'octaedre. ♠
I això és el que volíem demostrar.[1117] ♠

Exiii 15. *Com en el cas de la piràmide, volem* a*) construir un cub inscrit en una esfera i* b*) establir que el quadrat de costat el diàmetre de l'esfera és tres vegades el quadrat de costat l'aresta del cub.*

[*Construcció i demostració.*] a_1) Siguin AB el diàmetre de l'esfera
i C el punt que divideix [AB] en els segments AC i CB
essent AC el doble de CB. [Evi 10]

Considerem el semicercle $\frown ADB$ sobre [el segment] AB. [P 3]

Pel punt C, aixequem una perpendicular CD a AB. [E1 11]

Unim DB. [P 1]

Considerem el quadrat $\square\, EFGH$ de costat igual a DB.

Pels punts E, F, G i H tirem els [segments] EK, FL, GM i HN perpendiculars al pla del quadrat $\square\, EFGH$, [Ei 11]
tots iguals a un dels [segments] EF, FG, GH i HE. [Ei 2]

Unim KL, LM, MN i NK. [P 1]

1116. Pla (2016*b*), problema 52, ítem f_1, p. 67.

1117. Si el radi de l'esfera és la unitat, l'aresta de l'octaedre regular val $A_8 = \sqrt{2}$.

D'aquesta manera, construïm un cub format per sis quadrats iguals.[1118] ♣ ♠

Ara és necessari establir que [el cub] està inscrit en l'esfera donada i que el quadrat de costat el diàmetre de l'esfera és tres vegades el quadrat de costat l'aresta del cub.

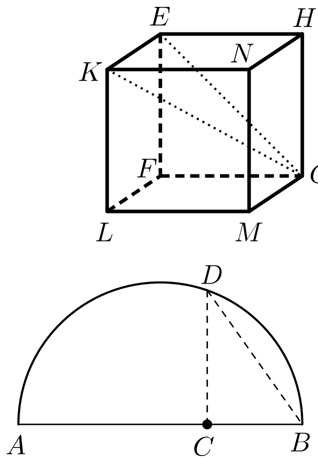


FIGURA EXIII 15

a_2) Unim KG i EG. [P 1]

Atès que l'angle $\widehat{KEG}$ és recte, ja que KE és perpendicular al pla ▱EG i, en conseqüència, al segment EG; [DXI 3]

el semicercle sobre KG també passa pel punt E.

[EIV 5, segon cas, i EIII 31]

De bell nou, atès que GF és perpendicular a cadascun dels [segments] FL i FE,

GF també és perpendicular al pla ▱FK. [EXI 4]

Aleshores, si unim FK, [P 1]

[el segment] GF també és perpendicular a FK. [DXI 3]

I, novament, tenint en compte això,

el semicercle sobre GK passa pel punt F. [EIV 5, segon cas i EIII 31]

De manera semblant, veiem que això també passa amb els altres vèrtexs del cub.

En conseqüència, si KG es manté fix

i el semicercle gira al voltant seu fins a tornar a la posició inicial,

el cub queda inscrit en una esfera. ♠

Afirmo que el cub està inscrit en l'esfera donada.

[*Construcció* i *demostració*.] a_3) i b) Atès que GF i FE són iguals,

i que l'angle [de vèrtex] F és recte;

el quadrat de [costat] EG equival al doble del quadrat de costat EF, [EI 47]

i [els segments] EF i EK són iguals.

1118. Aquí Euclides usa EXI 6 i EI 14 en cada pla.

Aleshores, el quadrat de [costat] EG equival al doble del quadrat de [costat] EK. [Nc 1][1119]

En conseqüència, la [suma dels quadrats] de costats GE i EK, és a dir, el quadrat de [costat] GK, [Ei 47]
equival a tres vegades el de costat EK.

I, atès que AB és tres vegades BC,
i que AB és a BC com el quadrat de [costat] AB al de costat BD, [Evi 8 i Dv 9]
resulta que el quadrat de [costat] AB equival a tres vegades el de costat BD. [Dv 5]

Però hem vist que el de costat GK també ho és al de costat KE, i KE és igual a DB.

Per tant, KG també és igual a AB,
i AB és el diàmetre de l'esfera donada.

Així doncs, KG també és igual al diàmetre de l'esfera donada.

Per tant, el cub [construït] està inscrit en aquesta esfera ♠
i hem establert que el quadrat de costat el diàmetre de l'esfera és tres vegades el de costat l'aresta del cub.[1120]

I això és el que volíem demostrar. ♠

Exiii 16. *Igual que en el cas dels sòlids precedents, volem* a*) construir un icosaedre inscrit en una esfera i* b*) establir que el seu costat és un* [*segment*] *irracional anomenat* menor*.*[1121]

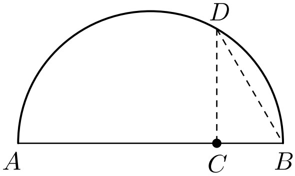


Figura Exiii 16*a*

[*Construcció i demostració.*] a_0)[1122] Sigui AB el diàmetre de l'esfera donada.

Fem el punt C que el divideix en [els segments] AC i CB, de manera que AC és quatre vegades CB. [Evi 10]

Considerem el semicercle ⌓ADB sobre AB. [P 3]

1119. En el supòsit que els quadrats de costats iguals són iguals. Vegeu la nota 596 (pàgina 256).

1120. Si el radi de l'esfera és la unitat, l'aresta del cub val $A_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

1121. Com en els altres casos, l'afirmació b és fruit de l'anàlisi.

1122. És un lema auxiliar.

Pel punt C, tirem un [segment] CD perpendicular al AB. [EI 11]

Unim DB. [P 1]

[*Construcció i demostració.*] a_1) Ara tirem el cercle $\circ EFGHK$ de radi BE igual a DB. [EI 10 i P 3]

Fem el pentàgon regular[1123] $\pentagon\, EFGHK$
inscrit en el cercle $\circ EFGHK$. [EIV 11]

Dimidiem els arcs de circumferència $\widehat{EF}, \widehat{FG}, \widehat{GH}, \widehat{HK}$ i $\widehat{KE}$
pels punts L, M, N, O i P[, respectivament]. [EIII 30]

Unim LM, MN, NO, OP, PL i EP. [P 1]

D'això en resulta que el pentàgon regular $\pentagon\, LMNOP$ també és equilàter
i EP és el costat del decàgon regular [inscrit en el cercle]. [EIII 28 i 29]

Pels punts E, F, G, H i K, tirem els segments EQ, FR, GS, HT i KU,
iguals al radi del cercle $\circ EFGHK$ i perpendiculars al seu pla.[1124] [EI 11]

Unim QR, RS, ST, TU, UQ, QL, LR, RM, MS, SN, NT, TO, OU, UP i PQ.
[P 1] ♣

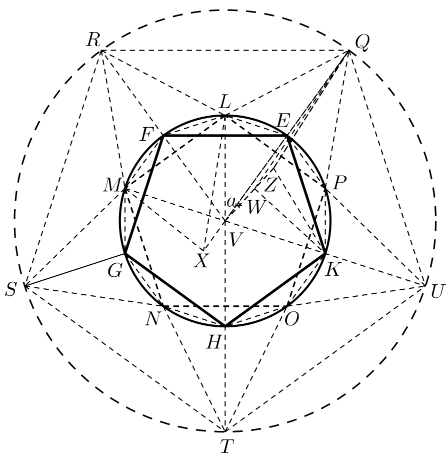


FIGURA EXIII 16b

a_2) Com que EQ i KU són perpendiculars al mateix pla,
són paral·lels. [EXI 6]

Però segments iguals que uneixen els [extrems de segments] iguals i paral·lels d'un mateix costat són iguals i paral·lels [entre si]. [EI 33]

Aleshores, [el segment] QU és igual i paral·lel al EK,
i EK [és el costat] d'un pentàgon equilàter [inscrit en el cercle $\circ EFGHK$].

Per tant, QU també és el costat d'aquest pentàgon. [DIII 11]

1123. Vegeu la nota 68 (pàgina 21).
1124. Novament, la figura no té perspectiva.

Pel mateix [raonament], [els segments] QR, RS, ST i TU també ho són.

Per tant, el pentàgon $\pentagon\, QRSTU$ és equilàter,
el costat QE és [el costat] d'un hexàgon regular [inscrit en el cercle $\circ EFGHK$],
EP és [el costat] d'un decàgon regular i [l'angle] $\widehat{QEP}$ és recte.

En conseqüència, QP és [el costat] d'un pentàgon [inscrit en aquest cercle]
perquè el quadrat de costat l'aresta d'un pentàgon és [igual a la suma dels quadrats] de [costats] els d'un hexàgon i d'un decàgon regulars inscrits en el mateix cercle. [EXIII 10]

Pel mateix [raonament], PU i QU també són costats del pentàgon.

Per tant, el triangle $\triangle\, QPU$ és equilàter.

I, pel mateix [raonament], [els triangles] $\triangle\, QLR, \triangle RMS, \triangle SNT$ i $\triangle\, TOU$ també.

I, atès que QL i QP són els [costats] d'un pentàgon [regular],
i LP també,
tenim que el triangle $\triangle\, QLP$ és equilàter.

Pel mateix [raonament], els triangles $\triangle\, LRM, \triangle MSN, \triangle NTO$ i $\triangle\, OUP$ també ho són.

Ara determinem el centre V del cercle $\circ EFGHK$. [EIII 1]

Pel punt V tirem el segment VZ perpendicular al pla del cercle. [EI 11]

El prolonguem a l'altre costat [del pla del cercle] i obtenim VX. [P 2]

[Al segment XZ] fem VW [igual al costat] d'un hexàgon [regular], [EI 2]
i els [segments] VX i WZ [iguals als] d'un decàgon [regular]. [EI 2]

Unim QZ, QW, UZ, EV, LV, LX i XM. [P 1]

Aleshores, atès que [els segments] VW i QE són perpendiculars al pla del cercle;
VW i QE, que són iguals, també són paral·lels. [EXI 6]

Per tant, [els segments] EV i QW són iguals i paral·lels [entre si], [EI 33]
i EV [és el costat] d'un hexàgon [regular].

En conseqüència, [el segment] QW també [l'és].

I, atès que QW és [el costat] d'un hexàgon [regular],
que WZ ho és d'un decàgon [regular]
i que l'angle $\widehat{QWZ}$ és recte, [Dxi 3 i Ei 29]
tenim que [el segment] QZ és [el costat] d'un pentàgon [regular]. [Exiii 10]

Pel mateix [raonament], UZ també ho és
perquè, si unim VK i WU, [tots dos segments] són iguals i oposats.

A més, tenim que VK és el radi [del cercle],
i també [el costat] d'un hexàgon [regular]. [Eiv 15, porisma]

Aleshores, [el segment] WU també ho és,
[el] WZ ho és d'un decàgon [regular]
i [l'angle] $\widehat{UWZ}$ és recte.

Així doncs, [els segments] UZ i i QU són [els costats] d'un pentàgon regular. [Exiii 10]

Per tant, el triangle $\triangle QUZ$ és equilàter.

Pel mateix [raonament], cadascun dels altres triangles,
de bases els segments QR, RS, ST i TU i vèrtex el punt Z,
també ho són.

De bell nou, atès que VL [és el costat] d'un hexàgon [regular],
que VX ho és d'un decàgon
i que l'angle $\widehat{LVX}$ és recte;
[el segment] LX és [el costat] d'un pentàgon [regular]. [Exiii 10]

Pel mateix [raonament],
si unim MV, que és [el costat] d'un hexàgon,
inferim que MX i LM [són costats] d'un pentàgon [regular].

Per tant, el triangle $\triangle LMX$ és equilàter.

De manera semblant podem establir que cadascun dels altres triangles,
de bases [respectives] els [segments] MN, NO, OP i PL,
i vèrtex el punt X, també ho són.

En definitiva, hem construït un icosaedre format per vint triangles equilàters. ♣ ♠

Ara hem de veure si està inscrit en l'esfera donada, i que el costat de l'icosaedre és un [segment] irracional anomenat *menor*.

a_2) Atès que VW és [el costat] d'un hexàgon [regular]
i WZ d'un decàgon [regular],
resulta que [el punt] W divideix VZ en mitjana i extrema raó,
i VW n'és la part més gran. [EXIII 9]

Aleshores, ZV és a VW com VW a WZ, [EXIII 4]
i VW i WZ són iguals a VE i VX[, respectivament].

Per tant, ZV és a VE com EV a VX, [EV 7, iterat]
i els angles $\widehat{ZVE}$ i $\widehat{EVX}$ són rectes.

Aleshores, si unim EZ, [P 1]
l'angle $\widehat{XEZ}$ és recte
atesa la semblança dels triangles $\triangle XEZ$ i $\triangle VEZ$. [EVI 8]

Pel mateix [raonament],
com que ZV és a VW com VW a WZ,
i com que ZV i VW són iguals a XW i WQ[, respectivament],
resulta que XW és a WQ com QW a WZ. [EV 7, iterat]

I, tenint en compte aquest fet,
si unim QX, [P 1]
novament l'angle de vèrtex [el punt] Q és recte. [EVI 8]

Aleshores, el semicercle sobre XZ passa [pel punt] Q. [EIII 31]

Ara, si XZ es manté fix i fem girar el semicercle al voltant seu fins que retorna a la posició inicial,
passa per [el punt] Q i pels altres [vèrtexs] de l'icosaedre.

En definitiva, l'icosaedre està inscrit en una esfera. ♠

Afirmo que [està inscrit] en l'[esfera] donada.

a_3) Dimidiem [el segment] VW pel punt a. [EI 10]

Atès que el punt W divideix el segment VZ en mitjana i extrema raó,
i que [el segment] ZW n'és la part petita,
resulta que el quadrat de costat [el segment] ZW més la meitat de la part més gran Wa és cinc vegades el de costat la meitat de la part més gran. [EXIII 3]

Aleshores, el quadrat de [costat] Za és cinc vegades el de costat aW, ZX és el doble de Za i VW el doble de aW.

En conseqüència, el quadrat de [costat] ZX és cinc vegades el de costat WV. [Nc 1 i nota 583]

I, atès que AC és quatre vegades CB,
AB és cinc vegades BC
i AB és a BC com el quadrat de [costat] AB al de costat BD. [EVI 8 i DV 9]

Per tant, el de costat AB és cinc vegades el de costat BD. [DV 5]

Però hem vist que el de costat ZX també és cinc vegades el de costat VW.

D'això en resulta que DB és igual a VW, ja que cada un és igual al radi del cercle ○$EFGHK$. [DI 15]

Aleshores, AB també és igual a XZ,
i AB és el diàmetre de l'esfera donada.

Per tant, XZ és igual a aquest diàmetre. [Nc 1 i 2]

En definitiva, l'icosaedre està inscrit en l'esfera donada. ♠

Afirmo que el costat de l'icosaedre és un [segment] irracional anomenat *menor*.

b) Atès que el diàmetre de l'esfera és racional
i que el seu quadrat equival a cinc vegades el de costat el radi del cercle ○$EFGHK$,
resulta que el radi del cercle ○$EFGHK$ també és un [segment] racional.[1125]

Per tant, el seu diàmetre també ho és.

I, si un pentàgon equilàter està inscrit en un cercle que té un diàmetre racional,
el costat del pentàgon [regular] és un [segment] irracional anomenat *menor*, [EXIII 11]
i el costat del pentàgon [regular] ⬠ $EFGHK$ és el de l'icosaedre [regular].

En definitiva, el costat de l'icosaedre [regular] és un [segment] irracional anomenat *menor*. ♣

[I això és el que volíem demostrar.] ♠

1125. Recordeu la definició de *racional*, DX 1.3.

Exiii 16, porisma. *El quadrat de costat el diàmetre de l'esfera és cinc vegades el quadrat de costat el radi del cercle en el qual està inscrit l'icosaedre regular. I el diàmetre de l'esfera és la suma* [*del costat*] *de l'hexàgon* [*regular*] *i de dos* [*costats*] *del decàgon* [*regular*] *inscrits en el mateix cercle.*[1126]

Exiii 17. *Com en el cas dels sòlids anteriors, volem* a*) inscriure un dodecaedre* [*regular*] *en una esfera donada i* b*) establir que el costat del dodecaedre* [*regular*] *és un* [*segment*] *irracional anomenat* apòtom.

[*Construcció i demostració.*] Siguin ▱$ABCD$ i ▱$CBEF$ dos plans del cub [abans esmentat] [Exiii 15]
perpendiculars entre si. [Exi 18]

Dimidiem els costats AB, BC, CD, DA, EF, EB i FC pels punts G, H, K, L, M, N i O[, respectivament]. [Ei 10]

Unim GK, HL, MH i NO. [P 1]

Siguin R, S i T els punts que divideixen els [segments] NP, PO i HQ en mitjana i extrema raó,
i RP, PS i TQ les parts més grans [respectives]. [Eii 11]

Ara, pels punts R, S i T, tirem els [segments] perpendiculars RU, SV i TW cap enfora del cub. [Exi 11]

I els agafem iguals a RP, PS i TQ[, respectivament]. [Ei 2]

Unim UB, BW, WC, CV i VU. [P 1]

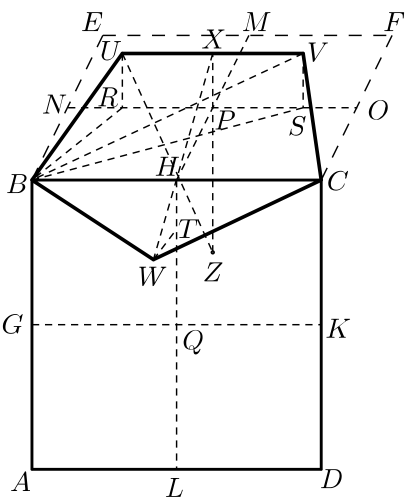


Figura Exiii 17

1126. Si el radi de l'esfera és la unitat, el radi del cercle és $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ i els costats de l'hexàgon, del decàgon i del pentàgon inscrits en ella són: $a_6 := \frac{2}{5}\sqrt{5}$, $a_{10} := \frac{\sqrt{5}-1}{5}$ i $a_5 := \frac{1}{5}\sqrt{50-10\sqrt{5}}$. I, naturalment, a_5 coincideix amb l'aresta A_{20} de l'icosaedre inscrit en l'esfera unitària.

a) Afirmo que el pentàgon $\pentagon\, UBWCV$ és equilàter i equiangle,[1127]
i que es troba en un pla.

a_1) Unim RB, SB i VB. [P 1]

Atès que el punt R divideix el segment NP en mitjana i extrema raó,
i que RP n'és la part més gran,
tenim que la [suma dels quadrats] de costats PN i NR equival a tres vegades el quadrat de [costat] RP. [EXIII 4]

I PN i PR són iguals a NB i RU.

Aleshores, la [suma dels quadrats] de costats BN i NR ho és a tres vegades el quadrat de [costat] RU, [Nc 1][1128]
i el quadrat de [costat] BR equival a la [suma dels quadrats] de costats BN i NR. [EI 47]

Per tant, el quadrat de [costat] BR ho és a tres vegades el de costat RU. [Nc 1]

En conseqüència, la [suma dels quadrats] de costats BR i RU ho és a quatre vegades el quadrat de [costat] RU, [Nc 2]
i el quadrat de [costat] BU ho és a la [suma dels quadrats] de costats BR i RU. [EI 47]

Aleshores, el quadrat de [costat] BU equival a quatre vegades el de [costat] UR. [Nc 1]

I, a més, BU és el doble de RU, i VU el doble de UR,
ja que SR també és el doble de PR, és a dir, de RU.

Per tant, BU és igual a UV. [Nc 1]

De manera semblant,
podem veure que cadascun dels [segments] BW, WC i CV és igual a cadascun dels [segments] BU i UV.

En conseqüència, el pentàgon $\pentagon\, BUVCW$ és equilàter. ♣ ♠

Afirmo que es troba en un pla.

a_2) Pel punt P, tirem [el segment] PX paral·lel a RU i SV, [EI 31]
i exterior al costat del cub.

Unim XH i HW. [P 1]

1127. És a dir, regular. Vegeu la nota 68 (pàgina 21).
1128. Vegeu la nota 897 (pàgina 465).

Afirmo que XHW és un segment.[1129]

[*Construcció i demostració.*] $a_{2.1}$) Atès que el punt T divideix [el segment] HQ en mitjana i extrema raó,
i que QT n'és la part més gran;
HQ és a QT com QT a TH. [Dvi 2]

Però HQ i QT són iguals a HP, i a TW i PX, respectivament.

Per tant, HP és a PX com WT a TH. [Evi 16 i Ev 7, iterat]

A més, [el segment] HP és paral·lel al TW,
ja que són perpendiculars al pla ▱BD. [Exi 6]

I [el segment] TH [ho és] al PX,
ja que són perpendiculars al pla ▱BF. [Exi 6]

I, si col·loquem dos triangles, com ara $\triangle XPH$ i $\triangle HTW$,
que tenen dos costats proporcionals,
de manera que comparteixen un vèrtex
i tenen dos costats corresponents paral·lels,
aleshores l'altre costat d'un està alineat amb l'altre costat de l'altre.
[Evi 32] ♣ ♠

Per tant, XH i HW estan alineats.

$a_{2.2}$) I, com que un segment sempre es troba en un pla, [Exi 1]
el pentàgon ⬠$UBWCV$ també s'hi troba. ♣ ♠

Afirmo que aquest pentàgon també és equiangle.

a_3) Atès que el punt R talla el segment NP en mitjana i extrema raó,
i que PR n'és la part més gran;
[la suma de NP i PR és a PN com PN a PR], [Dvi 2]
i PR és igual a PS.

[Així doncs, SN és a NP com NP a PS.] [Nc 1 i Ev 7, iterat]

Però el punt P talla el [segment] NS en mitjana i extrema raó,
i NP n'és la part més gran. [Exiii 5]

Per tant, la suma dels quadrats de costats NS i SP és tres vegades el quadrat de [costat] NP, [Exiii 4]
i NP és igual a NB, i PS a SV.

Aleshores, la [suma] dels [quadrats] de costats NS i SV és tres vegades el quadrat de [costat] NB. [Nc 1]

1129. Dit d'una altra manera, els tres punts X, H i W estan alineats.

Per tant, la [suma dels quadrats] de costats VS, SN i NB és quatre vegades el quadrat de [costat] NB, [Nc 2]
i el quadrat de [costat] SB és igual a la [suma dels quadrats] de costats SN i NB. [Ei 47]

Aleshores, la [suma dels quadrats] de costats BS i SV
—és a dir, el quadrat de [costat] BV [ja que l'angle $\widehat{VSB}$ és recte]— és quatre vegades el quadrat de [costat] NB. [Dxi 3 i Ei 47]

Aleshores, VB i BC són el doble de BN. [Eii 7][1130]

Per tant, BV i BC són iguals. [Nc 1]

I, atès que els dos [segments] BU i UV són iguals als dos [segments] BW i WC[, respectivament],
i que la base BV és igual a la BC;
l'angle $\widehat{BUV}$ és igual al $\widehat{BWC}$. [Ei 8]

De manera semblant, podem veure que els angles $\widehat{UVC}$ i $\widehat{BWC}$ també ho són.

Aleshores, els tres angles $\widehat{BWC}, \widehat{BUV}$ i $\widehat{UVC}$ també.

I, si tres angles d'un pentàgon equilàter són iguals,
el pentàgon és equiangle. [Exiii 7] ♠ ♠

En definitiva, el pentàgon $\pentagon BUVCW$ és equiangle i també equilàter, [i es troba en un pla,] ♣ ♠
en concret, està construït sobre una de les arestes del cub, BC.

Aleshores, si fem la mateixa construcció en cadascuna de les dotze arestes,
obtenim un sòlid format per dotze pentàgons equilàters i equiangles.

És a dir, hem construït un dodecaedre [regular]. ♣

Ara hem de veure que està inscrit en l'esfera donada
i que la seva aresta és un [segment] irracional anomenat *apòtom*.

b_1) Unim XP. [P 1]

El prolonguem fins a XZ. [P 2]

Aleshores, PZ talla el diàmetre del cub,
i l'un a l'altre es dimidien com hem establert en el penúltim teorema del llibre XI. [Exi 38]

Sigui Z el punt pel qual es tallen.

1130. N'és un porisma immediat.

Z és el centre de l'esfera que circumscriu el cub
i ZP, la meitat del seu costat. [Exi 38][1131]

Unim UZ. [P 1]

Ara, atès que el punt P divideix el segment NS en mitjana i extrema raó,
i que N n'és la part més gran,
resulta que la [suma dels quadrats] de costats NS i SP equival a tres vegades el quadrat de [costat] NP, [Exiii 4]
i NS és igual a XZ perquè NP és igual a PZ, i XP a PS.

Però, a més, PS [és igual] a XU, ja que ho és a RP. [Nc 1]

Aleshores, la [suma dels quadrats] de costats ZX i XU equival a tres vegades el quadrat de [costat] NP, [Nc 1][1132]
i el quadrat de [costat] UZ equival a la [suma dels quadrats] de costats ZX i XU. [Ei 47]

A més, el quadrat de [costat] UZ ho és a tres vegades el de costat NP [Nc 1]
i el quadrat de costat el radi de l'esfera que circumscriu el cub equival al de costat la meitat de l'aresta del cub.

Però hem vist que podem construir un cub inscrit en una esfera [donada]
i que el quadrat de costat el diàmetre de l'esfera equival a tres vegades el de costat l'aresta del cub. [Exiii 15]

I, si el [quadrat] d'un tot [és tres vegades] el d'un tot,
el de la meitat també [ho és] el de la meitat, [Ev 15]
i NP és la meitat de l'aresta del cub.

Així doncs, UZ és igual al radi de l'esfera que circumscriu el cub
i Z n'és el centre.

Per tant, el punt U és a la superfície de l'esfera. [Dxi 16]

De manera semblant, podem veure que els [vèrtexs dels altres] angles del dodecaedre també hi són.

En definitiva, hem inscrit el dodecaedre en l'esfera donada. ♠

Afirmo que l'aresta del dodecaedre és un segment irracional anomenat *apòtom*.

1131. N'és una conseqüència immediata.
1132. Vegeu la nota 897 (pàgina 465).

b_2) Atès que RP és la part més gran de[l segment] NP,
que està dividit en mitjana i extrema raó,
i que PS és la part més gran de PO,
que està dividit en mitjana i extrema raó,
tenim que RS és la part més gran del total NO, que està dividit en mitjana i extrema raó.[1133]

[Aleshores, atès que NP és a PR com PR a RN;
això també és cert per als dobles
perquè les parts tenen la mateixa raó que els seus equimúltiples en l'ordre corresponent. [Ev 15]]

I NO és a RS com RS a la suma de NR i SO.

I NO és més gran que RS.

A més, RS també és més gran que la suma de NR i SO. [Ev 14]
I NO està dividit en mitjana i extrema raó,
i RS n'és la part més gran.[1134]

Però RS és igual a UV.

Per tant, UV és la part més gran de NO,
que està dividit en mitjana i extrema raó. [per substitució]

I, atès que el diàmetre de l'esfera és racional
i que el [seu] quadrat és tres vegades el de costat l'aresta del cub,
resulta que NO, que és l'aresta del cub, és racional. [Dx 1.3 i 1.4]

I, si un [segment] racional es divideix en mitjana i extrema raó,
cadascuna de les parts és [un segment] irracional anomenat *apòtom.*

♠

En definitiva, UV, que és l'aresta del dodecaedre,
és [un segment] irracional anomenat *apòtom.* [Exiii 6]
[I això és el que volíem demostrar.][1135] ♠

1133. Vegeu el problema 48 (pàgina 80).

1134. Formalment: $\frac{NP}{RP} = \frac{RP}{RN}$. Doblem, $\frac{2\,NP}{2\,RP} = \frac{NO}{RS} = \frac{RS}{RN+SO}$. Per tant, NO està dividit en mitjana i extrema raó, i la seva part gran és RS.

1135. En definitiva, les proposicions Exiii 13, 14, 15, 16 i 17 proporcionen una manera de construir el tetraedre, l'octaedre, l'hexaedre o cub, l'icosaedre i el dodecaedre regulars. I, com ja hem dit abans, si r és el radi de l'esfera circumscrita, aleshores $a_4 = \frac{2\,r}{3}\sqrt{6}$, $a_8 = r\sqrt{2}$, $a_6 = \frac{2\,r}{3}\sqrt{3}$, $a_{20} = \frac{r}{5}\sqrt{10\,(5-\sqrt{5})}$ i $a_{12} = \frac{r}{3}\,(\sqrt{15}-\sqrt{3})$, en què el subíndex indica el nombre de cares de cadascun dels sòlids.

[EXIII 17, porisma.] *L'aresta del dodecaedre és la part més gran de l'aresta del cub dividida en mitjana i extrema raó.*

I això és el que volíem demostrar. ♠

EXIII 18. *Volem establir [geomètricament] les arestes dels cinc sòlids*[1136] *i comparar-les.*[1137]

[*Construcció i demostració.*][1138]

a) Sigui AB el diàmetre de l'esfera donada.

a_1) Considerem el punt C que dimidia AB en les meitats AC i CB, [EI 10]
i el punt D que divideix $[AB]$ de manera que AD és el doble de DB. [EVI 10]

Considerem el semicercle $\frown AEB$ de diàmetre AB. [P 3]

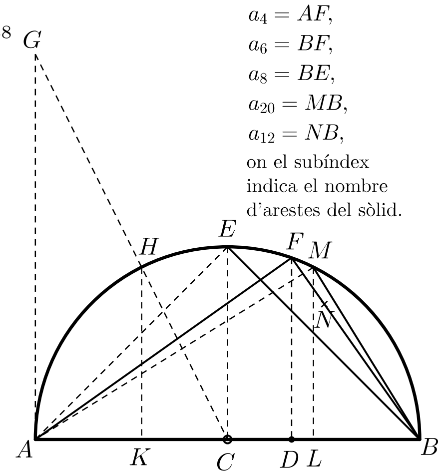


FIGURA EXIII 18

Pels punts C i D,
tirem CE i DF perpendiculars a AB. [EI 11]

Unim AF, FB i EB. [P 1]

Ara, atès que AD és el doble de DB,
AB n'és el triple. [Nc 2]

I, *convertendo*, BA és una vegada i mitja AD, [DV 12 i EV 16]
i BA és a AD com el quadrat de [costat] BA al quadrat de [costat] AF, [DV 9]
ja que els triangles $\triangle AFB$ i $\triangle AFD$ són equiangles. [EVI 8]

Aleshores, el [quadrat] de costat BA equival a una vegada i mitja el de costat AF, [EV 11]
i el quadrat de costat el diàmetre de l'esfera també ho és a una vegada i mitja el de costat l'aresta de la piràmide. [EXIII 13]

1136. Tots inscrits en una mateixa esfera.

1137. És, de fet, una conseqüència immediata dels resultats de les quatre proposicions precedents.

1138. Tots els polígons i poliedres que intervenen en la construcció i en la demostració són regulars.

Però AB és el diàmetre de l'esfera.

Per tant, AF és igual a l'aresta de la piràmide. [Ev 9] ♣ ♠

a_2) De bell nou, atès que AD és el doble de DB,
AB n'és el triple, [Nc 2]
i AB és a BD com el quadrat de [costat] AB al de [costat] BF. [Evi 8 i Dv 9]

Aleshores, el quadrat de [costat] AB equival a tres vegades el de costat BF, [Ev 11]
i el de costat el diàmetre de l'esfera també ho és al de costat l'aresta del cub. [Exiii 15]

Però AB és el diàmetre de l'esfera.

Per tant, BF és l'aresta del cub. ♣ ♠

a_3) I, atès que AC i CB són iguals,
AB és el doble de BC, [Nc 2]
i AB és a BC com el quadrat de [costat] AB al de costat BE. [Evi 8 i Dv 9]

Aleshores, el de costat AB equival al doble del quadrat de costat BE, [Ei 47]
i el de costat el diàmetre de l'esfera també ho és al doble del quadrat de costat l'aresta de l'octògon. [Exiii 14]

Però AB és el diàmetre de l'esfera donada.

En definitiva, BE és l'aresta de l'octògon. ♣ ♠

a_4) Pel punt A, tirem la perpendicular AG al segment AB [Ei 11]
i agafem [el segment] AG igual al AB. [P 3 i Ei 2]

Unim GC. [P 1]

Pel punt H, tirem la perpendicular HK al segment AB. [Ei 12]

I, atès que GA és el doble de AC, ja que GA és igual a AB, [Nc 1]
i GA és a AC com HK a KC, [Evi 4]
resulta que HK també és el doble de KC. [Dv 5]

Aleshores, el quadrat de [costat] HK equival a quatre vegades el de costat KC. [Eii 4]

Per tant, la [suma dels quadrats] de costats HK i KC,
que és el quadrat de [costat] HC, [Ei 47]
equival a cinc vegades el de costat KC. [Nc 2]

Però HC és igual a CB.

Per tant, el quadrat de [costat] BC equival a cinc vegades el de costat CK. [Nc 1]

I, atès que AB és el doble de CB,
i AD de DB;
el residu BD ho és del residu DC. [Nc 3 i 2]

Per tant, BC és el triple de CD. [Nc 2]

I, de retruc, el quadrat de [costat] BC equival a nou vegades el de costat CD, [Evi 23]
i el quadrat de [costat] BC a cinc vegades el de costat CK.

Per tant, el quadrat de [costat] CK és més gran que el de costat CD. [Nc 1 i 4′]

I [el segment] CK ho és més que el CD.[1139]

Ara fem CL igual a CK. [P 3 i Ei 2]

Pel punt L, tirem la perpendicular LM a AB. [Ei 11]

I unim MB. [P 1]

Atès que el quadrat de [costat] BC equival a cinc vegades el de costat CK,
i que AB és el doble de BC
i KL el de CK,
resulta que el quadrat de [costat] AB equival a cinc vegades el de costat KL
i el quadrat de costat el diàmetre de l'esfera també ho és al de costat el radi del cercle a partir del qual s'ha descrit l'icosaedre. [Exiii 16, porisma]

Però AB és el diàmetre de l'esfera.

Aleshores, KL és el radi del cercle a partir del qual s'ha descrit l'icosaedre.

Per tant, KL és [el costat] de l'hexàgon [inscrit] en l'esmentat cercle. [Eiv 15, porisma]

I, atès que el diàmetre de l'esfera es compon [del costat] de l'hexàgon i dos [costats] del decàgon inscrits en l'esmentat cercle,
que AB és el diàmetre de l'esfera,

1139. Euclides usa el fet següent: «Si un quadrat és més gran que un altre, el seu costat també ho és que el costat de l'altre.» És un porisma immediat del que prescriu la nota 596 (pàgina 256).

que KL és el costat de l'hexàgon
i que AK és igual a LB,
resulta que AK i LB són costats del decàgon inscrit en el cercle que hem emprat per descriure l'icosaedre.

I, a més, com que LB és [el costat] del decàgon,
ML el de l'hexàgon, ja que és igual a KL i a HK
perquè són a la mateixa distància del centre [del cercle], [Eiii 14]
i HK i KL són tots dos el doble de KC;
MB és [el costat] del pentàgon [inscrit en el cercle], [Exiii 10 i Ei 47]
i [el costat] del pentàgon és [el costat] de l'icosaedre. [Exiii 16]

En definitiva, [el segment] MB és [el costat] de l'icosaedre.

♣ ♠

a_5) I, per a acabar, atès que FB és l'aresta del cub,
considerem el punt N que la divideix en la mitjana i extrema raó sent NB la part més gran.

Aleshores, NB és l'aresta del dodecaedre. [Exiii 17, porisma]

♣ ♠

[*Demostració.*] *b*) I, atès que, tal com hem vist, el quadrat de [costat] el diàmetre de l'esfera equival a una vegada i mitja el quadrat de costat l'aresta AF de la piràmide,
a dues vegades el quadrat de costat [l'aresta] BE de l'octògon,
i a tres vegades el quadrat de costat [l'aresta] FB del cub,
resulta que,
si el quadrat de [costat] el diàmetre de l'esfera consta de sis [d'aquestes parts],
[el quadrat] de [costat] [l'aresta] de la piràmide en consta de quatre,
[el] de [costat l'aresta] de l'octògon, de tres,
i [el quadrat] de costat [l'aresta] del cub, de dos.[1140]

De tot això en resulta que el quadrat de [costat] l'aresta de la piràmide equival a una vegada i un terç el quadrat de costat l'aresta de l'octaedre,
i al doble del quadrat de costat l'aresta del cub.

I el quadrat de costat l'aresta de l'octaedre equival a una vegada i mitja el quadrat de costat l'aresta del cub. [Nc 1, 2 i 3]

1140. Vegeu la nota 1135 (pàgina 584).

En conseqüència, les arestes dels tres sòlids esmentats
—la piràmide, l'octaedre i el cub—
mantenen entre si raons irracionals. [Dx 1.3]

I [les arestes] dels altres dos sòlids
—l'icosaedre i el dodecaedre—
no tenen una raó racional entre si ni tampoc amb les altres [tres] arestes [abans esmentades],
ja que són [segments] irracionals.

De fet, una és un [segment] «menor» [Exiii 16]
i l'altra un apòtom. [Exiii 17] ♠

Ara veurem que l'aresta de l'icosaedre, MB, és més gran que la del dodecaedre, NB.

[*Demostració.*] *c*) Atès que els triangles $\triangle\, FDB$ i $\triangle\, FAB$ són equiangles, [Evi 8]
DB és a BF com BF a BA. [Evi 4]

I, atès que, si tres segments són [contínuament] proporcionals,
el primer és al tercer com el quadrat de [costat] el primer [terme] al de [costat] el segon, [Dv 9 i Evi 20, porisma]
resulta que DB és a BA com el quadrat de [costat] DB al de costat BF.

Per tant, *invertendo*, AB és a BD com el quadrat de [costat] FB al de costat BD,
i AB és el triple de BD.

Així doncs, el quadrat de [costat] FB equival a tres vegades el de costat BD,
i el de [costat] AD ho és a quatre vegades el de costat DB
ja que AD és el doble de DB. [Evi 20]

En definitiva, el quadrat de [costat] AD és més gran que el de costat FB. [Nc 4′ i Dv 5]

En conseqüència, AD és més gran que FB.[1141]

Per tant, AL és molt més gran que FB,
KL és la part més gran de[l segment] AL
que s'ha dividit en mitjana i extrema raó,
ja que LK és [el costat] de l'hexàgon i KA el del decàgon, [Exiii 9]

1141. Vegeu la nota 1041 (pàgina 536).

i NB la part més gran de FB,
que també s'hi ha dividit.

Aleshores, KL és més gran que NB i igual a LM.

Per tant, LM és més gran que NB [i MB que LM].

En definitiva, MB, que és [l'aresta] de l'icosaedre,
és molt més gran que NB,
que és la del dodecaedre.
I això és el que volíem demostrar.[1142] ♠

[Teorema d'unicitat dels sòlids platònics.] *Afirmo que no hi ha altres sòlids que puguin ser construïts amb figures* [*poligonals planes*] *equilàteres i equiangles iguals.*

[*Demostració.*] No és possible fer un angle sòlid amb dos triangles [ni tampoc amb dues figures planes]. [DXI 11]

Els angles sòlids es construeixen així:[1143]

— Els de la piràmide, amb tres triangles [equiangles].
— Els de l'octaedre, amb quatre triangles [equiangles].
— Els de l'icosaedre, amb cinc triangles [equiangles].

I no és possible fer un angle sòlid amb sis triangles [equilàters i equiangles] de vèrtex comú,
ja que els angles d'un triangle equilàter són [cadascun] dues terceres parts d'un angle recte

---

1142. Si l'esfera té el radi unitat, els costats de la piràmide (tetraedre), de l'octaedre, del cub, de l'icosaedre i del dodecaedre satisfan les desigualtats següents: $[a_4 :=]\frac{2\sqrt{6}}{3} > [a_8 :=]\sqrt{2} > [a_6 =:]\frac{2\sqrt{3}}{3} > [a_{20} :=] \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{10-2\sqrt{5}} > [a_{12} :=]\frac{1}{3}(\sqrt{15}-\sqrt{3})$. Vegeu el problema 49 (pàgina 81).

1143. És la primera vegada que apareixen els angles sòlids dels poliedres regulars en tota aquesta discussió.

Fixem-nos en la simplicitat i el rigor de la metodologia que segueix l'enginy del geòmetra en aquesta exposició.

És un text clàssic molt aconsellable per la simplicitat, la claredat i el resultat que estableix. S'hauria de llegir a l'escola i comentar-lo. És genial com ens fa adonar que n'hi ha prou amb aplanar cadascun dels sòlids platònics. S'han de fer les seves plantilles, computar el valor de la suma dels angles que concorren en un vèrtex i veure que el que estableix el teorema «és plausible». Vegeu el problema 46 i el programa 24 (pàgines 80 i 83).

i la suma dels sis angles [plans que formen l'angle sòlid] és [igual a] quatre [angles] rectes.

I això és impossible perquè un angle sòlid està format per angles plans que sumen menys de quatre [angles] rectes. [Exi 21]

Pel mateix [raonament], un angle sòlid no pot estar format per més de sis angles plans ja que, de bell nou, la suma [dels angles plans que formen l'angle sòlid] és igual a quatre rectes. [Exi 21]

L'angle [sòlid] d'un cub està format per tres quadrats.

I [un angle sòlid format] per quatre [quadrats] és impossible,
ja que, de bell nou, la [suma dels angles plans que formen l'angle sòlid] és igual a quatre [angles] rectes. [Exi 21]

L'angle [sòlid] d'un dodecaedre [està format] per tres pentàgons equilàters i equiangles,
i [un angle sòlid format] per quatre [pentàgons equiangles] és impossible,
ja que l'angle d'un pentàgon equilàter equival a un de recte i una cinquena part [d'un de recte], [Exiii 18, lema]
i quatre angles [com aquests junts determinen un angle] més gran que quatre [angles] rectes. I això és impossible. [Exi 21]

I, seguint amb el mateix criteri d'absurditat,
cap angle sòlid no pot estar format per cap altre polígon [regular].[1144]

En definitiva, no hi ha cap altra mena de sòlid regular,
llevat de les cinc esmentades,
que es pugui construir amb [figures] planes equilàteres i equiangles.
I això és el que volíem demostrar. ♠

Exiii 18, lema. *L'angle d'un pentàgon equilàter i equiangle és un angle recte i una cinquena part d'un angle recte.*
[*Demostració.*] Sigui ⬠ $ABCDE$ un pentàgon regular.[1145]

1144. L'hexàgon regular determina angles iguals a un angle recte i una tercera part d'un angle recte. Tres hexàgons proporcionen exactament quatre angles rectes i això no és admissible en un angle sòlid. I, com més costats té el polígon regular, més gran és l'angle que formen dos costats seus consecutius. Per tant, és impossible fer un angle sólid amb aquests costats.

1145. Vegeu la nota 69 (pàgina 21).

Considerem el cercle $\bigcirc ABCDE$ que el circumscriu [EIV 14]
i el seu centre F. [EIII 1]

Unim FA, FB, FC, FD i FE. [P 1]

Aquests [radis] dimidien l'angle del pentàgon per [els punts] A, B, C, D i E. [EI 4]

Aleshores, atès que els cinc angles [amb vèrtex al punt] F sumen quatre rectes i són iguals,
un, com ara [l'angle] $\widehat{AFB}$ [o, qualsevol altre],
és una cinquena part menys d'un [angle] recte.

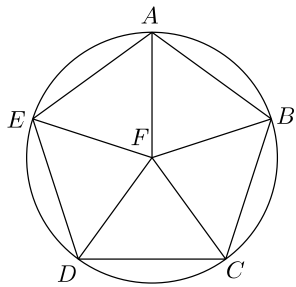


FIGURA EXIII 18, lema

Per tant, [la suma d]els altres [angles del triangle $\triangle ABF$], [Nc 3]
$\widehat{FAB}$ i $\widehat{ABF}$, en valen un de recte i una cinquena part. [EI 32]

Però [l'angle] $\widehat{FAB}$ és igual al $\widehat{FBC}$. [EI 4]

Per tant, l'angle complet $\widehat{ABC}$ del pentàgon
també en val un de recte i una cinquena part d'un angle recte.

I això és el que volíem demostrar. ♠

Les figures del text

Totes les figures, tant les que acompanyen el text explicatiu com les que fan explícites les proposicions dels *Elements* i faciliten la comprensió de les demostracions, són d'elaboració pròpia i han estat dissenyades amb GeoGebra.

Matemàtics i personatges citats

Alexandre d'Afrodísia o Afrodisienc (Ἀλέξανδρος Ἀφροδισιεύς) (Afrodísia [Anatòlia], segles ii i iii), famós escriptor i crític de les obres d'Aristòtil. Els seus escrits influïren en els erudits del Renaixement. Entre el 198 i el 211, ocupà la càtedra peripatètica d'Atenes. Fou el pare de l'«alexandrisme», segons el qual només l'enteniment actiu és immortal, a diferència del passiu, l'ànima individual.

Alexandre el Gran (Μέγας Αλέξανδρος) (Pel·la [Macedònia], 20 de juliol de 356 aC - Babilònia [Mesopotàmia], 10 de juny de 323 aC), rei de Macedònia (336 aC - 323 aC), va ser deixeble d'Aristòtil.

Antemi de Tral·les (Ἀνθέμιος) (Tral·les [Lídia, Imperi bizantí], 474-533), notable arquitecte, matemàtic i professor bizantí.

Apol·loni de Perge (Perge [Grècia], ∼262 aC - ∼190 aC), matemàtic grec.

Aristòtil (Ἀριστοτέλης) (Estagira [Macedònia, Grècia], 384 aC - Eubea [Calcídia, Grècia], 322 aC), filòsof grec. Se'l considera un dels grans pensadors de la humanitat. Vegeu Pla (2016*b*), § 4.5, p. 337-359, i els textos corresponents, § 11, p. 574-607.

Arquimedes de Siracusa (Ἀρχιμήδης) (Siracusa [Sicília, ara Itàlia], 287 aC - 212 aC), matemàtic grec.

BLAIR, Eric Arthur, més conegut pel pseudònim literari George ORWELL (Motihari [Bihar, Raj Britànic], 25 de juny de 1903 - Camden [Londres, Regne Unit], 21 de gener de 1950), fou un escriptor i periodista anglès. El seu corpus literari es caracteritza per la claredat, la intel·ligència i l'enginy, i pel coneixement de la injustícia social, l'oposició al totalitarisme i el compromís amb el socialisme democràtic. Autor d'obres molt significatives com *Homenatge a Catalunya* (*Homage to Catalonia*, 1938), *La rebel·lió dels animals* (*Animal farm*, 1945) i *1984* (1949).

BOECI (Anicius Manlius Severinus Boethius) (Roma [Itàlia], 480 - Pavia [Itàlia], 525), filòsof cristià del segle VI que tingué una gran repercussió en l'edat mitjana.

BOYER, Carl Benjamin (Hellertown [Estats Units d'Amèrica], 3 de novembre de 1906 - Nova York [Estats Units d'Amèrica], 26 d'abril de 1976), historiador de la ciència i, en especial, de la matemàtica.

CAL·LÍSTENES D'OLINT (Καλλισθένης) (Olint [Grècia], ∼360 aC - 328 aC), filòsof i historiador grec, cosí d'Aristòtil. Va acompanyar Alexandre el Gran a l'Àsia. Caigut en desgràcia, morí a la presó.

CASTELLI, Benedetto, nascut Antonio Castelli (Brescia [Itàlia], 1578 - Roma [Estats Pontificis], 9 d'abril de 1643), matemàtic que prengué el nom de «Benedetto» quan ingressà a l'orde dels benedictins l'any 1595.

CAUCHY, Augustin-Louis (París [França], 21 d'agost de 1789 - Sceaux [França], 23 de maig de 1857), matemàtic francès.

CLARKE, Sir Arthur Charles, més conegut com a Arthur C. Clarke (Minehead [Anglaterra], 16 de desembre de 1917 - Colombo [Sri Lanka, Índia] 19 de març de 2008), científic i escriptor anglès.

CONSTANTÍ I EL GRAN (Flavius Valerius Aurelius Constantinus Augustus; Κωνατντῖνος ὁ Μέγας) (Naissus [Dàcia, Imperi romà], 27 de febrer de 272 - Nicomèdia [Bitínia (Βιθυνία), Àsia Menor], 22 de maig de 337), primer emperador romà que va professar el cristianisme. Va ser proclamat august per les seves tropes el 25 de juliol de 306, i va governar un Imperi romà en constant creixement fins a la seva mort. És conegut també per haver refundat la ciutat de Bizanci (actual Istanbul, a Turquia), rebatejant-la com a Constantinopolis («ciutat de Constantí») i declarant-la la Nova Roma.

CRÀTIL (Κράτυλος) (segle V aC), filòsof grec. Se'n coneixen pocs detalls.

DEMÒCRIT (Abdera [Tràcia, Grècia], ∼460 aC - ?, ∼370 aC), matemàtic grec.

DESCARTES, René (La Haye en Touraine [França], 31 de març de 1596 - Estocolm [Suècia], 11 de febrer de 1650), filòsof i matemàtic francès.

DOYLE, Sir Arthur Ignatius Conan (Edimburg [Escòcia], 22 de maig de 1859 - Crowborough [Anglaterra], 7 de juliol de 1930), escriptor escocès creador del famós detectiu Sherlock Holmes.

EINSTEIN, Albert (Ulm [Württemberg, Alemanya] 14 de març de 1879 - Princeton [Nova Jersey, Estats Units d'Amèrica] 18 d'abril de 1955), físic d'origen alemany, nacionalitzat posteriorment suís i nord-americà. Va ser el científic més conegut i important del segle XX, pare de la teoria de la relativitat restringida (1905) i general (1915). L'any 1921 li van concedir el Premi Nobel de Física per la seva explicació de l'efecte fotoelèctric.[1146]

ERATÒSTENES (DE CIRENE) (Ἐρατοσθένης) (Cirene [Líbia], 276 aC - Alexandria [Egipte], 194 aC), matemàtic grec.

EUCLIDES (Εὐκλείδης) (?, ∼325 aC - Alexandria [Egipte], ∼ 265 aC), matemàtic grec.

ÈUDOX DE CNIDOS (Εὔδοξος) (Cnidos [Grècia], 408 aC - 355 aC), matemàtic grec.

EULER, Leonhard (Basilea [Suïssa], 15 d'abril de 1707 - Sant Petersburg [Rússia], 18 de setembre de 1783), matemàtic suís.

1146. Aquest personatge fou omès a *Grècia IIa*.

FERMAT, Pierre de (Beaumont-de-Lomagne [Gascunya, França], 17 d'agost de 1601 - Castres [França], 12 de gener de 1665), jurista i matemàtic francès.

FIBONACCI. Vegeu *Leonardo da Pisa*.

GALILEI, Galileo, conegut als països de parla catalana com a Galileu (Pisa [Itàlia], 15 de febrer de 1564 - Arcetri [Florència, Itàlia], 8 de gener de 1642), físic, matemàtic i filòsof toscà que tingué un paper molt rellevant en la revolució científica.

GAUSS, Carl Friedrich (Brunsvic [Alemanya], 30 d'abril de 1777 - Göttingen [Alemanya], 23 de febrer de 1855), matemàtic alemany autor de les *Disquisicions aritmètiques* (*Disquisitiones arithmeticæ*).

GRÉGOIRE DE SAINT-VINCENT (Gregorius de Sancto Vincentio, Bruges [Bèlgica], 22 de març de 1584 - Gant [Bèlgica], 5 de juny de 1667), matemàtic belga. A l'obra *Opus geometricum quadraturæ circuli et sectionum coni* (1647) introduí l'expressió «mètode d'exhaustió» per referir-se al sistema emprat per Èudox, que Euclides recull a EX 1 i aplica al llibre XII dels *Elements*.

HARDY, Godfrey Harold (Cranleigh [Anglaterra], 7 de febrer de 1877 - Cambridge [Anglaterra], 1 de desembre de 1947), matemàtic anglès.

HEATH, Thomas Little (Barnetby le Wold [Anglaterra], 5 d'octubre de 1861 - Ashtead [Anglaterra], 16 de març de 1940), matemàtic i alt funcionari britànic, conegut pels seus llibres d'història de les matemàtiques i per les seves traduccions a l'anglès dels textos dels matemàtics més notables de l'antiga Grècia.

HEIBERG, Johan Ludvig (Aalborg [Dinamarca], 27 de novembre de 1854 - 4 de gener de 1928), filòleg i historiador de les matemàtiques. És conegut pel descobriment dels textos d'Arquimedes que pogué llegir en el palimpsest d'Arquimedes (1906). Però la seva obra més notable és l'edició anglesa dels *Elements* d'Euclides (amb Heinrich Menge, 1880 i 1912). També publicà una edició de l'obra d'Apol·loni (1891-1893), de la de

Serè d'Antinòupolis (1896) i de la d'Heró d'Alexandria (1899), a més de l'*Almagest* de Ptolemeu (1898-1903).

Heró d'Alexandria (Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεύς) (Alexandria [Egipte], ∼10 - ?, ∼70), matemàtic grec.

Hipòcrates de Quios (Ἱπποκράτης ὁ Χῖος) (Quios [Grècia], ∼ 470 aC - ∼410 aC), matemàtic grec.

Hipsicles (Ὑψικλῆς) (?, ∼190 aC - ?, ∼120 aC), matemàtic i astrònom grec.

Holmes, Sherlock, personatge de ficció, protagonista d'una sèrie de quatre novel·les i cinquanta-sis relats publicats a *The Strand Magazine*. Va ser creat el 1887 per l'escriptor escocès Arthur Conan Doyle.

Isidor de Milet, el Vell (Ἰσίδωρος) (Milet [Grècia], ∼442 - ?, ∼537), arquitecte i professor, natural de la ciutat de Milet, que visqué al començament del segle VI. Malgrat que va desenvolupar la tasca de professor de matemàtiques i física a Alexandria i Constantinoble durant pràcticament tota la seva vida, és més recordat com a arquitecte, especialment per la reconstrucció de Santa Sofia de Constantinoble a partir de l'any 532, que compartí amb Antemi de Tral·les i que acabà en solitari l'any 537.

Isidor de Sevilla (Sevilla [Espanya], ∼559 - ∼636), teòleg i doctor de l'Església hispanoromana, autor de les *Etimologies*.

Jàmblic de Calcis (Ἰάμβλιχος) (segle III o segle IV?), filòsof neoplatònic nascut a Calcis, Celesíria (avui Palestina). Deixeble de Porfiri. Estudià Plató i Pitàgores, i filosofia caldea i egípcia. Morí durant el regnat de Constantí I el Gran, probablement abans de l'any 333. Escrigué moltes obres però se n'han conservat molt poques. Una és la que fa referència als pitagòrics, que consta de cinc llibres.

Legendre, Adrien-Marie (París [França], 18 de setembre de 1752 - 10 de gener de 1833), matemàtic francès.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (Leipzig [Saxònia, ara Alemanya], 1 de juliol de 1646 - Hannover [Saxònia, ara Alemanya], 14 de novembre de 1716), matemàtic alemany.

LEONARDO DA PISA (Pisa [Itàlia], ∼1170 - ∼1250), matemàtic italià del segle XIII conegut també com a Fibonacci, «figlio Bonacci».

LIU HUI (Wei [Xina], ∼220 - ? [Xina], ∼280), matemàtic xinès.

MENGE, Heinrich (Aquisgrà [Alemanya], 19 de juny de 1838 - ?, 1904), filòleg alemany i mestre d'escola.

MERSENNE, Marin (Oizé [França], 8 de setembre de 1588 - París [França], 1 de setembre de 1648), il·lustre erudit francès del segle XVII, membre de l'orde dels Mínims. S'aplicà en els camps de la teologia, les matemàtiques i la teoria musical.

NICÒMAC DE GERASA (Gerasa [Decàpolis, avui Jordània], 60-120), matemàtic grec.

ORWELL, George, pseudònim literari d'Eric Arthur Blair.

PAPPOS D'ALEXANDRIA (Πάππος) (Alexandria [Egipte], ∼290 - ∼350), matemàtic grec.

PÈRICLES (Περικλῆς) (Atenes [Grècia], 495 aC - 429 aC), home d'estat grec atenenc tan important que va donar nom a tot el segle V aC —el segle de Pèricles. Vegeu PLA (2016*b*), capítol 3, p. 167-266.

PEYRARD, François (comuna de Saint-Victor-Malescours [Alt Loira, França], 20 d'octubre de 1759 o de 1760 - París [França], 3 d'octubre de 1822), erudit i filòsof francès molt aclamat per la intel·lectualitat internacional pel fet d'haver identificat el manuscrit d'Euclides *Codex Vaticanus Græcus 190*, que havia passat desapercebut fins aleshores. És la versió més antiga del text del cèlebre geòmetra grec. En feu la traducció al llatí i al francès.

PITÀGORES (Πυθαγόρας ο Σάμιος) (Samos [Grècia], 581 aC - Metapont [Magna Grècia], 475 aC), matemàtic i filòsof grec.

PLATÓ (Πλάτων) —l'autèntic nom del qual era, potser, Aristocles, el nom de l'avi— (Atenes [Grècia], ∼21 de maig de 427 aC - 347 aC), filòsof d'immensa influència en la Grècia clàssica. Va ser deixeble de Cràtil i Sòcrates, i mestre d'Aristòtil. Fundà l'Acadèmia (Ἀκαδήμεια). És l'autor dels famosos *Diàlegs socràtics* (Σωκρατικός λόγος).[1147]

Porfiri (grec, Πορφύριος; llatí, Porphyrius Tyrius) (Tir [Líban], 232 - ∼304), filòsof neoplatònic grec preocupat per la temàtica eticoreligiosa. Va escriure *Contra els cristians*, obra amb la qual volgué apartar la intel·lectualitat pagana d'una religió que considerava irracional. Influí sobre l'Occident medieval.

Procle d'Alexandria (Πρόκλος) (Constantinoble [avui Istanbul, Turquia] 412 - Atenes [Grècia], 485), filòsof i matemàtic grec.

Ptolemeu, Claudi (Κλαύδιος Πτολεμαίος) (Pelusium [Egipte], ∼85 - Alexandria [Egipte], ∼165), astrònom i matemàtic grec, autor de la *Gran sintaxi matemàtica*, coneguda també amb el nom àrab d'*Almagest* ('L'obra gran').

Robinson, Abraham (Waldenburg [Silèsia], 6 d'octubre de 1918 - New Haven [Connecticut, Estats Units d'Amèrica], 11 d'abril de 1974), matemàtic, lògic i enginyer en aerodinàmica, cèlebre per la creació de l'*anàlisi no estàndard* (1961), una teoria matemàtica del càlcul infinitesimal que aconsegueix que l'ús dels nombres reals «infinitament petits» i dels «infinitament grans», introduïts per Leibniz (∼1690) i usats molt àmpliament per Euler, esdevingui una tècnica ben establerta. Aquesta metodologia havia estat bandejada per la fonamentació de l'anàlisi matemàtica del segle XIX. L'any 1973 rebé la Medalla Brouwer.

Serè d'Antinòupolis (grec, Σερῆνος; llatí, Serenus Antinoensis) (Antinòupolis [Egipte], ∼ 300 - ?, ∼ 360), matemàtic grec.

Simson, Robert (Kirktonhall [Ayrshire, Escòcia], 14 d'octubre de 1687 - Glasgow [Escòcia], 1 d'octubre de 1768), matemàtic escocès del segle XVIII, professor a la Universitat de Glasgow.

Sòcrates (d'Atenes) (Σωκράτης) (Atenes [Grècia], ∼470 aC - ∼399 aC), filòsof grec considerat el fundador de la filosofia occidental.[1148]

1147. Pla (2016*b*), § 4.2, p. 276-313, i els textos de § C 2 a § C 7, p. 525-562.

1148. Pla (2016*b*), § 4.1, p. 268-276, i textos § C 1, p. 512-525.

STAUDT, Karl Georg Christian von (Ciutat Imperial de Rothenburg [avui Rothenburg ob der Tauber, Alemanya], 24 de gener de 1798 - Erlangen [Baviera, avui Alemanya], 1 de juny de 1867), matemàtic alemany conegut pels seus treballs en geometria.

STEVIN, Simon (Bruges [Bèlgica], 1548 - la Haia [Holanda, avui Països Baixos], febrer o març de 1620), matemàtic belga.

TANNERY, Paul (Mantes-la-Jolie [França], 20 de desembre de 1843 - Pantin [França], 27 de novembre de 1904), matemàtic conegut pels seus treballs en història de les matemàtiques, especialment de la Grècia clàssica i del segle XVII.

TEETET D'ATENES (Θεαίτητος) (Atenes [Grècia], ∼417 - ∼369 aC), matemàtic grec.

TEÓ D'ESMIRNA (Θέων ὁ Σμύρνα) (Esmirna [Turquia], ∼70 - ?, ∼135), matemàtic grec.

TEODOR DE CIRENE (Θεόδωρος) (Cirene [Grècia], 465 aC - ?, 398 aC), filòsof pitagòric del temps de Pèricles.

TEOFRAST (Θεόφραστος)) (Eresos [Grècia], 372 aC - 287 aC), filòsof grec nadiu d'Eresos, a Lesbos. Va anar a Atenes i es va unir a Plató i, després, a Aristòtil. Quan Aristòtil va anar a Calcídia, Teofrast fou nomenat el seu successor al capdavant del Liceu. Se sap que tenia terres a Estagira (la ciutat natal d'Aristòtil) i que era amic de Cal·lístenes, company d'Alexandre el Gran.[1149]

TIMÀRIDES DE PAROS (Θυμαρίδας) (Paros [Grècia], IV aC - ?, IV aC), matemàtic grec. Vegeu PLA (2016*b*), § 4.2.6, p. 331-333.

WAERDEN, Bartel Leendert van der (Amsterdam [Holanda, avui Països Baixos], 2 de febrer de 1903 - Zuric [Suïssa], 12 de gener de 1996), matemàtic holandès.

WATSON, John Hamish, personatge de ficció sorgit de la imaginació de l'escriptor escocès Arthur Conan Doyle. Nasqué el 7 d'agost de 1852. Fou amic i cronista de Sherlock Holmes, del qual va narrar cinquanta-dues aventures.

1149. Aquest personatge fou omès a l'apartat «Matemàtics i personatges citats» de PLA (2018), p. 355-364.

Bibliografia

Acerbi, Fabio (2007). *Euclide*: *Tutte le opere*. Milà: Bompiani. [Traducció italiana i notes de l'autor]

Adami, F. (1936). «Zu Platon's Menon». *Philologus*, vol. 91, p. 473-477.

Apol·loni de Rodes (2002). *Argonàutiques* (Ἀργοναυτικά). Barcelona: La Magrana. [Traducció catalana de F. Cuartero]

Aristòtil (1964). *Obras*. Madrid: Aguilar. [Traducció castellana, estudi preliminar i notes de F. P. de Samaranch. Reeditat per Aguilar, 1997. En línia, en francès, a <http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/Aristote/table.htm>; en anglès, a <https://ebooks.adelaide.edu.au/a/aristotle/> o <http://www.perseus.tufts.edu/hopper/searchresults?q=Aristotle>]

——— (1987). *Tratados de lógica*. Mèxic: Porrúa.

——— (1988). *Organon*: *Tratados de lógica* (Οργανον). Madrid: Gredos. [Vegeu Aristòtil (1987); Aristòtil (1964), p. 217-561. En línia, en castellà, a <https://enblancoe.files.wordpress.com/2013/11/aristoteles-tratados-de-logica.pdf> i <https://drive.google.com/file/d/0By4kcbi6MzzdUHhVQnUtcTNUdk0/edit?pli=1>; en anglès, a <http://classics.mit.edu/Aristotle/posterior.html>; i, en francès, a <http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/Aristote/analyt2.htm>]

——— (1995). *Física* (Περά τά φύσικα). Barcelona: Librería Bergua. [Vegeu Aristòtil (1964), p. 565-703. Traducció anglesa de T. Taylor, en línia, a <http://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=nyp.33433000341705;view=1up;seq=9>]

——— (1997). *Acerca del cielo* (Περὶ ούγανόν). Barcelona: Círculo de Lectores. [Vegeu Aristòtil (1964), p. 705-776. En línia, en castellà, a <https://it.scribd.com/doc/37395076/Aristoteles-Sobre-El-Cielo>; i, en anglès i grec, a <http://remacle.org/bloodwolf/philosophes/Aristote/table1.htm>]

Aristòtil (2000). *Metafísica* (Μετὰφύσικα). Madrid: Gredos. [En línia, la traducció de V. García Yebra, a <http://www.oposinet.com/filoso fia/temas/w4.pdf>. Vegeu Aristòtil (1964), p. 903-1089]

——— (2007). *Tòpics* (Τοπικά). Austràlia Sud: The University of Adelaide. [Traducció anglesa d'A. J. Jenkinon. Vegeu Aristòtil (1964), p. 415-426; Aristòtil (1988), p. 85-300. En línia, en anglès, a <http:// classics.mit.edu/Arisiotle/prior.html>; i, en francès, a <http://rema cle.org/bloodwolf/philosophes/Aristote/tableanal1.htm>]

Boyer, Carl Benjamin (1968). *A history of mathematics*. Nova York: John Wiley & Sons. [Revisat per U. C. Merzbach el 1989. Traducció castellana de la primera edició de M. Martínez Pérez, *Historia de la matemática*, Madrid, Alianza, 1986. En línia a <https://archive.org/ stream/AHistory OfMathematics/Boyer-AHistoryOfMathematics# page/n0/mode/2up>]

Caveing, Maurice (1998). *L'irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide*. Lille: Presses Universitaires du Septentrion. [Vegeu <https://books.google.es/books?id=ZycSoMNgL2YC&pg= PA6&lpg=PA6&dq=L%27Irrationalit%27e+dans+les+math%27em atiques+grecques+jusqu%27à+Euclide&source=bl&ots=7Zqo85tE2 c&sig=Tx9EGSdVRbec-#v=onepage&q=L%5C'Irrationalit%5C'e% 20dans%20les%20math%5C'ematiques%20grecques%20jusqu%5C'% 5C%60a%20Euclide&f=false>]

Clarke, Arthur C. (1999). *Greetings, carbon-based bipeds!: collected essays, 1934-1998*. Nova York: St. Martin's Press.

Conan Doyle, Sir Arthur (1890). *The sign of four*. Filadèlfia: Lippincott's Monthly Magazine. Spencer Blackett. [Es publicà a les pàgines 145-223 del número de febrer de la revista *Lippincotts Monthly Magazine*. En línia, en anglès, a <http://literature.org/authors/doyle-ar thur-conan/sign-of-four/index.html>; en castellà, a <https://es.wiki source.org/wiki/El_signo_de_los_cuatro>; en català, a <http://assets. espapdf.com/b/Arthur%20Conan%20Doyle/El%20signe%20dels%20 quatre%20(6820)/El%20signe%20dels%20quatre%20-%20Arthur%20 Conan%20Doyle.pdf>]

——— (1905). «The adventure of the dancing men», capítol quart de *The return of Sherlock Holmes*. Londres: George Newnes. [Traducció castellana de J. A. Molina Foix i E. Riambua Saurí, *Cinco aventuras de Sherlock Holmes*, Madrid, Siruela, 1999 i 2005. En línia, en anglès, a <http://en.wikisource.org/wiki/The_Adventure_ of_ the_ Dancing_ Men>]

Dedron, Pierre i Itard, Jean (1959). *Mathématiques et mathématiciens*. París: Magnard.

Dickson, Leonhard Eugene (1919). *History of the theory of numbers*. Washington: Carnegie Institute of Washington. [Reeditat, en tres volums, Nova York, Chelsea Publishing, 1971; i Nova York, Dover, 2005]

Euclides (iii aC *a*). *Elements*. En català, llibres i, ii, iii, iv, v i vi a Pla (2018); llibres vii, viii, ix, x, xi, xii i xiii a aquest volum. Edició castellana parcial a Vera (1970), volum i, p. 687-980, i completa a Puertas (1994), en tres volums (1991, 1994 i 1996); anglesa a Heath (1925) i Fitzpatrick (2008); francesa a Kayas (1978) i Vitrac (1990); italiana a Acerbi (2007) i Frajese i Maccioni (1970), i alemanya a Haller (2010).

——— (iii aC *b*). *Elements*. [En línia, en català, a <http://www.euclides.org/menu/elements_cat/indexeuclides.htm>; en castellà, a http://www.euclides.org/menu/elements_eps/indexeuclides.htm; en anglès, a <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/Euclid.html>; en grec, a <http://www.physics.ntua.gr/~mourmouras/euclid/>; en llatí, a <http://www.euclides.org/menu/heiberg/euclidiselementa.htm>. Per a la versió grega en paper, vegeu Acerbi (2007) o Fitzpatrick (2008). Una edició anglesa molt acurada es troba, en línia, a <https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/>]

——— (iii aC *c*). *Elements*. [Per a les edicions antigues i modernes de l'obra d'Euclides, vegeu, en línia, <http://onlinebooks.library.upenn.edu/webbin/book/lookupname?key=Euclid>]

Favaro, Antonio (1883). *Galileo Galilei e lo studio di Padova*. Florència: Successori Le Monnier. [2 volums. En línia el volum segon a <https://archive.org/details/galileogalileie00favagoog>]

Fermat, Pierre de (2008). *Fermat*: *Opera varia*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. [Traducció catalana, introducció, comentaris i notes a Pla, Paradís i Viader (2008)]

Figuier, Louis (1866). *Vie des savants illustres*. París: Hachette. [5 volums. En línia a <https://play.google.com/store/books/details/Louis_Guillaume_Figuier_Vies_des_savants_illustres?id=3T-1ENGM73AC>]

Fitzpatrick, Richard (2008). *Euclid's Elements of geometry: the greek text of J.L. Heiberg (1883-1885) from Euclidis Elementa, edidit et Latine interpretatus est I. L. Heiberg, in aedibus B. G. Teubneri, 1883-1885*. Estats Units d'Amèrica: Fitzpatrick. [Editat per R. Fitzpatrick, i amb una traducció anglesa moderna. En línia a <https://www.math.ust.hk/ mamyan/sc1110/Elements.pdf>]

Fowler, D. H. (1992). «An invitation to read book x of Euclids *Elements*». *Historia Mathematica*, vol. 19, p. 233-264. [En línia a <http://ac.els-cdn.com/031508609290029B/1-s2.0-031508609290029B-main.pdf?_tid=32ef1db0-7eb8-11e6-b348-00000aacb35e&acdnat=1474324207_055349cd90f1578e57d518946040dd97>]

Frajese, Atilio i Maccioni, Lamberto (ed.) (1970). *Gli elementi di Euclide.* Torí: Utet.

Gardies, Jean-Louis (1994). «L'organisation du libre xii des *Eléments* d'Euclides et ses anomalies». *Revue d'Histoire des Sciences et de Leurs Applications*, vol. 47, núm. 2, p. 189-208.

Gauss, Carl Friedrich (1801). «Disquisitiones arithmeticæ». Leipzig: Gerhard Fleischer. [Traducció catalana a Pascual (1996)]

Gel·li, Aule (1930). *Nits àtiques* (*Noctes Atticæ*). Barcelona: Bernat Metge. [3 volums (1930, 1934 i 1988). En anglès, *Attic nights*, Londres, Loeb Classical Library, 1927. En línia a <http://penelope.uchicago.edu/Thayer/E/Roman/Texts/Gellius/10*.html>]

Gran enciclopèdia catalana. Barcelona: Enciclopèdia Catalana. [25 volums publicats des de 1965 fins a 1996. En línia a <http://www.enciclopedia.cat/>]

Haller, Rudolf (2010). *Euklid: Stoicheia* (*Die Elemente des Euklid*). Markgröningen: Opera-Platonis. [En línia a <http://opera-platonis.de/euklid/index.html>]

Hardy, Godfrey Harold (1940). *A mathematician's apology.* Cambridge: Cambridge University Press. [Traducció castellana de J. Fernández, *Apología de un matemático*, Madrid, Nivola, 1999. Traducció catalana de M. Merín, *Apologia d'un matemàtic*, amb una introducció de J. Pla, Santa Coloma de Queralt, Obrador Edèndum, 2008. En línia a <http://www.math.ualberta.ca/mss/misc/A%20Mathematician's%20Apology.pdf>]

Heath, Thomas L. (1921). *A history of greek mathematics.* Toronto: General Publishing Company. [Reeditat *Greek mathematics*, Nova York, Dover, 1981, 2 volums. En línia a <https://archive.org/stream/cu31924008704219#page/n7/mode/2up> (volum 1) i a <https://archive.org/stream/ahistorygreekma00heatgoog #page/n7/mode/2up> (volum 2)]

——— (1925). *The thirteen books of Euclid's Elements.* Toronto: General Publishing. [Reeditat, en 3 volums, per Dover, Nova York, 1956. Edició de la traducció, sense notes, en un volum, *Euclid's Elements*, Ann Arbor (Michigan), Green Lion Press, 2002. Reeditat el 2003 i el 2007. En línia a <http://en.wikisource.org/wiki/The_Elements_of_Euclid>]

Heiberg, Johan Ludvig i Menge, Heinrich (1883-1888). *Euclides: Opera omnia.* Leipzig: Teubner. [5 volums (1883, 1884, 1885, 1886 i 1888). En línia a Euclides (iii aC*c*)]

Hesíode (1914). *Homeric hymns, epic cycle, homerica.* Cambridge: Harvard University Press. [Traducció anglesa, amb el text grec, de H. G. Evelyn-White. Conté *Els treballs i els dies* (p. 2-65), l'*Himne* (p. 66-73), i la *Teogonia* (p. 78-155). En línia, en anglès, a <http://archive.

org/stream/hesiodhomerichym00hesiuoft#page/n9/mode/ 2up>; en grec, a <http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus %3Atext%3A1999.01.0131%3Acard%3D1>; en francès, a <http://re macle.org/bloodwolf/poetes/falc/hesiode/intro.htm>, i, en castellà, a <http://www.imperivm.org/cont/textos/txt/hesiodo_los-trabajos-y-los-dias.html> i a <http://es.wikisource.org/wiki/Hes%C3%ADo do>]

Institut d'Estudis Catalans (1995). *Diccionari de la llengua catalana.* Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. [Revisat i ampliat l'any 2007. En línia a <https://dlc.iec.cat/>]

Isidor de Sevilla (2004). *Etimologías.* Madrid: Biblioteca de Autores Cristianos. [Text llatí, versió espanyola i notes de J. Oroz i M. Marcos, amb introducció de M. Díaz. En línia a <http://www.larramendi.es/ i18n/consulta/registro.cmd?id=5374>]

Itard, Jean (1961). *Les livres arithmétiques d'Euclide.* París: Hermann.

Kayas, Georges J. (1978). *Euclides*: *Les éléments. ΕΨΚΛΕΙΔΟΨ, ΣΤΟΙΘΕΙΑ*. París: CNRS.

Killing, Wilhelm. (1893). *Einführung in die Grundlagen der Geometrie.* Münster; Paderborn: F. Schöningh.

Levi, Beppo (1947). *Leyendo a Euclides.* Buenos Aires: Libros del Zorzal. [Reeditat l'any 2001]

Livi, Tit (2002). *Història de Roma* (*Ab urbe condita*). Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Volums i i xi. En línia a <https://es.wikipedia. org/wiki/Ab_Urbe_condita_(libro)>]

Marchini, Carlo (2006) *Appunti di geometria classica.*[Vint-i-nou lliçons de geometria, llegides entre el 8 de març i l'1 de juny de 2006, durant el curs acadèmic 2005-2006. Università degli Studi di Parma]

May, Elmer, Stadler, Gerald, Votaw, John i Griess, Thomas (1984). *Ancient and medieval warfare*: *The history of the strategies, tactics, and leadership of classical warfare.* Nova Jersey: Avery Publishing.

Mueller, Ian (1981). *Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Elements.* Massachusetts: MIT Press. [Reeditat Nova York, Dover, 2006]

Mugler, Charles (1958). *Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des grecs.* París: C. Klincksieck.

Nesselmann, Georg Heinrich Ferdinand (1842). *Der Algebra der Griechen.* Berlín: Verlag von Reimar.

Nicòmac (1926). *Introduction to arithmetic.* Londres: The Macmillan Co. [Traducció anglesa de M. L. D'Ooge, amb estudis sobre l'aritmètica grega de F. E. Robbins i L. Ch. Karpinski; castellana, molt parcial, a Vera (1970), p. 909-917; francesa, amb notes i índex de J. Bertier, a Orwell (1978). En línia a <https://ia800709.us.archive.

org/27/items/NicomachusIntroToArithmetic/nicomachus_introduction_arithmetic.pdf>]

Nicòmac (1978). *Introduction arithmétique.* París: Librairie Philosophique Vrin. [Traducció francesa, notes i índex de Janine Bertier]

Orwell, George (1938). *Homage to Catalonia.* Londres: Harvill Secker. [Traducció catalana de R. Folch i Camarasa, *Homenatge a Catalunya*, Barcelona, Ariel, 1969. En línia, en anglès, a <http://www.george-orwell.org/Homage_to_Catalonia/index.html>]

——— (1945). *Animal farm.* Londres: Secker and Warburg. [Traducció catalana de M. Rubió, *La rebel·lió dels animals*, Barcelona, Labutxaca, 2007. En línia, en anglès, a <https://ebooks.adelaide.edu.au/o/orwell/george/o79a/index.html>]

——— (1949). *1984.* Londres: Harvill Secker. [Traducció catalana de L. A. Baulenas, Barcelona, Labutxaca, 2011. En línia, en anglès, a <http://fadedpage.com/showbook.php?pid=20120511>]

Pascual, Griselda (1986). Traducció catalana, *Disquisicions aritmètiques de Gauss.* Barcelona: Societat Catalana de Matemàtiques. [En línia, en castellà, parcial, a <http://books.google.es/books?id=gYxXFX0IPqIC&printsec =frontcover&hl=ca&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false>]

Picutti, Ettore (1983). «Il "Flos" di Leonardo Pisano. Traduzione e commenti». *Physis*, vol. 25, p. 293-387.

Pla, Josep (2003). «Una història breu de la matemàtica». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, vol. 18, núm. 1, p. 47-129. [En línia a <http://revistes.iec.cat/index.php/BSCM/article/view/9785/9779>]

——— (2009). *Liu Hui*: *Nueve capítulos de la matemática china.* Madrid: Nivola.

——— (2010). *Una aproximació* [εἰσαγωγή] *a la filosofia de la matemàtica grega des d'un punt de vista matemàtic*: *De Tales de Milet als 'Elements' d'Euclides.* Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. Societat Catalana de Filosofia.

——— (2012). *Euclides*: *La geometría.* Barcelona: RBA.

——— (2016*a*). *Història de la matemática*: *Egipte i Mesopotàmia*: *Resultats, textos i contextos.* Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.

——— (2016*b*). *Història de la matemàtica*: *Grècia I* (*de Tales a Plató i Aristòtil*): *Resultats, textos i contextos.* Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.

——— (2016*c*). «Euclides. *Elementa geometricæ*». A: *Els tresors de la Universitat de Barcelona. Fons bibliogràfic del CRAI Biblioteca de Reserva.* Barcelona: Universitat de Barcelona, p. 166-169.

PLA, Josep (2016*d*). «Caminant agafats de la mà de Karl Weierstrass». Barcelona: Publicacions de la Universitat de Barcelona. [En línia a <https://mat.ub.edu/matapps/activitats/wp-content/uploads/sites /8/2017/01/lguioinauguralMatematiques1516.pdf>]

——— (2018). *Història de la matemàtica*: *Grècia IIa*: *Els "Elements" d'Euclides* (*llibres* I, II, III, IV, V *i* VI). Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.

——— (2019). *Història de la matemàtica*: *Grècia IIb*: *Els "Elements" d'Euclides* (*llibres* VII, VIII, IX, X, XI, XII *i* XIII). Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.

——— (2020*a*). *Història de la matemàtica.Grècia IIIa*: *El segle d'or*: *Aristeu, Eudem, Euclides, i Aristarc.* Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.

——— (2020*b*). *Història de la matemàtica*: *Grècia IIIb*: *Conó i Doiteu, Arquimedes, i Nicomedes i Eratòstenes*: *Resultats, textos i contextos.* Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. [Pendent de publicació]

PLA, Josep, PARADÍS, Jaume i VIADER, Pelegrí (2008). *Fermat*: *Opera varia.* Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. [Traducció catalana amb comentaris i notes dels autors]

PLATÓ (1871). *Obras completas de Platón.* Madrid: Medina y Navarro. [Traducció castellana de P. de Azcárate. En línia a <http://www.filo sofia.org/cla/pla/azcarate.htm>]

——— (1931-2015). *Diàlegs.* Barcelona: Fundació Bernat Metge. 20 volums.

——— (1956). *Menó* (Μενων) *o de la virtut.* Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Traducció catalana de J. Olives Canals, PLATÓ (1931-2015), volum V; castellana a PLATÓ (1871), tom 4, p. 275-345, i a PLATÓ (1966), p. 435-462]

——— (1966-1969). *Obras completas.* Madrid: Aguilar. [Vegeu també PLATÓ (1871)]

——— (1989). *La República* (Πολιτεία). Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Traducció catalana de M. Balasch, en tres volums, a PLATÓ (1931-2015) (1989, llibres I-IV; 1990, llibres V-VII; 1992, llibres VIII-X); castellana a PLATÓ (1871), toms 7 i 8, i a PLATÓ (1966), p. 653-846]

——— (1996). *El sofista* (Σοφιστής). Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Traducció catalana de M. Balasch, PLATÓ (1931-2015), volum XV; castellanes a PLATÓ (1871), tom 4, i a PLATÓ (1966), p. 993-1048]

——— (2013-2015). *Lleis* (Νόμοι) *o de la legislació.* Barcelona: Fundació Bernat Metge. [Traducció catalana de M. Camps Gaset a PLATÓ (1931-2015), volums XIX i XX; castellanes a PLATÓ (1871), toms 9 i 10, i a PLATÓ (1966), p. 1267-1520. En línia, en anglès, a <http:// classics.mit. edu/Plato/laws.html>]

Plutarc (1932-1946). *Vides paral·leles.* Barcelona: Fundació Bernat Metge. 15 volums.

Procle (1970*a*). *A commentary on the first book of Euclid's Elements* (Σχόλια εἰς τὸ πρῶτον τῶν Εὐκλείδου στοιχείων). Princeton: Princeton University Press. [Traducció anglesa i notes de G. R. Morrow; francesa a Procle (1970*a*); italiana a Procle (1978); castellana a Procle (1970*b*). En línia, en grec, a <http://www.wilbourhall.org/millionbookspdfs/proclidiadochiin00procuoft.pdf>]

——— (1970*b*). *Los comentarios al libro primero de los 'Elementos' de Euclides.* Madrid: Aguilar. [Traducció castellana parcial a Vera (1970), volum ii, p. 1141-1184]

——— (1948). *Les commentaires sur le premier livre des 'Éléments' d'Euclide.* [Traducció francesa i notes de P. ver Eecke, Bruges, Desclée de Brouwers]

——— (1978). *Commento al* i *libro degli 'Elementi' di Euclide.* Pisa: Giardini. [Traducció italiana, amb introducció i notes, de M. Timpanaro Cardini]

Puertas, María Luisa (1991). *Elementos*: *Libros i-iv.* Madrid: Gredos. [Introducció de L. Vega, i traducció i notes de M. L. Puertas Castaños]

——— (1994). *Elementos*: *Libros v-ix.* Madrid: Gredos. [Traducció i notes de María Luisa Puertas Castaños]

——— (2008). *Elementos*: *Libros x-xi.* Madrid: Gredos. [Traducció i notes de María Luisa Puertas Castaños]

Simson, Robert (1756). *Euclidis Elementorum.* Londres: Glasgow University. [Traducció anglesa, *Elements of Euclid*: *The first six books*, Filadèlfia, De Silver, 1838. En línia a <https://archive.org/stream/elementseuclid00euclgoog#page/n6/mode/2up>]

Stevin, Simon (1585). *L'arithmétique.* Leyden: Bonaventure i Abraham Elsevier. [En línia a <https://books.google.fr/books?id=SMVbAAAAQAAJ&printsec=frontcover&dq=simon+stevin&hl>]

Stillwell, John (1994). *Elements of algebra.* Berlín: Springer-Verlag.

Szábó, Árpad (1963). «Der mathematische Begriff δύναμις und das sogenannte geometrische Mittel». *Maia*, vol. 15, p. 219-256.

Tannery, Paul (1885). «Le vrai problème de l'histoire des mathématiques anciennes». *Bulletin des Sciènces Mathématiques et Astronomiques*, sèrie ii, volum x, p. 104-120. [En línia a <http://www.archive.org/stream/bulletindesscie06pargoog/bulletindesscie06pargoog_djvu.txt>]

Thomas, Ivor (1939). *Greek mathematical works.* Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press. [Reeditat l'any 1980 en 2 volums]

Vega, Luis (1990). *La trama de la demostración (Los griegos y la razón tejedora de pruebas).* Madrid: Alianza.

VERA, Francisco (1970). *Científicos griegos.* Madrid: Aguilar. 2 volums.

VIRGILI (1972). *Eneida* (*Aenēis*). Barcelona: Fundació Bernat Metge. [4 volums (1972, 1975, 1977 i 1978) editats per Miquel Dolç]

VITRAC, Jean (1990). *Euclide*: *Les éléments. Volume 1. Livres* I *à* IV. París: PUF.

——— (1994). *Euclide*: *Les éléments. Volume 2. Livres* V *à* IX. París: PUF.

——— (1998). *Euclide*: *Les éléments. Volume 3. Livre* X. París: PUF.

——— (2001). *Euclide*: *Les Éléments. Volume 4. Livres* XI *à* XIII. París: PUF.

WAERDEN, Bartel Leendert van der (1954). *Science awakening.* Groningen: P. Noordhoff. [Reeditat a Oxford, Oxford University Press, 1961. I a Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1975 i 1988]

YOUCERNAR, Marguerite (1948-1950). *La table ronde, n. 43, 44 i 45.* [Reeditat a París, Librairie Plon, 1951. Traducció catalana de J. Creus, *Memòries d'Adrià*, Barcelona, Proa, 1999]

ZEUTHEN, Hieronimus Georg (1910). «Notes sur l'histoire des mathématiques, (suite) VII: sur la constitution des livres arithmétiques des eléments d'Euclide et leur rapport à la question de l'irrationalité». *Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs. Forhandlinger*, vol. 65, p. 395-435. [És l'apartat setè d'un treball sobre història de la matemàtica iniciat en aquesta mateixa revista l'any 1893]

Índex d'antropònims

Índex de citacions

Índex d'indrets

Índex de mots

llatins

Índex d'obres

Índex de termes

Índex general

9 788499 655154